

УДК 517.982.27

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ НЕСЕПАРАБЕЛЬНЫХ ПЕРЕСТАНОВОЧНО-ИНВАРИАНТНЫХ ПРОСТРАНСТВ

© 2020 г. С. В. Асташкин^{1,*}, Е. М. Семенов^{2,**}

Представлено академиком РАН С.В. Кисляковым 21.07.2020 г.

Поступило 21.07.2020 г.

После доработки 21.07.2020 г.

Принято к публикации 25.09.2020 г.

Пусть E — несепарабельное перестановочно-инвариантное пространство и E_0 — замыкание множества ограниченных функций в E . Работа посвящена изучению элементов пространства E , ортогональных подпространству E_0 , т.е. таких $x \in E$, что $\|x\|_E \leq \|x + y\|_E$ для любого $y \in E_0$.

Ключевые слова: несепарабельное банахово пространство, перестановочно-инвариантное пространство, пространство Орлича, пространство Марцинкевича, ортогональные элементы

DOI: 10.31857/S268695432006003X

1. Банахово пространство E измеримых на $[0, 1]$ функций называется перестановочно-инвариантным (кратко г.и.), или симметричным, если

1) из $|x(t)| \leq |y(t)|$ для всех $t \in [0, 1]$ и $y \in E$ следует $x \in E$ и $\|x\|_E \leq \|y\|_E$;

2) из равноизмеримости функций $|x|$ и $|y|$ (это означает, что

$$\text{mes}\{t: |x(t)| > \tau\} = \text{mes}\{t: |y(t)| > \tau\}$$

для каждого $\tau > 0$, где mes — мера Лебега на $[0, 1]$) и $y \in E$ следует, что $x \in E$ и $\|x\|_E = \|y\|_E$ [1, 2].

Следуя [1], будем предполагать, что г.и.-пространство E сепарабельно или сопряжено к сепарабельному пространству. Кроме того, без ограничения общности можно считать, что $\|\chi_{(0,1)}\|_E = 1$, где χ_e — характеристическая функция измеримого подмножества $e \subset [0, 1]$. Тогда $L_\infty \subset E \subset L_1$ и $\|x\|_{L_1} \leq \|x\|_E \leq \|x\|_{L_\infty}$ для любого $x \in L_\infty$ и каждого г.и.-пространства E . Через E_0 обозначается замыкание L_∞ в г.и.-пространстве E . Если $E \neq L_\infty$, то E_0 — сепарабельное г.и.-пространство. Для сепарабельности г.и.-пространства E необходимо и достаточ-

но, чтобы норма любой функции из E была абсолютно непрерывна, т.е.

$$\lim_{\text{mes } e \rightarrow 0} \|x\chi_e\|_E = 0.$$

Это условие эквивалентно равенству

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \|x^* \chi_{(0,\tau)}\|_E = 0,$$

где x^* — функция, равноизмеримая с $|x|$ и не возрастающая на $(0, 1]$.

Двойственное к г.и.-пространству E пространство E' состоит из всех измеримых функций y , для которых конечна норма

$$\|y\|_{E'} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \int_0^1 x(t)y(t)dt.$$

Пространство E' также является г.и.-пространством. Если E сепарабельно, то E' совпадает с сопряженным пространством E^* . Естественное вложение E в E'' изометрично.

Приведем примеры г.и.-пространств. Естественным обобщением пространств L_p ($1 \leq p < \infty$) являются пространства Орлича. Пусть $M(u)$ — непрерывная выпуклая возрастающая функция на $[0, \infty)$, $M(0) = 0$, $M(1) = 1$. Пространство Орлича L_M состоит из всех измеримых на $[0, 1]$ функций, для которых конечна норма Люксембурга

$$\|x\|_{L_M} = \inf \left\{ \lambda: \lambda > 0, \int_0^1 M\left(\frac{|x(t)|}{\lambda}\right) dt \leq 1 \right\}.$$

¹ Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва, Самара, Россия

² Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

*E-mail: astash56@mail.ru

**E-mail: nadezhka_ssm@geophys.vsu.ru

В частности, если $M(u) = u^p$, то $L_M = L_p$. Пространство L_M сепарабельно тогда и только тогда, когда $M(2u) \leq CM(u)$ для некоторого $C > 0$ и всех достаточно больших u .

Обозначим через Ω множество непрерывных возрастающих вогнутых на $[0, 1]$ функций φ таких, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t)}{t} = \infty$. Пространство Лоренца $\Lambda(\varphi)$ состоит из всех измеримых на $[0, 1]$ функций, для которых

$$\|x\|_{\Lambda(\varphi)} := \int_0^1 x^*(t) d\varphi(t) < \infty.$$

Каждое пространство Лоренца сепарабельно, и сопряженным к пространству Лоренца $\Lambda(\varphi)$ является пространство Марцинкевича $M(\varphi)$ с нормой

$$\|x\|_{M(\varphi)} := \sup_{0 < s \leq 1} \frac{1}{\varphi(s)} \int_0^s x^*(t) dt.$$

Всякое пространство Марцинкевича несепарабельно, и $M'(\varphi) = \Lambda(\varphi)$ с совпадением норм.

Пусть F — банахово пространство и F_1 — подпространство F . Элемент $x \in F$ будем называть ортогональным множеству F_1 , если $\|x\|_F \leq \|x + y\|_F$ для любого $y \in F_1$. В соответствии с этим определением элемент x из несепарабельного г.и.-пространства E ортогонален подпространству E_0 , если $\|x\|_E \leq \|x + y\|_E$ для любого $y \in E_0$.

Множество ортогональных элементов $\mathcal{O}(E)$ является важной характеристикой несепарабельного г.и.-пространства E . Настоящая работа посвящена изучению этого интересного множества, обладающего весьма необычными свойствами. Все приведенные выше результаты содержатся в монографиях [1–4].

2. Множество $\mathcal{O}(E)$ было введено в статье [5]. В частности, в [5] показано, что $\mathcal{O}(E)$ совпадает с множеством тех $x \in E$, для которых $\|x\|_E = \|x^* \chi_{(0, \tau)}\|_E$ для любого $\tau \in (0, 1)$. Там же доказано, что $\mathcal{O}(E)$ неустойчиво относительно эквивалентных преобразований в классе г.и.-пространств. А именно, справедлива

Теорема 1 [5]. Пусть E — несепарабельное г.и.-пространство и $\varepsilon > 0$.

1. Существует такая г.и.-норма $\|\cdot\|_1$ на E , что $\|x\|_E \leq \|x\|_1 \leq (1 + \varepsilon) \|x\|_E$ для всех $x \in E$ и в г.и.-пространстве $(E, \|\cdot\|_1)$ не существует ортогональных элементов.

2. Если $x \in E \setminus E_0$, то найдется такая эквивалентная г.и.-норма $\|\cdot\|_2$ на E , что $x \in \mathcal{O}(E, \|\cdot\|_2)$.

В следующих двух теоремах показано, что в любом пространстве Марцинкевича и каждом несепарабельном пространстве Орлича с ранее введенными нормами существуют ортогональные элементы, а также получен критерий принадлежности заданной функции множеству ортогональных элементов.

Теорема 2. Пусть L_M — несепарабельное пространство Орлича и $x \in L_M$. Тогда $x \in \mathcal{O}(L_M)$, если и только если

$$\int_0^1 M\left(\frac{|x(t)|}{\lambda}\right) dt = \infty$$

для любого $\lambda \in (0, \|x\|_{L_M})$.

Заметим, что

$$\int_0^1 M\left(\frac{|x(t)|}{\|x\|_{L_M}}\right) dt \leq 1$$

для любого $x \in L_M$ ([3], 2.9.21).

Теорема 3. Пусть $\varphi \in \Omega$ и $x \in M(\varphi)$. Для того чтобы $x \in \mathcal{O}(M(\varphi))$, необходимо и достаточно существование такой последовательности $t_k \rightarrow 0$, что

$$\|x\|_{M(\varphi)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi(t_k)} \int_0^{t_k} x^*(t) dt.$$

Приведенная выше теорема 1 говорит о неустойчивости множества $\mathcal{O}(E)$ относительно эквивалентных г.и.-преобразований нормы. Однако множество $\mathcal{O}(E)$ устойчиво в другом смысле.

Теорема 4. Пусть E — несепарабельное г.и.-пространство, содержащее ортогональные элементы, $x^* = x \in \mathcal{O}(E)$. Если 0 — точка плотности измеримого множества $e \subset [0, 1]$, то $x \chi_e \in \mathcal{O}(E)$.

Предположение о том, что 0 есть точка плотности множества $e \subset [0, 1]$, в теореме 4 существенно. Тем не менее, справедлива

Теорема 5. Пусть $\varphi \in \Omega$ удовлетворяет дополнительному условию

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(2t)/\varphi(t) = 1$$

и $\varepsilon > 0$. Тогда существуют такие $x = x^* \in \mathcal{O}(M(\varphi))$ и множество $e \subset [0, 1]$, что внешняя плотность e в 0 меньше ε и $x \chi_e \in \mathcal{O}(M(\varphi))$.

Если несепарабельное г.и.-пространство E содержит ортогональные элементы, то для любого $\varepsilon > 0$ существует подпространство E , порожденное дизъюнктивными функциями, которое $(1 + \varepsilon)$ -изоморфно пространству c_0 .

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа первого автора выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного

математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2020-1488/1. Работа второго автора поддержана грантом РФФИ 18–01–00414–а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces II. Function spaces. V. 97. В.: Springer-Verlag, 1979. 246 p.
2. *Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978. 400 с.
3. *Красносельский М.А., Рутецкий Я.Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958. 271 с.
4. *Rao M.M., Ren Z.D.* Theory of Orlicz spaces, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. V. 146. N.Y.: Marcel Dekker Inc., 1991. 445 p.
5. *Асташкин С.В., Семёнов Е.М.* Об одном свойстве симметричных пространств, второе ассоциированное пространство к которым не separable // Матем. заметки. 2020. Т. 107. № 1. С. 11–22.

ORTOGONAL ELEMENTS IN NON-SEPARABLE REARRANGEMENT INVARIANT SPACES

S. V. Astashkin^a and E. M. Semenov^b

^a *Samara National Research University, Samara, Russian Federation*

^b *Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS S.V. Kislyakov

Let E be a non-separable rearrangement invariant space and let E_0 denote the closure of the set of all bounded functions in E . We study elements of E orthogonal to the subspace E_0 , i.e., elements $x \in E$ such that $\|x\|_E \leq \|x + y\|_E$ for any $y \in E_0$.

Keywords: non-separable Banach space, rearrangement invariant space, Orlicz space, Marcinkiewicz space, orthogonal elements