ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 494, с. 21–25

МАТЕМАТИКА

УДК 517.518+517.54

ОПЕРАТОРЫ КОМПОЗИЦИИ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА И ТЕОРИЯ $\mathcal{Q}_p$-ГОМЕОМОРФИЗМОВ

С. К. Водопьянов[1,*]

Представлено академиком РАН Ю. Г. Решетняком 18.05.2020 г.
Поступило 18.05.2020 г.
После доработки 18.05.2020 г.
Принято к публикации 01.07.2020 г.

Определяется шкала $\mathcal{Q}_p$, $n-1 < p < \infty$, гомеоморфизмов пространственных областей в $\mathbb{R}^n$, геометрическое описание которых обусловленно контролем поведения p-емкости конденсаторов в образе через весовую p-емкость конденсаторов в прообразе. При $p = n$ класс отображений $\mathcal{Q}_n$ содержит класс, так называемых, Q-гомеоморфизмов, активно исследуемых в течение последних 25 лет. Получено эквивалентное функциональное и аналитическое описание классов $\mathcal{Q}_p$, в основании которого лежит задача о свойствах оператора композиции весового пространства Соболева в невесовое, индуцированного отображением, обратным к некоторому из класса $\mathcal{Q}_p$.

Ключевые слова: пространство Соболева, оператор композиции, квазиконформный анализ, емкостная оценка

DOI: 10.31857/S268695432005046X

Настоящая работа посвящена описанию гомеоморфизмов контролируемым образом изменяющих емкость конденсаторов, т.е. таких гомеоморфизмов, когда емкость конденсатора в образе может быть оценена весовой емкостью конденсатора в прообразе. Другими словами, с одной стороны, мы находим аналитическое описание гомеоморфизмов $\varphi\colon D \to D'$, индуцирующих ограниченный оператор композиции $\varphi^*\colon L^1_p(D';\omega) \cap \mathrm{Lip}_l(D') \to L^1_p(D)$, $1 \le p < \infty$, а с другой – при $1 < p < \infty$ устанавливаем его геометрическое описание через неравенства на емкости подходящих конденсаторов. Принципиально новым сравнительно с предыдущими работами является вызванное спецификой весового пространства Соболева получение интегральной оценки для функции искажения из соотношений на емкости конденсаторов. Мы также находим аналитическое свойство гомеоморфизма, обратного к $\varphi\colon D \to D'$. Эта часть работы основана на предыдущих работах автора [1–4], в которых исследованы классические пространства Соболева. В качестве приложения мы приводим аналитическое описание так называемых Q-гомеоморфизмов, активно исследуемых в работах ряда авторов в последние десятилетия (см. монографию [5] и библиографию к ней), а затем – применения функционального подхода к некоторым задачам теории Q-гомеоморфизмов.

Фиксируем две области $D, D' \subset \mathbb{R}^n$. Локально-суммируемая функция $\omega\colon D' \to \mathbb{R}$ называется весовой, если $0 < \omega(y) < \infty$ для п.вс. $y \in D'$.

Напомним, что функция $u\colon D' \to \mathbb{R}$ принадлежит весовому классу Соболева $L^1_p(D';\omega)$, $p \in [1,\infty)$, если u локально суммируема в D', а обобщенные производные $\dfrac{\partial u}{\partial y_j}$ принадлежат $L_p(D';\omega)$ для любого $j = 1,\dots,n$. (Определение обобщенных производных предполагает, что $\dfrac{\partial u}{dy_j} \in L_{1,\mathrm{loc}}(D')$.) Полунорма функции $u \in L^1_p(D';\omega)$ равна

$$\|u \mid L^1_p(D';\omega)\| = \left(\int\limits_{D'} |\nabla u|^p(y)\omega(y)\,dy\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (1)$$

Если в (1) вместо $u\colon D' \to R$ рассмотреть функцию $v\colon D \to \mathbb{R}$ и вес, тождественно равный единице, то получится полунорма в классическом пространстве Соболева $L^1_p(D)$.

[1] *Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия*
*E-mail: vodopis@math.nsc.ru

Отображение $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ принадлежит классу Соболева $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$, если и $\varphi_j(x) \in L_{p,\,\mathrm{loc}}(D)$, и обобщенные производные $\dfrac{\partial \varphi_j}{dx_i} \in L_{p,\mathrm{loc}}(D)$ для любых $j, i = 1, \ldots, n$.

Определение 1. Конденсатором в области $D \subset \mathbb{R}^n$ называется пара $E = (F, U)$, где F – связный компакт (континуум) в U, а $U \Subset D$ – открытое связное компактно вложенное в D множество. Непрерывная функция u: $D \to \mathbb{R}$ класса $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D)$ называется допустимой для конденсатора $E = (F, U)$, если $u \equiv 1$ на F и $u \equiv 0$ вне U. Совокупность допустимых для конденсатора $E = (F, U)$ функций будем обозначать символом $\mathcal{A}(E)$.

Емкость конденсатора $E = (F, U)$ в пространстве $L^1_p(D)$ определим как величину

$$\operatorname{cap}(E; L^1_p(D)) = \inf_{u \in \mathcal{A}(E; L^1_p(D))} \|u \mid L^1_p(D)\|^p,$$

где инфимум берется по семейству $\mathcal{A}(E)$ всех допустимых для конденсатора $E = (F, U)$ функций класса $L^1_p(D)$. Таким образом, $\mathcal{A}(E; L^1_p(D)) = \mathcal{A}(E) \cap L^1_p(D)$.

Определение весовой емкости конденсатора $E = (F, U)$ в пространстве $L^1_p(D'; \omega)$, расположенного в области D', отличается от вышеприведенного лишь некоторым сужением класса допустимых для емкости функций:

$$\operatorname{cap}(E; L^1_p(D')) = \inf_{u \in \mathcal{A}(E; \mathrm{Lip}_l(D'))} \|u\|^p_{L^1_p(D';\omega)},$$

где $\mathcal{A}(E; \mathrm{Lip}_l(D')) = \mathcal{A}(E) \cap \mathrm{Lip}_l(D')$. Здесь и далее $\mathrm{Lip}_l(D') = W^1_{\infty,\mathrm{loc}}(D') \cap C(D')$.

Сформулируем теперь основной результат настоящей работы.

Теорема 1. *Пусть заданы гомеоморфизм* φ: $D \to D'$ *областей* $D, D' \subset \mathbb{R}^n$ *и весовая локально-суммируемая функция* ω: $D' \to (0, \infty)$. *Следующие условия эквивалентны*:

1) *оператор композиции* φ^*: $L^1_p(D'; \omega) \cap \mathrm{Lip}_l(D') \to L^1_p(D)$, $1 \le p < \infty$, *действующий по правилу* $(\varphi^* u)(x) = u(\varphi(x))$, *ограничен*;

2) *для любого конденсатора* $E = (F, U)$ *в* D' *с прообразом* $\varphi^{-1}(E) = (\varphi^{-1}(F), \varphi^{-1}(U))$ *в* D *выполняется неравенство*

$$\operatorname{cap}^{\frac{1}{p}}(\varphi^{-1}(E); L^1_q(D)) \le K_p \operatorname{cap}^{\frac{1}{p}}(E; L^1_p(D'; \omega)), \quad 1 < p < \infty; \tag{2}$$

3) *гомеоморфизм* φ: $D \to D'$ *принадлежит классу* $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$, $1 \le p < \infty$, *и для п. вс.* $x \in D$ *справедливо неравенство*

$$|D\varphi(x)| \le K^{1,\omega}_{p,p}(\varphi) |\det D\varphi(x)|^{\frac{1}{p}} \omega^{\frac{1}{p}}(\varphi(x)), \tag{3}$$

где $K^{1,\omega}_{p,p}(\varphi)$ – *наименьшая постоянная, с которой выполняется неравенство* (3).

Кроме того,

$$2^{-\frac{n}{p}} \left(\frac{3n}{2}\right)^{-1} K^{1,\omega}_{p,p}(\varphi) \le \|\varphi^*\| \le K^{1,\omega}_{p,p}(\varphi) \le 3 \cdot 2^{\frac{n-p}{p}} n K_p.$$

Здесь $D\varphi(x) = \left(\dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x)\right)$ – матрица Якоби отображения φ в точке $x \in D$, $|D\varphi(x)|$ – ее евклидова операторная норма, а $\det D\varphi(x)$ – ее определитель (якобиан).

При $\omega \equiv 1$ поточечное неравенство

$$|D\varphi(x)| \le K_p |\det D\varphi(x)|^{\frac{1}{p}} \tag{4}$$

теоремы получено В.Г. Мазьей в [6] (автором в [1–3]) при описании C^1-диффеоморфизмов (гомеоморфизмов) φ: $D \to D'$ евклидовых областей D, $D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, порождающих ограниченный оператор композиции φ^*: $L^1_p(D') \to L^1_p(D)$, $1 \le p < \infty$. В работах [2, 3] установлена также эквивалентность второго условия теоремы (для более широкого набора конденсаторов) оставшимся двум.

Замечание 1. При $p \in [1, n)$ условие (4) записано в работе [1, теорема 8.7] в эквивалентной форме: $|D\varphi(x)| \le K_p (J_{\varphi^{-1}}(\varphi(x)))^{-\frac{1}{p}}$, где

$$D' \ni y \mapsto J_{\varphi^{-1}}(y) = \lim_{r \to 0} \frac{|\varphi^{-1}(B(y, r))|}{|B(y, r)|}$$

есть производная функции множества $\mathcal{B}(D') \ni A \mapsto |\varphi^{-1}(A)|$, определенной на σ-алгебре $\mathcal{B}(D')$ борелевских множеств области D' (см. [7]).

Существенное отличие результатов работ [6] и [1–3] проявляется с учетом свойств исходного отображения φ. В работе [6] φ – диффеоморфизм, и поэтому его якобиан отличен от нуля во всех точках области определения. В работе [1] φ – гомеоморфизм класса Соболева, и мера множества $Z = \{x \in D: \det D\varphi(x) = 0\}$ нулей его якобиана может быть положительной (см. примеры в [8]). Более того, из условий (3) и (4) вытекает, что $D\varphi(x) = 0$ п.вс. на множестве $Z = \{x \in D: \det D\varphi(x) = 0\}$. Отображения с таким свойством называют отображениями с конечным искажением.

В работе [1, теорема 8.7] показано также, что распространение по непрерывности оператора $\varphi^*\colon L^1_p(D')\cap \mathrm{Lip}_l(D')\to L^1_p(D)$, $1\le p<\infty$, на пространство $L^1_p(D')$ совпадает с оператором композиции в следующем смысле: $L^1_p(D')\ni u\mapsto \varphi^*u = u\circ\varphi$, где u — непрерывный представитель $u\in L^1_p(D')$ при $p\in(n,\infty)$, и $\varphi^* u = u\circ\varphi$, где u — произвольный представитель $u\in L^1_p(D')$ при $p\in[1,n]$.

Упомянутые результаты работ [1–3] в эквивалентной форме представлены в [9].

Принципиально новым в доказательстве теоремы 1 является импликация 2 $\Rightarrow$ 3. Переход от емкостного неравенства (2) к соболевским отображениям основан на двух леммах.

Лемма 1. *Пусть заданы гомеоморфизм* $\varphi\colon D\to D'$ *областей* $D, D'\subset\mathbb{R}^n$ *и весовая локально-суммируемая функция* $\omega\colon D'\to(0,\infty)$. *Если для гомеоморфизма* $\varphi\colon D\to D'$ *выполнены емкостные соотношения* (2) *с некоторой постоянной* K_p, *то* $\varphi\in W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$.

Наша следующая цель — показать, что $\varphi\in W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$ имеет конечное искажение.

Лемма 2. *Пусть заданы гомеоморфизм* $\varphi\colon D\to D'$ *областей* $D, D'\subset\mathbb{R}^n$, *и весовая локально-суммируемая функция* $\omega\colon D'\to(0,\infty)$. *Если для гомеоморфизма* $\varphi\colon D\to D'$ *выполнены соотношения* (2), *то*

1) *функция множества*

$$\mathcal{B}(\Omega)\ni T\mapsto \Lambda(T)=\int\limits_{\varphi^{-1}(T)}|D\varphi(x)|^p dx,$$

определенная на σ-*алгебре борелевских множеств* $\mathcal{B}(\Omega)$ *открытого множества* $\Omega\Subset D'$, *удовлетворяет оценке*

$$\Lambda(T)\le n^p\left(\frac{3}{2}\right)^p MK_p^p\omega(T),\quad 1\le p<\infty,$$

где величина M *зависит только от размерности* n, *а* $\omega(T)=\int\limits_T\omega(y)dy$ — *весовая мера множества* T;

2) *функция множества* $\mathcal{B}(D')\ni T\mapsto\Lambda(T)$ *абсолютно непрерывна*;

3) *отображение* $\varphi\colon D\to D'$ *имеет конечное искажение*;

4) *для п.вс. точек* $y\in D'$ *производная функции множества* $\Lambda(T)$ *равна*

$$\Lambda'(y)=\lim_{\delta\to0,\, y\in B_\delta}\frac{\Lambda(B_\delta)}{|B_\delta|}=$$
$$=\begin{cases}\dfrac{|D\varphi(\varphi^{-1}(y))|^p}{|\det D\varphi(\varphi^{-1}(y))|}, & \text{если } y\in D'\setminus(Z'\cup\Sigma'),\\ 0 & \text{иначе.}\end{cases}$$

Здесь

$$Z'=\varphi(\Sigma),\ \Sigma'=\varphi(Z),$$

где $Z=\{x\in D\mid \det D\varphi(x)=0\}$, а Σ — сингулярное множество меры нуль, вне которого φ обладает $\mathcal{N}$-свойством Лузина.

Свойства обратного к φ отображения описаны в следующем утверждении.

Теорема 2. *Пусть даны области* $D, D'\subset\mathbb{R}^n$, $n\ge2$, *и весовая локально суммируемая функция* $\omega\colon D'\to(0,\infty)$. *Пусть еще гомеоморфизм* $\varphi\colon D\to D'$ *обладает одним из следующих свойств*:

I. $\varphi\in W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$, $n-1<p<\infty$, *и для п.вс.* $x\in D$ *справедливо неравенство*

$$|D\varphi(x)|\le K^{1,\omega}_{p,p}(\varphi)|\det D\varphi(x)|^{\frac1p}\omega^{\frac1p}(\varphi(x)),\tag{5}$$

где $K^{1,\omega}_{p,p}(\varphi)$ — *наименьшая постоянная, с которой выполняется неравенство* (5); *или*

II. $\varphi\in W^1_{n-1,\mathrm{loc}}(D)$, *отображение* φ *имеет конечное коискажение*[1]: $\mathrm{adj}Df(x)=0$ *п.вс. на множестве* $Z=\{x\in D\,|\det D\varphi(x)=0\}$, *и для п.вс.* $x\in D$ *справедливо неравенство*

$$|\mathrm{adj}D\varphi(x)|\le \mathcal{K}^{1,\omega}_{p,p}(\varphi)|\det D\varphi(x)|^{\frac{n-1}{p}}\omega^{\frac{n-1}{p}}(\varphi(x)),\tag{6}$$

$n-1<p<\infty$, *где* $\mathcal{K}^{1,\omega}_{p,p}(\varphi)$ — *наименьшая постоянная, с которой выполняется неравенство* (6).

Тогда

1) $f=\varphi^{-1}\in W^1_{1,\mathrm{loc}}(D')$, *отображение f имеет конечное искажение*: $Df(y)=0$ *п.в. на множестве* $Z'=\{y\in D'|\det Df(y)=0\}$, *и для п.вс.* $y\in D'$ *справедливо неравенство*

$$\theta(y)^{\frac{1}{p'}}|Df(y)|\le K^{\theta,1}_{p',p'}(f)|\det Df(y)|^{\frac{1}{p'}},\tag{7}$$

где $\theta(y)=\omega^{-\frac{n-1}{p-(n-1)}}(y)$ — *измеримая функция*, $p'=\dfrac{p}{p-(n-1)}$, *а* $K^{\theta,1}_{p',p'}(f)$ — *наименьшая постоянная, с которой выполняется неравенство* (7),

[1] Здесь $\mathrm{adj}A=\{A_{ji}\}$ — матрица, присоединенная к матрице $A=\{a_{ij}\}$, $i,j=1,\dots,n$: A_{ji} – это алгебраическое дополнение к элементу a_{ij} матрицы A.

2) *гомеоморфизм f индуцирует по правилу замены переменной ограниченный оператор*

$$f^*: L^1_{p'}(D) \cap \mathrm{Lip}_l(D) \to L^1_{p'}(D';\theta);$$

3) *гомеоморфизм f дифференцируем п.в. в области* D';

4) *для любого открытого множества* $U \subset D'$ *справедлива оценка*

$$\int\limits_U |Df(y)|dy \le c_1 \cdot (K^{1,\omega}_{p,p}(\varphi))^{n-1} \cdot |f(U)|^{\frac{p-(n-1)}{p}} \cdot \omega(U)^{\frac{n-1}{p}}$$

с постоянной c_1, *зависящей от размерности n и p.*

Более того, справедливы соотношения

$$\beta_{p,p} K^{\theta,1}_{p',p'}(f) \le \|f^*\| \le K^{\theta,1}_{p',p'}(f) =$$

$$= \mathcal{K}^{1,\omega}_{p,p}(\varphi) \le \|K^{1,\omega}_{p,p}(\cdot,\varphi) \mid L_\infty(D)\|^{n-1}$$

с некоторой постоянной $\beta_{p,p}$.

Введем в рассмотрение следующий специальный класс отображений.

Определение 2. Скажем, что гомеоморфизм $f: D' \to D$ принадлежит классу $\mathcal{Q}_p(D',\omega)$, где $1 < p < \infty$, а $\omega \in L_{1,\mathrm{loc}}(D')$ – весовая функция, если существует постоянная K_p такая, что для всякого конденсатора $E = (F, U)$, расположенного в D', и образа $f(E) = (f(F), f(U))$, расположенного в D, выполняется неравенство

$$\mathrm{cap}^{\frac{1}{p}}(f(E); L^1_p(D)) \le K_p \mathrm{cap}^{\frac{1}{p}}_p(E; L^1_p(D';\omega)). \qquad (8)$$

Результаты, сформулированные выше, позволяют получить полное аналитическое описание класса $\mathcal{Q}_p(D)$.

Теорема 3. *Гомеоморфизм* $f: D' \to D$ *принадлежит классу* $\mathcal{Q}_p(D',\omega)$, $1 < p < \infty$, *тогда и только тогда, когда обратный гомеоморфизм* $\varphi = f^{-1}$: $D \to D'$ *обладает одним из следующих свойств* 1) *или* 2):

1) *оператор композиции*

$$\varphi^*: L^1_p(D';\omega) \cap \mathrm{Lip}_l(D') \to L^1_p(D), 1 < p < \infty,$$

ограничен;

2) *гомеоморфизм* $\varphi: D \to D'$ *принадлежит классу* $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$, $1 < p < \infty$, *и для п.вс.* $x \in D$ *справедливо неравенство* (3).

Более того, при $n - 1 < p < \infty$ *гомеоморфизм f обладает свойствами* 1)–4) *теоремы* 2.

Доказательство. Нетрудно заметить, что условие $f \in \mathcal{Q}_p(D',\omega)$, $1 < p < \infty$, для гомеоморфизма $f: D' \to D$ эквивалентно выполнению условия (2) в теореме 1 для обратного гомеоморфизма $\varphi = f^{-1}$: $D \to D'$. Следовательно, для отображения φ: $D \to D'$ выполнены утверждения 1) и 2) теоремы 1 (а вместе с ними условия и утверждения теоремы 2). Так как приведенные рассуждения обратимы, теорема 3 доказана.

Следствие 1. *Если соотношение* (8) *выполняется для конденсаторов указанного в определении* 1 *вида, то оно выполняется и для произвольных в области* D' *конденсаторов* $E = (F_1, F_0)$ *с постоянной* $3n \cdot 2^{\frac{n-p}{p}} K_p$ *вместо* K_p.

В случае $p = n$ класс $\mathcal{Q}_n$-гомеоморфизмов содержит семейство так называемых Q-гомеоморфизмов (см. [5]). Пусть D', D – области в $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, и пусть Q: $D' \to [1,\infty)$ – функция класса $L_{1,\mathrm{loc}}$. Гомеоморфизм f: $D' \to D$ называется Q-гомеоморфизмом, если

$$M_n(f\Gamma) \le \int\limits_{D'} Q(x) \cdot \rho^n(x)dx \qquad (9)$$

для каждого семейства Γ путей в D' и любой допустимой функции ρ для Γ.

Очевидно, что семейства кривых Γ можно специализировать, например, рассматривать только такие семейства Γ, кривые которых начинаются в одном компактном множестве, а заканчиваются в другом. То есть для данного конденсатора $E = (F, U)$ в области D' кривая $\gamma: [a,b] \to \overline{U}$ принадлежит семейству Γ тогда и только тогда, когда $\gamma(a) \in F$, а $\gamma(b) \in \partial U$. Для таких семейств условие (9) можно интерпретировать на языке емкости:

$$\begin{aligned} &\mathrm{cap}(f(E); L^1_n(D)) = M_n(f\Gamma) \le \\ &\le \inf_\rho \int\limits_{D'} Q(x) \cdot \rho^n(x)dx \le \mathrm{cap}(E; L^1_n(D';Q)). \end{aligned} \qquad (10)$$

Здесь равенство между модулем и емкостью обеспечено теоремой работы [10], поскольку $f(\Gamma)$ – семейство всех кривых с концевыми точками во множествах $f(F_1)$ и $f(F_0)$. Правое неравенство вытекает из наблюдения, что норма градиента $|\nabla u(x)|$ любой функции, допустимой для емкости (E; $L^1_n(D'; Q)$), будет допустимой функцией для весового модуля $\inf\limits_\rho \int\limits_{D'} Q(x) \cdot \rho^n(x)dx$ (см. первую часть доказательства теоремы 5.5 из [10], где такое рассуждение приводится для безвесовых величин).

Следовательно, всякий Q-гомеоморфизм f: $D' \to D$ удовлетворяет более слабому соотношению (8), и поэтому для Q-гомеоморфизма выполняются все утверждения сформулированных в работе теорем. Например, результаты монографии [5, Ch. 4, § 4.3, 4.4] – это утверждения 1 и 3 теоремы 2 при $p = n$ (доказательство ACL новое).

Заметим, что семейство Q-гомеоморфизмов в случае $Q \equiv 1$ совпадает с классом квазиконформных отображений [11–14].

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации номер 075-15-2019-1613.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Водопьянов С.К.* Формула Тейлора и функциональные пространства. Уч. пособие. Новосибирск: НГУ, 1988.
2. *Водопьянов С.К.* // Сиб. матем. журн. 1989. Т. 30. № 5. С. 25–41.
3. *Водопьянов С.К.* Геометрические аспекты пространств обобщенно-дифференцируемых функций. Автореферат дисс. ... докт. физ.-мат. наук. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 1991.
4. *Водопьянов С.К.* // Матем. сб. 2012. Т. 203. № 10. С. 1383–1410.
5. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory. N.Y.: Springer-Verlag, 2008.
6. *Мазья В.Г.* Классы множеств и теоремы вложения функциональных классов. Некоторые проблемы теории эллиптических операторов. Автореферат дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Л: Изд-во Ленингр. ун-та, 1961.
7. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987.
8. *Пономарев С.П.* // Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 3. С. 411–418.
9. *Gol'dshtein V., Gurov L., Romanov A.* // Israel J. Math. 1995. V. 91. P. 31–90.
10. *Hesse J.* // Ark. Mat. 1975. V. 13. P. 131–144.
11. *Решетняк Ю.Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, Сиб. отделение, 1982.
12. *Mostow G.D.* // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 1968. V. 34. № 1. P. 53–104.
13. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings. B.: Springer, 1971. Lecture Notes in Math., 229.
14. *Gehring F.W.* Lipschitz mappings and the p-capacity of rings in n-space / In: Advances in the theory of Riemann surfaces (Proc. Conf., Stony Brook, N.Y., 1969). Princeton (N.J.): Princeton Univ. Press, 1971. P. 175–193.

COMPOSITION OPERATORS ON WEIGHTED SOBOLEV SPACES AND THE THEORY $\mathfrak{Q}_p$-HOMEOMORPHISMS

S. K. Vodopyanov[a]

[a]*Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS Yu. G. Reshetnyak

We define the scale $\mathfrak{Q}_p$, $n-1 < p < \infty$, of homeomorphisms of spatial domains in $\mathbb{R}^n$, geometric description of which is due to the control of the behavior of the p-capacity of condenders in the image through the weighted p-capacity of the condenders in the pre-image. For $p = n$ the class $\mathfrak{Q}_n$ of mappings contains the class of so-called Q-homeomorphisms actively studied over the past 25 years. An equivalent functional and analytic description of these classes $\mathfrak{Q}_p$ is obtained. It is based on the problem of the properties of the composition operator of a weighted Sobolev space into non-weighted space, induced by a map inverse to some of the class $\mathfrak{Q}_p$.

Keywords: Sobolev space, composition operator, quasiconformal analysis, capacity estimate