*ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 494, с. 53–55*

**МАТЕМАТИКА**

*УДК 517.957*

# ОБ ОТСУТСТВИИ ГЛОБАЛЬНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ШРЁДИНГЕРА

**© 2020 г. Ш. М. Насибов[1,*]**

Представлено академиком РАН В.П. Масловым 20.06.2020 г.
Поступило 22.06.2020 г.
После доработки 22.06.2020 г.
Принято к публикации 28.07.2020 г.

Исследуется вопрос об отсутствии глобальных периодических решений нелинейного эволюционного уравнения типа Шрёдингера с демпфированным линейным членом. Доказывается, что когда коэффициент демпфирования неотрицательный, исследуемая задача не имеет глобальных периодических решений при любых начальных данных, а когда отрицательный – сказанное остается в силе при “достаточно больших значениях” начальных данных.

*Ключевые слова:* нелинейное эволюционное уравнение, уравнение Шрёдингера, периодическое решение, глобальное решение, отсутствие периодических глобальных решений

**DOI:** 10.31857/S2686954320050392

1. Пусть $T$ – одномерный тор. Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{gathered} u_t = i\theta u_{xx} + f(u) + \omega u, \quad x \in T, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{gathered} \tag{1}$$

$u_0(x)$ – периодическая функция с периодом $L > 0$,

$$u_0(x + L) = u_0(x). \tag{2}$$

Здесь

$$f(u) = (\eta + i\mu)|u|^{\rho+1}, \tag{3}$$

где $\eta, \mu, \omega$ – действительные числа, $\theta \neq 0, \rho > 0, \omega$ – коэффициент демпфирования.

Уравнение (1) встречается в различных разделах прикладной физики, в нелинейной квантовой механике, в теории распространения световых волн в нелинейных средах (см. например, [1–3]). Локальная корректность задачи (1)–(3) исследовалась в работе [4]. При $\theta = -1$, $\omega = 0$ задача Коши в $R^n$ для уравнения (1) с нелинейным членом $f(u) = -i|u|^2 u$ исследовалась в работе [5]. При $\omega = 0$ смешанная задача для уравнения (1) с нелинейным членом (3) в $n$-мерной области $\Omega \subset R^n$ исследовалась в работах [6, 7]. Смешанная задача для уравнения (1) при $\omega = 0$, $f(u, \nabla u) = \omega_1 |u|^{1+\gamma} + \omega_2 |u|^{1+\mu}$, $\omega_1$, $\omega_2$, $\gamma$, $\mu$ – положительные числа, исследовалась в $n$-мерной области $\Omega \subset R^n$ в работе [8]. Смешанная задача для уравнения (1) при $\omega = 0$ в $\Omega \subset R^2$ с нелинейным членом $f(u) = |u|^\rho u$, $\rho > 0$ исследовалась в работе [9]. Смешанная задача в $\Omega \subset R^n$ для уравнения (1) при $\theta = 1$, $\omega = 0$ с нелинейным членом $f(u) = \beta|u|^q u + i\alpha|u|^p u$, $q > 0$, $p > 0$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, исследовалась в работе [10].

Вопрос о разрушении решений задачи Коши в $R^n$ для уравнения (1) с нелинейным членом $f(u) = -i|u|^\rho u$, $\rho > 0$, при $\omega = 0$ исследовался в работах [10–15]. Исследование вопроса об отсутствии глобальных периодических решений задачи (1)–(3) также представляет научный интерес и является актуальным.

2. Полученные результаты сформулируем в виде следующих теорем.

Теорема 1. *Пусть* $\mu > 0$, $\omega > 0$. *Пусть* $u_0(x)$ *удовлетворяет условию*

$$y_0 = \frac{1}{L}\int_0^L \operatorname{Im} u_0(x)\,dx > 0.$$

*Тогда максимальное время существования гладких периодических решений задачи* (1)–(3) *оценивается сверху числом* $t_0$, $t_{\max} \le t_0$, *где*

[1] *Институт прикладной математики Бакинского государственного университета, Баку, Азербайджан*
**E-mail: nasibov_sharif@mail.ru*

$$t_0 = \frac{1}{\omega\rho}\ln\left(\frac{\mu y_0^\rho + \omega}{\mu y_0^\rho}\right).$$

*При* $\omega < 0$ *сказанное остается в силе, если только*

$$t_0 = \frac{1}{|\omega|\rho}\ln\left(\frac{\mu y_0^\rho}{\mu y_0^\rho - |\omega|}\right)$$

*при условии, что*

$$y_0 > \left(\frac{|\omega|}{\mu}\right)^{1/\rho}.$$

*При* $\omega = 0$ $t_0$ *вычисляется по формуле*

$$t_0 = \frac{1}{y_0^\rho \mu\rho}.$$

Теорема 2. *Пусть* $\eta > 0$, $\omega > 0$. *Пусть* $u_0(x)$ *удовлетворяет условию*

$$y_0 = \frac{1}{L}\int_0^L \operatorname{Re} u_0(x)\,dx > 0.$$

*Тогда максимальное время существования гладких периодических решений задачи* (1)–(3) *оценивается числом* $t_0$, $t_{\max} \le t_0$, *где*

$$t_0 = \frac{1}{\omega\rho}\ln\left(\frac{\mu y_0^\rho + \omega}{\mu y_0^\rho}\right).$$

*При* $\omega < 0$ *сказанное остается в силе, если только*

$$t_0 = \frac{1}{|\omega|\rho}\ln\left(\frac{\eta y_0^\rho}{\mu y_0^\rho - |\omega|}\right)$$

*при условии, что*

$$y_0 > \left(\frac{|\omega|}{\eta}\right)^{1/\rho}.$$

*При* $\omega = 0$ $t_0$ *вычисляется по формуле*

$$t_0 = \frac{1}{y_0^\rho \eta\rho}.$$

3. Приведем схему доказательства теорем 1 и 2. Справедливы следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть* $\mu > 0$, $u(x,t)$ *– гладкое решение задачи* (1)–(3). *Далее пусть*

$$\int_0^L \operatorname{Im} u_0(x)\,dx > 0.$$

*Тогда функция*

$$y(t) = \frac{e^{-\omega t}}{L}\int_0^L \operatorname{Im} u(x,t)\,dx$$

*при любом* $t \in [0, t_{\max})$ *удовлетворяет следующему нелинейному дифференциальному неравенству первого порядка*:

$$\frac{dy}{dt} \ge \mu e^{\omega\rho t} y^{\rho+1}(t), \quad y_0 = \frac{1}{L}\int_0^L \operatorname{Im} u_0(x)\,dx,$$

*благодаря которому доказывается теорема* 1.

Лемма 2. *Пусть* $\eta > 0$, $u(x,t)$ *– гладкое решение задачи* (1)–(3). *Далее пусть*

$$\int_0^L \operatorname{Re} u_0(x)\,dx > 0.$$

*Тогда функция*

$$y(t) = \frac{e^{-\omega t}}{L}\int_0^L \operatorname{Re} u(x,t)\,dx$$

*при любом* $t \in [0, t_{\max})$ *удовлетворяет следующему нелинейному дифференциальному неравенству первого порядка*:

$$\frac{dy}{dt} \ge \eta e^{\omega\rho t} y^{\rho+1}(t), \quad y_0 = \frac{1}{L}\int_0^L \operatorname{Re} u_0(x)\,dx,$$

*благодаря которому доказывается теорема* 2.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Rypdal K., Rasmussen J.J.* // Phys. Scr. I. II. 1986. V. 33. P. 481–504.
2. *Захаров В.Е., Шабат А.Б.* // ЖЭТФ. 1971. Т. 61. № 1. С. 118–134.
3. *Луговой В.Н., Прохоров А.М.* // УФН. 1973. Т. 11. № 11. С. 203–247.
4. *Bourgain J.* // Geom. Funct. Anal. 1993. V. 3. P. 157–178.
5. *Шабат А.Б.* / В кн.: Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1969. В. 1. С. 180–194.
6. *Насибов Ш.М.* // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 8. С. 1087–1091.
7. *Nasibov Sh.M.* // J. Appl. Math. 2004. V. 1. P. 23–35.
8. *Насибов Ш.М.* // ТМФ. 2018. Т. 195. № 2. С. 190–196.
9. *Насибов Ш.М.* // ТМФ. 2019. Т. 201. № 1. С. 118–125.
10. *Насибов Ш.М.* // ДАН. 1989. Т. 304. № 2. С. 285–289.
11. *Насибов Ш.М.* // ДАН. 1985. Т. 285. № 4. С. 807–811.
12. *Насибов Ш.М.* // ДАН. 1989. Т. 307. № 3. С. 538–542.
13. *Кудряшов О.И.* // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16. № 4. С. 866–868.
14. *Weinstein M.* // Communs Partial and Different. Equats. 1986. V. 11. P. 545–565.
15. *Nawa H.* // Communs Pure and Appl. Math. 1999. V. 52. № 2. P. 193–270.

# ABSENCE OF GLOBAL PERIODIC SOLUTIONS FOR A SCHRÖDINGER-TYPE NONLINEAR EVOLUTION EQUATION

**Sh. M. Nasibov**[a]

[a] *Institute for Applied Mathematics, Baku State University, Baku, Azerbaijan*

Presented by Academician of the RAS V. P. Maslov

The problem of the absence of global periodic solutions for a Schrödinger-type nonlinear evolution equation with a linear damping term is investigated. It is proved that when the damping coefficient is non-negative, the studied problem does not have global periodic solutions for any initial data, and when the negative the above-mentioned statement remains valid for “sufficiently large values” of the initial data.

*Keywords:* nonlinear evolution equation, Schrödinger equation, periodic solution, global solution, absence of periodic global solutions