ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 494, с. 60–63

МАТЕМАТИКА

УДК 517.51+517.98

БИЛИНЕЙНЫЕ ВЕСОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА С ДВУМЕРНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

 Член-корреспондент РАН В. Д. Степанов[1,*], Г. Э. Шамбилова[2,]**

Поступило 27.07.2020 г.
После доработки 27.07.2020 г.
Принято к публикации 20.08.2020 г.

Дана характеризация билинейного неравенства с двумерными прямоугольными операторами Харди в весовых пространствах Лебега.

Ключевые слова: весовое пространство Лебега, двумерный оператор Харди, билинейное неравенство

DOI: 10.31857/S2686954320050434

Пусть $\mathfrak{M}$ – множество всех измеримых по Лебегу функций на $\mathbb{R}_+^2 := (0,\infty)^2$, $\mathfrak{M}^+ \subset \mathfrak{M}$ – конус всех неотрицательных функций.

Пусть $1 < q, p_1, p_2 < \infty$ и $v_1, v_2, u \in \mathfrak{M}^+$. Рассматривается задача о характеризации билинейного неравенства

$$\left(\int_{\mathbb{R}_+^2} (I_2 f)^q (I_2 g)^q u\right)^{\frac{1}{q}} \le \le C\left(\int_{\mathbb{R}_+^2} f^{p_1} v_1\right)^{\frac{1}{p_1}}\left(\int_{\mathbb{R}_+^2} g^{p_2} v_2\right)^{\frac{1}{p_2}}, \quad f, g \in \mathfrak{M}^+, \tag{1}$$

где

$$I_2 f(x_1, x_2) := \int_0^{x_1}\int_0^{x_2} f(t_1, t_2)\, dt_1 dt_2 \tag{2}$$

есть двумерный прямоугольный оператор Харди.

Характеризация билинейных весовых неравенств с одномерными операторами изучалась в [1, 2] как дополнение и иллюстрация некоторых результатов о мультилинейных неравенствах [3, 4]. Билинейные неравенства на полуоси с более общими операторами Вольтерра $R_i f(x) = \int_0^x k_i(x, y) f(y) dy$, $i = 1, 2$, характеризованы в [5, 6], а с операторами Харди–Стеклова в [7, 8].

В работах [9–12] дана полная характеризация многомерных билинейных весовых неравенств вида

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{B(|x|)} f\right)^q\left(\int_{B(|x|)} g\right)^q u(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \le \le C\left(\int_{\mathbb{R}^n} f^{p_1} v_1\right)^{\frac{1}{p_1}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} g^{p_2} v_2\right)^{\frac{1}{p_2}}, \quad f, g \in \mathfrak{M}^+,$$

где $B(|x|)$ – шар радиуса $|x|$ с центром в начале координат.

Для характеризации билинейных весовых неравенств (1) мы будем использовать известные критерии для двумерных весовых неравенств Харди

$$\left(\int_{\mathbb{R}_+^2} (I_2 f)^q u\right)^{\frac{1}{q}} \le C\left(\int_{\mathbb{R}_+^2} f^p v\right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in \mathfrak{M}^+, \tag{3}$$

и аналогичные результаты с двойственным оператором

$$I_2^* g(y_1, y_2) := \int_{y_1}^{\infty}\int_{y_2}^{\infty} g(s_1, s_2)\, ds_1 ds_2, \tag{4}$$

которые содержатся в [13–15].

В отличие от одномерной теории неравенство (3) исследовано значительно меньше. Общий результат, т.е. двусторонняя оценка наилучшей константы C интегральным функционалом, представ-

[1] *Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия*
[2] *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия*
**E-mail: stepanov@mi-ras.ru*
***E-mail: shambilova@mail.ru*

лен в работе Е. Сойера [13] лишь при $1 < p \le q < \infty$. В работах [14, 15] представлены критерии при $1 < p \le q < \infty$ и $1 < q < p < \infty$, но при условии, что одна из двумерных весовых функций факторизуется, т.е. берется в виде произведения двух одномерных. Поэтому наши основные результаты (разд. 1), характеризующие неравенство (1), имеют соответствующие ограничения.

Всюду в работе произведения вида $0 \cdot \infty$ полагаются равными 0. Соотношение $A \lesssim B$ означает $A \le cB$ с константой c, зависящей только от параметров суммирования; $A \approx B$ равносильно $A \lesssim B \lesssim A$. Если $1 < p < \infty$, то $p' := \frac{p}{p-1}$. При $1 < q < p < \infty$ полагаем $r := \frac{pq}{p-q}$, χ_Ω обозначает характеристическую функцию (индикатор) множества Ω.

1. БИЛИНЕЙНЫЕ ВЕСОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Характеризация неравенств (1) существенно зависит от соотношений между параметрами суммирования $1 < p_1,\ p_2,\ q < \infty$. Выделим основные зоны.

I. $1 < \max(p_1, p_2) \le q < \infty$.

II. $1 < \min(p_1, p_2) \le q < \max(p_1, p_2) < \infty$.

III. $1 < q < \min(p_1, p_2)$.

З о н а I. В этом случае мы находим точный критерий выполнения неравенства (1) в случае, когда одна из весовых функций v_1 или v_2 факторизуется. Таким образом, с учетом замены в неравенстве (1) одного или обоих операторов I_2 на I_2^*, возникает восемь вариантов. Мы дадим описание одного из них, остальные – аналогично.

Пусть $v_1(t_1,t_2) = v_{11}(t_1)v_{12}(t_2)$, $\sigma_{1i} := v_{1i}^{1-p'}$, $i = 1, 2$,

$$V_{1i}(t_i) := \int_0^{t_i} \sigma_{1i} =: I\sigma_{1i}, \quad i = 1, 2.$$

Т е о р е м а 1. *Пусть* $1 < \max(p_1, p_2) < q < \infty$ *и* $v_1 = v_{11}v_{12}$. *Тогда наилучшая константа* C *в неравенстве* (1) *допускает оценку* $C \approx \mathcal{A}_1$,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &:= \sup_{x,y>0}\left[V_{11}(x)V_{12}(y)\right]^{\frac{1}{p_1}} \times \\ &\times \left(D_1(x,y) + D_2(x,y) + D_3(x,y)\right),\end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned}D_1(x,y) &:= \sup_{t_1,t_2>0}[I_2^*(\chi_{(x,\infty)\times(y,\infty)}u)(t_1,t_2)]^{\frac{1}{q}} \times \\ &\times\left[I_2\sigma_2(t_1,t_2)\right]^{\frac{1}{p'}} < \infty,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_2(x,y) &:= \sup_{t_1,t_2>0}\left(\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}(I_2\sigma_2)^q\chi_{(x,\infty)\times(y,\infty)}u\right)^{\frac{1}{q}} \times \\ &\times\left[I_2\sigma_2(t_1,t_2)\right]^{-\frac{1}{p}} < \infty,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_3(x,y) &:= \sup_{t_1,t_2>0}\left(\int_{t_1}^{\infty}\int_{t_2}^{\infty}(I_2^*(\chi_{(x,\infty)\times(y,\infty)}u))^{p'}\sigma_2\right)^{\frac{1}{p'}} \times \\ &\times[I_2^*(\chi_{(x,\infty)\times(y,\infty)}u)(t_1,t_2)]^{-\frac{1}{q'}} < \infty.\end{aligned}$$

З а м е ч а н и е. Если второй вес также факторизован, т.е.

$$v_2(t_1,t_2) = v_{21}(t_1)v_{22}(t_2), \quad \sigma_{2i} := v_{2i}^{1-p'}, \quad i = 1,2,$$

то выражение для константы (5) упрощается:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &:= \sup_{x,y>0}[I_2^*u(x,y)]^{\frac{1}{q}} \times \\ &\times[V_{11}(x)V_{12}(y)]^{\frac{1}{p_1'}}[V_{21}(x)V_{22}(y)]^{\frac{1}{p_2'}},\end{aligned} \tag{6}$$

где

$$V_{2i}(t_i) := \int_0^{t_i}\sigma_{2i} =: I\sigma_{2i}, \quad i = 1,2.$$

З о н а II. Будем считать, что обе весовые функции v_1 и v_2 факторизованы, т.е. $v_1 = v_{11}v_{12}$, $v_2 = v_{21}v_{22}$. Тогда имеет место

Т е о р е м а 2. *Пусть* $1 < \min(p_1, p_2) \le q < \max(p_1, p_2) < \infty$ *и* $\frac{1}{r_i} := \frac{1}{q} - \frac{1}{p_i}$. *Тогда* $C \approx \mathcal{A}_2$, *где*

а) $1 < p_1 \le q < p_2 < \infty$,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_2 &:= \sup_{x,y>0}[V_{11}(x)V_{12}(y)]^{\frac{1}{p_1'}} \times \\ &\times\left(\int_x^\infty\int_y^\infty[I_2^*u]^{\frac{r_2}{q}}[V_{21}V_{22}]^{\frac{r_2}{q'}}dV_{21}dV_{22}\right)^{\frac{1}{r_2}},\end{aligned}$$

б) $1 < p_2 \le q < p_1 < \infty$,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_2 &:= \sup_{x,y>0}[V_{21}(x)V_{22}(y)]^{\frac{1}{p_2'}} \times \\ &\times\left(\int_x^\infty\int_y^\infty[I_2^*u]^{\frac{r_1}{q}}[V_{12}V_{11}]^{\frac{r_1}{q'}}dV_{11}dV_{12}\right)^{\frac{1}{r_1}}.\end{aligned}$$

З о н а III. В этой части мы предполагаем, что все три веса факторизованы, т.е. $u(t_1, t_2) = u_1(t_1)u_2(t_2)$, и аналогично для v_1, v_2. Обозначим

$$U(t_1, t_2) := I_2^* u(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{\infty} u_1 \int_{t_2}^{\infty} u_2 =: U_1(t_1)U_2(t_2).$$

Т е о р е м а 3. *Пусть* $1 < q < \min(p_1, p_2) < \infty$, *и* $\frac{1}{r_i} := \frac{1}{q} - \frac{1}{p_i}$, $i = 1, 2$. *Тогда* $C \approx \mathscr{A}_{3.1} + \mathscr{A}_{3.2} + \mathscr{A}_{3.3} + \mathscr{A}_{3.4}$.

а) *Если* $\frac{1}{q} \le \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$, *то*

$$\mathscr{A}_{3.1} := \sup_{x,y>0} [V_{11}(x)V_{12}(y)]^{\frac{1}{p_1'}} \times$$
$$\times \left(\int_x^{\infty}\int_y^{\infty} U^{\frac{r_2}{q}} [V_{21}V_{22}]^{\frac{r_2}{q'}} dV_{21} dV_{22} \right)^{\frac{1}{r_2}},$$

$$\mathscr{A}_{3.2} := \sup_{x,y>0} [V_{21}(x)V_{22}(y)]^{\frac{1}{p_2'}} \times$$
$$\times \left(\int_x^{\infty}\int_y^{\infty} U^{\frac{r_1}{q}} [V_{12}V_{11}]^{\frac{r_1}{q'}} dV_{11} dV_{12} \right)^{\frac{1}{r_1}},$$

$$\mathscr{A}_{3.3} := \sup_{x,y>0} V_{21}^{\frac{1}{p_2'}}(x) V_{12}^{\frac{1}{p_1'}}(y) \times$$
$$\times \left(\int_x^{\infty} U_1^{\frac{r_1}{q}} V_{11}^{\frac{r_1}{q'}} dV_{11} \right)^{\frac{1}{r_1}} \left(\int_y^{\infty} U_2^{\frac{r_2}{q}} V_{22}^{\frac{r_2}{q'}} dV_{22} \right)^{\frac{1}{r_2}}.$$

$$\mathscr{A}_{3.4} := \sup_{x,y>0} V_{11}^{\frac{1}{p_1'}}(x) V_{22}^{\frac{1}{p_2'}}(y) \times$$
$$\times \left(\int_x^{\infty} U_1^{\frac{r_2}{q}} V_{21}^{\frac{r_2}{q'}} dV_{21} \right)^{\frac{1}{r_2}} \left(\int_y^{\infty} U_2^{\frac{r_1}{q}} V_{12}^{\frac{r_1}{q'}} dV_{12} \right)^{\frac{1}{r_1}}.$$

б) *Если* $\frac{1}{q} > \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$, $\frac{1}{s} := \frac{1}{q} - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}$, *то*

$$\mathscr{A}_{3.1} := \left(\int_{\mathbb{R}_+^2} \left(\int_x^{\infty}\int_y^{\infty} U^{\frac{r_2}{q}} [V_{21}V_{22}]^{\frac{r_2}{q'}} dV_{21} dV_{22} \right)^{\frac{s}{r_2}} [V_{11}(x)V_{12}(y)]^{\frac{s}{r_2}} dV_{11} dV_{12} \right)^{\frac{1}{s}}.$$

$$A_{3.2} := \left(\int_{\mathbb{R}_+^2} \left(\int_x^{\infty}\int_y^{\infty} U^{\frac{r_1}{q}} [V_{11}V_{12}]^{\frac{r_1}{q'}} dV_{11} dV_{12} \right)^{\frac{s}{r_1}} [V_{21}(x)V_{22}(y)]^{\frac{s}{r_1}} dV_{21} dV_{22} \right)^{\frac{1}{s}},$$

$$\mathscr{A}_{3.3}^s := \int_{\mathbb{R}_+^2} V_{21}^{\frac{s}{p_2'}}(x) V_{12}^{\frac{s}{r_2'}}(y) \left(\int_x^{\infty} U_1^{\frac{r_1}{q}} V_{11}^{\frac{r_1}{q'}} dV_{11} \right)^{\frac{s}{p2}} \left(\int_y^{\infty} U_2^{\frac{r_2}{q}} V_{22}^{\frac{r_2}{q'}} dV_{22} \right)^{\frac{s}{r_2}} U_1^{\frac{r_1}{q}}(x) V_{11}^{\frac{r_1}{q'}}(x) dV_{11}(x) dV_{12}(y),$$

$$\mathscr{A}_{3.4}^s := \int_{\mathbb{R}_+^2} V_{11}^{\frac{s}{r_2'}}(x) V_{22}^{\frac{s}{p_2'}}(y) \left(\int_x^{\infty} U_1^{\frac{r_2}{q}} V_{21}^{\frac{r_2}{q'}} dV_{21} \right)^{\frac{s}{r_2}} \left(\int_y^{\infty} U_2^{\frac{r_1}{q}} V_{12}^{\frac{r_1}{q'}} dV_{12} \right)^{\frac{s}{p_2}} U_2^{\frac{r_1}{q}}(y) V_{12}^{\frac{r_1}{q'}}(y) dV_{11}(x) dV_{12}(y).$$

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа первого автора (теоремы 1 и 2) выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 19–11–00087) в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН, работа второго автора (теорема 3) поддержана РФФИ (проект 19–01–00223).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aguilar Cañestro M.I., Ortega Salvador P., Ramírez Torreblanca C.* Weighted Bilinear Hardy Inequalities // J. Math. Anal. Appl. 2012. V. 387. № 1. P. 320–334.
2. *Křepela M.* Iterating Bilinear Hardy Inequalities // Proc. Edinb. Math. Soc. 2017. V. 60. P. 955–971.
3. *Cwikel M., Kerman R.* Positive Multilinear Operators Acting on Weighted L_p Spaces // J. Funct. Anal. 1992. V. 106. № 1. P. 130–144.
4. *Grafakos L., Torres R.H.* A Multilinear Schur Test and Multiplier Operators // J. Funct. Anal. 2001. V. 187. № 1. P. 1–24.
5. *Прохоров Д.В.* Об одном классе весовых неравенств, содержащих квазилинейные операторы // Тр. МИАН. 2016. Т. 293. С. 280–295.

6. *Степанов В.Д., Шамбилова Г.Э.* О билинейных весовых неравенствах с интегральными операторами Вольтерра // ДАН. 2019. Т. 486. № 4. С. 416–420.
7. *Джейн П., Канжилал С., Степанов В.Д., Ушакова Е.П.* О билинейных операторах Харди–Стеклова // ДАН. 2018. Т. 483. № 6. С. 602–605.
8. *Jain P., Kanjilal S., Stepanov V.D., Ushakova E.P.* Bilinear Hardy–Steklov Operators // Math. Notes. 2018. V. 104. № 6. P. 823–832.
9. *Степанов В.Д., Шамбилова Г.Э.* Многомерные билинейные неравенства Харди // ДАН. 2019. Т. 487. № 5. С. 496–498.
10. *Jain P., Kanjilal S., Persson L.-E.* Hardy-type Inequalities over Balls in $\mathbb{R}^N$ for Some Bilinear and Iterated Operators // J. Inequalities and Special Functions. 2019. V. 10. № 2. P. 35–48.
11. *Bigicli N., Mustafayev R.Ch., Ünver T.* Multidimensional Bilinear Hardy Ineualities // Azerbaijan J. Math. 2020. V. 10. № 1. P. 127–161.
12. *Степанов В.Д., Шамбилова Г.Э.* Многомерные билинейные неравенства Харди // Сиб. матем. журн. 2020. Т. 61. № 4. С. 913–931.
13. *Sawyer E.* Weighted inequalities for two–dimensional Hardy operator // Studia Math. 1985. V. 82. P. 1–16.
14. *Wedestig A.* Weighted Inequalities for the Sawyer Two-dimensional Hardy Operator and Its Limiting Geometric Mean Operator // J. Inequal. Appl. 2005. V. 4. P. 387–394.
15. *Persson L.-E., Ushakova E.P.* Some Multi–dimensional Hardy Type Integral Inequalities // J. Math. Inequal. 2007. V. 1. № 3. P. 301–319.

BILINEAR WEIGHTED INEQUALITIES FOR THE TWO-DIMENSIONAL OPERATORS

Corresponing Member of the RAS V. D. Stepanov[a] and G. E. Shambilova[b]

[a] *Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

[b] *Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation*

A characterization of two-dimensional rectangular Hardy operators in bilinear inequalities in weighted Lebesgue spaces is given.

Keywords: weighted Lebesgues space, two-dimensional Hardy operator, bilinear inequality