

УДК 519.174, 519.179.1, 519.179.4

О ХРОМАТИЧЕСКИХ ЧИСЛАХ СЛУЧАЙНЫХ ГИПЕРГРАФОВ

© 2020 г. Ю. А. Демидович^{1,*}, Д. А. Шабанов^{1,2,3,**}

Представлено академиком РАН А.Н. Ширяевым 26.11.2019 г.

Поступило 26.11.2019 г.

После доработки 26.11.2019 г.

Принято к публикации 23.06.2020 г.

В работе изучается асимптотическое поведение хроматического числа биномиального случайного гиперграфа $H(n, k, p)$ при фиксированном $k \geq 4$, стремящемся к бесконечности n и некоторой функции $p = p(n)$. Доказано, что при не слишком медленном убывании к нулю функции $p = p(n)$ хроматическое число случайного гиперграфа $H(n, k, p)$ с вероятностью, стремящейся к 1, сконцентрировано в двух или трех соседних значениях, которые могут быть явно найдены как функции от n, p, k .

Ключевые слова: случайный гиперграф, хроматическое число, метод второго момента

DOI: 10.31857/S2686954320050331

1. ВВЕДЕНИЕ И ИСТОРИЯ ЗАДАЧИ

В работе изучается проблема теории случайных гиперграфов, связанная с концентрацией значений хроматического числа. Сначала напомним ряд базовых определений.

В дискретной математике гиперграфом называется пара множеств $H = (V, E)$, где V — это некоторое конечное множество, элементы которого называются вершинами гиперграфа, а E — это совокупность подмножеств множества вершин V , которые принято называются ребрами гиперграфа. Пусть k — это натуральное число, тогда гиперграф называется k -однородным, если каждое его ребро состоит ровно из k вершин. Раскраской f множества вершин гиперграфа $H = (V, E)$ в $r \in \mathbb{N}$ цветов мы будем называть произвольное отображение вида $f: V \rightarrow \{1, \dots, r\}$. Раскраска вершин гиперграфа называется правильной, если в ней каждое его ребро не является одноцветным, а содержит вершины хотя бы двух различных цветов. Наконец, хроматическим числом $\chi(H)$ гиперграфа H называется такое наименьшее количество

цветов r , что для H существует правильная раскраска вершин в r цветов.

В настоящей работе исследуются хроматические числа случайных гиперграфов. А именно, мы рассматриваем классическую биномиальную модель случайного гиперграфа $H(n, k, p)$, который представляет собой схему Бернулли на множестве ребер полного k -однородного гиперграфа $K_n^{(k)}$ на n вершинах, в которой каждое ребро $K_n^{(k)}$ включается в $H(n, k, p)$ в качестве ребра независимо от других с вероятностью $p \in (0, 1)$. При $k = 2$ случайный гиперграф $H(n, 2, p)$ представляет собой известную модель случайного графа $G(n, p)$, также известную как модель Эрдеша–Реньи. Нас будет интересовать асимптотическое поведение хроматического числа $H(n, k, p)$ при фиксированном $k \geq 2$, стремящемся к бесконечности n и некоторой функции $p = p(n)$. Перейдем к обсуждению известных результатов относительно $\chi(H(n, k, p))$.

Одним из фундаментальных результатов о хроматическом числе случайного графа является известная теорема Т. Лучака 1991 г. (см. [1]), которая утверждает, что для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ выполнено следующее: если функция $p = p(n)$ удовлетворяет условию $p \leq n^{-5/6-\varepsilon}$, то существует такая функция $h = h(n, p)$ с натуральными значениями, что

$$P(\chi(G(n, p)) \in \{h, h+1\}) \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Тем самым, при не слишком медленном убывании $p = p(n)$ хроматическое число случайного графа $G(n, p)$ с вероятностью, стремящейся к еди-

¹ Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия

² Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

³ Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия

*E-mail: yuradem9595@mail.ru

**E-mail: dmitry.shabanov@phystech.edu

нице, сконцентрировано в некоторых двух соседних значениях. Однако, несмотря на силу теоремы Лучака, ее доказательство не позволяет явным образом найти значение $h = h(n, p)$ из (1). В дальнейшем поиску данной функции для различных функций $p = p(n)$ и вообще феномену концентрации значений были посвящены работы Н. Алона и М. Кривелевича [2], Д. Аклиоптаса и А. Наора [3], А. Коджа-Оглана с различными соавторами [4–6], С.А. Каргальцева, Д.А. Шабанова и Т.М. Шайхеевой [7].

Хроматическое число случайного гиперграфа $H(n, k, p)$ активно изучается с середины 80-х годов прошлого века. Наиболее общий результат об асимптотическом поведении $\chi(H(n, k, p))$ был получен М. Кривелевичем и Б. Судаковым в [8]. Однако вопрос о концентрации значений хроматического числа в работе [8] не изучался. Одни из первых результатов в этом направлении были получены в работе М. Дайера, А. Фриза и К. Гринхилл в 2015 г. [9]. Они рассматривали разреженный случай, когда число ребер в среднем линейно по числу вершин, т.е. $p \binom{n}{k} = cn$ для фиксированного $c > 0$. Авторами [9] было показано, что для фиксированного натурального $r \geq 2$ выполнено следующее:

1. Если $c > r^{k-1} \ln r - \frac{1}{2} \ln r$, то

$$P\left(\chi\left(H\left(n, k, cn/\binom{n}{k}\right)\right) > r\right) \rightarrow 1 \quad \text{при } n \rightarrow \infty;$$

2. Если положить $u_r = r^{k-1} \ln r$, то существует такое $c_r \in (u_{r-1}, u_r)$, что при любом $c < c_r$

$$P\left(\chi\left(H\left(n, k, cn/\binom{n}{k}\right)\right) \leq r\right) \rightarrow 1 \quad \text{при } n \rightarrow \infty;$$

3. Величину c_r из предыдущего пункта можно выбрать равной

$$c_r = r^{k-1} \ln r - \frac{r-1}{r} (1 + \ln r) - O(k^2 r^{1-k} \ln r). \quad (2)$$

Тем самым, Дайер, Фриз и Гринхилл установили, что, как и для графов, в разреженном случае хроматическое число случайного гиперграфа сконцентрировано в одном или двух соседних значениях. Учитывая (2), видно, что при больших значениях r длина интервала, в котором указаны два значения хроматического числа, $u_r - \frac{1}{2} \ln r - c_r$

имеет асимптотический порядок $\frac{1}{2} \ln r$, т.е. растет с ростом r . В работах Д.А. Шабанова [10], а также П. Эйра, А. Коджа-Оглана и К. Гринхилл [11] было показано, что величину c_r можно выбрать рав-

ной $c_r = r^{k-1} \ln r - \frac{1}{2} \ln r - O(1)$, что дает ограниченную длину отрезка неопределенности $\left[c_r, u_r - \frac{1}{2} \ln r\right]$.

В заключении обзора имеющихся результатов авторы хотели бы обратить внимание читателя на работы о близких задачах о полноцветных и j -правильных раскрасках случайных гиперграфов, а также раскрасках случайных кнезеровских графов и гиперграфов (см. [12–15]).

2. НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Целью настоящей работы было установление феномена концентрации значений хроматического числа случайного гиперграфа $H(n, k, p)$ в разреженном случае, т.е. при $p \binom{n}{k} \gg n$, и получение расширений результатов из [9–11] для разреженного случая.

Первый новый результат представлен в следующей теореме.

Теорема 1. Обозначим $c = c(n) = p \binom{n}{k} \frac{1}{n}$ и зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Если $c \rightarrow +\infty$ и $c = o(n)$, то для любой функции $r = r(n) \rightarrow +\infty$ с условием

$$c > r^{k-1} \ln r - \frac{1}{2} \ln r + \varepsilon \quad (3)$$

выполнено

$$P(\chi(H(n, k, p)) > r) \rightarrow 1 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Вторым и центральным результатом настоящей работы является вторая теорема, позволяющая найти верхнюю оценку хроматического числа $H(n, k, p)$ при не слишком медленно убывающей функции $p = p(n)$.

Теорема 2. Пусть натуральное число $k \geq 4$ и $\gamma \in \left(0, \frac{1}{8}\right)$ фиксированы. Обозначим $c = c(n) = p \binom{n}{k} \frac{1}{n}$. Если $c \leq n^{\frac{k-1}{2k+4}-\gamma}$ и $c \rightarrow +\infty$, то существует такая абсолютная константа $A > 0$, что для любой функции $r = r(n) \rightarrow +\infty$ с условием

$$c < r^{k-1} \ln r - \frac{1}{2} \ln r - \frac{r-1}{r} - A \left(\frac{k^2 \ln r}{r^{k/3-1}} \right) \quad (4)$$

выполнено

$$P(\chi(H(n, k, p)) \leq r+1) \rightarrow 1 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Поймем, как с помощью теорем 1 и 2 можно получить вывод о концентрации значений хроматического числа случайного гиперграфа. Во-пер-

вых, отметим, что параметр $c = \frac{1}{n} p \binom{n}{k}$ по сути заменяет собой вероятность p , однозначно ее определяя. Условие теоремы 2 на него жестче, требуется,

чтобы $c \leq n^{\frac{k-1}{2k+4}-\gamma}$, т.е. $c = o(n)$ заведомо. Так что предположим, что выполнены условия теоремы 2.

Введем величину $r_p = r_p(n) = \min\{\ell \in \mathbb{N} : c < \ell^{k-1} \ln \ell\}$. Тогда, конечно, $c \in [(r_p - 1)^{k-1} \ln(r_p - 1), r_p^{k-1} \ln r_p]$ и имеет место следующая картина.

1. В силу того, что $c \geq (r_p - 1)^{k-1} \ln(r_p - 1)$, из теоремы 1 сразу следует, что

$$P(\chi(H(n, k, p)) \geq r_p) \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

2. В силу того, что $c \leq (r_p + 1)^{k-1} \ln(r_p + 1) - \frac{1}{2} \ln(r_p + 1) - \frac{r_p}{r_p + 1} - A \left(\frac{k^2 \ln r_p}{r_p^{k/3-1}} \right)$, из теоремы 2 следует, что

$$P(\chi(H(n, k, p)) \leq r_p + 2) \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

3. Далее, если $c > r_p^{k-1} \ln r_p - \frac{1}{2} \ln r_p + \varepsilon$, то теорема 1 утверждает, что

$$P(\chi(H(n, k, p)) \geq r_p + 1) \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

4. Наконец, если $c < r_p^{k-1} \ln r_p - \frac{1}{2} \ln r_p - \frac{r_p - 1}{r_p} - A \left(\frac{k^2 \ln r_p}{r_p^{k/3-1}} \right)$, то теорема 2 утверждает, что

$$P(\chi(H(n, k, p)) \leq r_p + 1) \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

В итоге мы получаем, что с вероятностью, стремящейся к 1,

1) на полуинтервале вида $c \in \left[(r_p - 1)^{k-1} \ln(r_p - 1), r_p^{k-1} \ln r_p - \frac{1}{2} \ln r_p - O(1) \right)$ хроматическое число случайного гиперграфа сконцентрировано в двух значениях: r_p и $r_p + 1$;

2) на отрезке вида $c \in \left[r_p^{k-1} \ln r_p - \frac{1}{2} \ln r_p - O(1), r_p^{k-1} \ln r_p - \frac{1}{2} \ln r_p + O(1) \right]$ хроматическое число случайного гиперграфа сконцентрировано в трех значениях: r_p , $r_p + 1$ и $r_p + 2$;

3) на интервале вида $c \in \left[r_p^{k-1} \ln r_p - \frac{1}{2} \ln r_p + O(1), r_p^{k-1} \ln r_p \right)$ хроматическое число случайного гиперграфа сконцентрировано снова в двух значениях: $r_p + 1$ и $r_p + 2$.

Тем самым, лишь в промежутке ограниченной длины мы имеем предельную концентрацию значений хроматического числа в трех числах, во всех остальных случаях доказана концентрация в двух.

В последнем разделе работы мы прокомментируем основные идеи доказательств теорем 1 и 2.

3. ИДЕИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

Доказательства теорем 1 и 2 следуют общей схеме обоснования результатов из работы [6], которая, в свою очередь, опирается на идеи из [1]. Утверждение теоремы 1 использует переход к равномерной модели случайного гиперграфа, метод первого момента и аппроксимацию биномиального распределения. Поговорим более детально о доказательстве теоремы 2.

Важнейшим инструментом, который позволил доказать теорему 2, является следующий результат о дважды стохастических матрицах, полученный в [10]. Опишем данный результат. Пусть $r \geq 2$ — натуральное число. Рассмотрим множество $\mathcal{M}_r$ матриц размера $r \times r$, которые удовлетворяют следующим свойствам: для любой $M = (m_{ij} : i, j = 1, \dots, r) \in \mathcal{M}_r$ и

1) для любых $i, j = 1, \dots, r$ выполнено $m_{ij} \geq 0$;

2) для любого $i = 1, \dots, r$ выполнено $\sum_{j=1}^r m_{ij} = \frac{1}{r}$;

3) для любого $j = 1, \dots, r$ выполнено $\sum_{i=1}^r m_{ij} = \frac{1}{r}$.

Далее, для каждой $M \in \mathcal{M}_r$ введем три функции:

$$\mathcal{H}(M) = - \sum_{i,j=1}^r m_{ij} \ln(r \cdot m_{ij}),$$

$$\mathcal{E}(M) = \ln \left(1 - \frac{2}{r^{k-1}} + \sum_{i,j=1}^r m_{ij}^k \right)$$

и $\mathcal{G}_d(M) = \mathcal{H}(M) + d \cdot \mathcal{E}(M)$, где $d > 0$ — некоторое положительное число. В работе [10] было получена следующая лемма (см. утверждение 1 в [10]).

Лемма 1. *Существуют такие абсолютные константы $r_0 > 0$ и $A > 0$, что для любых $r > r_0$, $k \geq 4$ и $d < r^{k-1} \ln r - \frac{1}{2} \ln r - \frac{r-1}{r} - A \left(\frac{k^2 \ln r}{r^{k/3-1}} \right)$ максимальное значение функции $\mathcal{G}_d(M)$ достигается при $M = J_r$, где J_r — это матрица размера $r \times r$, все элементы которой равны $1/r^2$.*

Лемма 1 в сочетании с методом второго момента позволяет получить нижнюю оценку вероятности наличия правильной раскраски в r цветов у $H(n, k, p)$. Отметим, что теорему 2 достаточно доказать при $r = r_p$. Выполнена

Л е м м а 2. Пусть выполнены условия теоремы 2 и $r = r_p$. Тогда

$$P(\chi(H(n, k, p)) \leq r) \geq \left(\frac{r\sqrt{2\pi}}{n} \right)^{r^2} e^{O(r \ln r)}.$$

Применяя дополнительно хорошо известные оценки вероятностей больших уклонений для мартингалов с ограниченными мартингальными разностями, можно показать, что большую часть гиперграфа $H(n, k, p)$ можно правильно раскрасить в r цветов. Более точно, выполнена

Л е м м а 3. Пусть выполнены условия теоремы 2 и $r = r_p$. Тогда с вероятностью, стремящейся к 1, существует такое подмножество вершин $U_0 \subseteq V(H(n, k, p))$, что $|U_0| \leq n^{3/2} p^{1/(k-1)} \sqrt{\ln n}$ и подгиперграф, индуцированный на $V(H(n, k, p)) \setminus U_0$, можно правильно раскрасить в r цветов.

По сути, остается разобраться с раскраской “плохого” набора вершин U_0 . В силу того, что мощность U_0 невелика, внутри него не найдется плотных подгиперграфов, и, значит, хроматическое число индуцированного подгиперграфа ограничено. Сформулируем точное утверждение.

Л е м м а 4. Пусть выполнены условия теоремы 2. Выберем фиксированное $\delta = \delta(k) > 0$ так, чтобы $1 - \delta k(k-1) > 0$. Тогда с вероятностью, стремящейся к 1, любое подмножество вершин U случайно-го гиперграфа $H(n, k, p)$ с условием

$$|U| \leq \left(en \left(\frac{e^{k+1} p}{k^k \left(\frac{k+1}{k(k-1)} - \delta \right)} \right)^{\frac{k+1}{k(k-1)} \delta} \right)^{\frac{k}{\delta k(k-1)-1}}$$

содержит внутри себя не более $\left(\frac{k+1}{k(k-1)} - \delta \right) |U|$ ребер $H(n, k, p)$.

С помощью лемм 2–4 несложно завершить доказательство. Мы строим такое множество U , удовлетворяющее лемме 4, которое, с одной стороны, включает в себя множество U_0 из леммы 3, а с другой — все вершины из $V(H(n, k, p)) \setminus U$, которые содержатся в ребре хотя бы с одной вершиной из U , образуют независимое множество W . Тогда подгиперграф, индуцированный на U , можно правильно раскрасить в цвета $\{1, 2, 3\}$, вершины из независимого множества W в цвет $r+1$, а оставшийся подгиперграф, индуцированный на $V(H(n, k, p)) \setminus (U \cup W)$,

можно правильно раскрасить в цвета $\{1, 2, \dots, r\}$ в силу леммы 4.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа второго автора выполнена в рамках исследований по гранту Российского научного фонда (проект 16–11–10014).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Łuczak T. A Note on the Sharp Concentration of the Chromatic Number of Random Graphs // *Combinatorica*. 1991. V. 11. № 3. P. 295–297.
2. Alon N., Krivelevich M. The Concentration of the Chromatic Number of Random Graphs // *Combinatorica*. 1997. V. 17. № 3. P. 303–313.
3. Achlioptas D., Naor A. The Two Possible Values of the Chromatic Number of a Random Graph // *Annals of Mathematics*. 2005. V. 162. № 3. P. 1335–1351.
4. Coja-Oghlan A., Vilenchik D. The Chromatic Number of Random Graphs for Most Average Degrees // *International Mathematics Research Notices*. 2015. V. 2016. № 19. P. 5801–5859.
5. Coja-Oghlan A. Upper-Bounding the k -Colorability Threshold by Counting Covers // *Electronic J. Combinatorics*. 2013. V. 20. № 3. Research paper № 32.
6. Coja-Oghlan A., Panagiotou K., Steger A. On the Chromatic Number of Random Graphs // *J. Combinatorial Theory, Ser. B*. 2008. V. 98. P. 980–993.
7. Kargaltsev S.A., Shabanov D.A., Shaikheeva T.M. Two Values of the Chromatic Number of a Sparse Random Graph // *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*. 2019. V. 88. № 3. P. 849–854.
8. Krivelevich M., Sudakov B. The Chromatic Numbers of Random Hypergraphs // *Random Structures and Algorithms*. 1998. V. 12. № 4. P. 381–403.
9. Dyer M., Frieze A., Greenhill C. On the Chromatic Number of a Random Hypergraph // *J. Combinatorial Theory, Ser. B*. 2015. V. 113. P. 68–122.
10. Шабанов Д.А. О концентрации хроматического числа случайного гиперграфа // *ДАН*. 2017. Т. 475. № 1. С. 24–28.
11. Ayre P., Coja-Oghlan A., Greenhill C. Hypergraph Coloring up to Condensation // *Random Structures and Algorithms*. 2019. V. 54. № 4. P. 615–652.
12. Kupavskii A. Random Kneser Graphs and Hypergraphs // *Electronic J. Combinatorics*. 2018. V. 25. № 4. P. 4.52.
13. Kravtsov D.A., Krokhamal N.E., Shabanov D.A. Panchromatic 3-colorings of Random Hypergraphs // *European J. Combinatorics*. 2019. V. 78. P. 28–43.
14. Кравцов Д.А., Крохмаль Н.Е., Шабанов Д.А. Полноцветные раскраски случайных гиперграфов // *Дискретная математика*. 2019. Т. 31. № 2. С. 84–113.
15. Семенов А.С. Двухцветные раскраски случайного гиперграфа // *Теория вероятностей и ее применения*. 2019. Т. 64. № 1. С. 75–97.

ON THE CHROMATIC NUMBERS OF RANDOM HYPERGRAPHS

Yu. A. Demidovich^a and D. A. Shabanov^{a,b,c}

^a *Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Moscow oblast, Russian Federation*

^b *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

^c *Higher School of Economics (National Research University), Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS A.N. Shiryayev

The asymptotic behaviour of the chromatic number of the binomial random hypergraph $H(n, k, p)$ for fixed $k \geq 4$, for n tending to infinity and for some function $p = p(n)$ is studied. For not very slowly decreasing function $p = p(n)$ we prove that the chromatic number of the random hypergraph $H(n, k, p)$ is concentrated in two or three consecutive values which can be found explicitly as functions of n, p, k .

Keywords: random hypergraph, chromatic number, second moment method