

УДК 511.36

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЯДОВ ЭЙЛЕРОВА ТИПА С ПАРАМЕТРОМ – ЛИУВИЛЛЕВЫМ ПОЛИАДИЧЕСКИМ ЧИСЛОМ

© 2020 г. В. Г. Чирский^{1,*}

Представлено академиком РАН А.Л. Семеновым 10.07.2020 г.

Поступило 10.07.2020 г.

После доработки 10.07.2020 г.

Принято к публикации 24.08.2020 г.

Для любой линейной формы $h_0 f_0(1) + h_1 f_1(1)$ с целыми коэффициентами h_0, h_1 , не обращающимися в ноль одновременно, устанавливается существование бесконечного множества полей p -адических чисел, в которых эта форма не обращается в ноль. Здесь $f_0(1) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n$, $f_1(1) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+1)_n$, λ – лиувиллево полиадическое число, а $(\lambda)_n$ обозначает символ Похгаммера. Этот результат дает пример исследования арифметических свойств значений гипергеометрических рядов с трансцендентными параметрами.

Ключевые слова: бесконечная линейная независимость, полиадические числа, приближения Эрмита–Паде

DOI: 10.31857/S268695432005032X

С именем Л. Эйлера связан ряд $\sum_{n=0}^{\infty} n!(-z)^n$. В комплексной области этот ряд сходится только в точке $z = 0$. Однако в любом поле p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$ этот ряд сходится при $|z|_p < p^{\frac{1}{p-1}}$. При $z = -1$ получаем ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!, \quad (1)$$

который сходится в любом поле $\mathbb{Q}_p$. Сходящиеся во всех полях $\mathbb{Q}_p$ ряды с членами – целыми числами представляют собой так называемые полиадические числа [1].

Вместе с рядом (1) можно рассмотреть ряд $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n$ несколько более общего вида (где $(\lambda)_n$ обозначает символ Похгаммера, определяемый равенствами $(\lambda)_0 = 1$, $(\lambda)_n = \lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+n-1)$,

$n = 1, 2, \dots$). Если λ – рациональное число, то рассматриваемый ряд сходится в любом поле $\mathbb{Q}_p$ (кроме, быть может, конечной совокупности таких полей, соответствующих простым числам, входящим в знаменатель λ); его сумму в поле $\mathbb{Q}_p$

будем обозначать символом $\alpha^{(p)}$. Из результатов работ [2, 3] сразу следует, что ряд (1) и ряд α обладают свойством бесконечной трансцендентности. Это означает для ряда α , например, что для любого отличного от нуля многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами существует бесконечное множество простых чисел p таких, что в поле $\mathbb{Q}_p$ выполнено неравенство $P(\alpha^{(p)}) \neq 0$. В работе [4] рассматривалась линейная форма от ряда (1) и было доказано существование бесконечного множества простых чисел p , входящих в некоторое собственное подмножество множества всех простых чисел и таких, что в поле $\mathbb{Q}_p$ эта линейная форма не обращается в ноль.

Ряд α является частным случаем обобщенного гипергеометрического ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \dots (\alpha_r)_n}{(\beta_1)_n \dots (\beta_s)_n} z^n. \quad (2)$$

В случае, когда параметры ряда (2) являются рациональными числами, при $r < s$ этот ряд заме-

¹Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: vgchirskii@yandex.ru

ной переменной сводится к Е-функции Зигеля, при $r = s$ этот ряд представляет собой G-функцию Зигеля, а при $r > s$ получаем F-ряд. В этом случае для исследования арифметической природы значений рассматриваемого ряда (2) применяются метод Зигеля–Шидловского и его обобщение (см. [5–10]).

Если среди параметров ряда (2) есть алгебраические иррациональные числа, то основным подходом к исследованию арифметической природы значений этого ряда являются приближения Эрмита–Паде (см. [11–13]).

Цель настоящей работы – рассмотреть значения при $z = 1$ рядов

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n z^n, \quad f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+1)_n z^n, \quad (3)$$

с трансцендентным полиадическим параметром λ . Напомним, что значения этих рядов рассматриваются в полях p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$.

Перейдем к точным формулировкам. Пусть λ_0 – произвольное натуральное число. Обозначим $s_0 = e^{\lambda_0}$. Пусть μ_0 – натуральное число такое, что для всех простых чисел p , удовлетворяющих неравенству $p \leq s_0 + \lambda_0$, выполняется условие

$$\text{ord}_p \mu_0 \leq 2s_0 \ln s_0.$$

(Здесь символ $\text{ord}_p \mu$ использован для обозначения наибольшей степени простого числа p , делящей μ). Полагаем $\lambda_1 = \lambda_0 + \mu_0$. Продолжаем этот процесс. На шаге с номером k обозначаем $s_k = e^{\lambda_k}$. Пусть μ_k – натуральное число такое, что для всех простых чисел p , удовлетворяющих неравенству $p \leq s_k + \lambda_k$, выполняется условие

$$\text{ord}_p \mu_k \leq 2s_k \ln s_k. \quad (4)$$

Полагаем $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \mu_k$, $k = 1, 2, \dots$ и

$$\lambda = \lambda_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k. \quad (5)$$

Ряд λ сходится в любом поле p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$ и представляет собой полиадическое число. Будем называть полиадическое число λ лиувиллевым полиадическим числом, если для любых чисел n и P существует натуральное число A такое, что для всех простых чисел $p \leq P$ выполнено неравенство $|\lambda - A|_p < A^{-n}$. Из условия (4) следует, что ряд (5) представляет собой лиувиллево полиадическое число. Из этого сразу следует трансцендентность этого ряда в любом поле p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$.

Теорема. При определенном равенством (5) значении параметра λ для любой линейной формы

$h_0 f_0(1) + h_1 f_1(1)$ с целыми коэффициентами h_0, h_1 , не обращающимися в ноль одновременно, существует бесконечное множество простых чисел p таких, что в поле $\mathbb{Q}_p$ выполнено неравенство

$$h_0 f_0(1) + h_1 f_1(1) \neq 0.$$

Иными словами, ряды $f_0(1), f_1(1)$ бесконечно линейно независимы.

Доказательство теоремы существенно опирается на конструкцию аппроксимаций Эрмита–Паде из работы [14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Постников А.Г. Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Наука, 1971. 416 с.
2. Chirskii V.G. Product formula, global relations and polyadic integers // Russian Journal of Mathematical Physics. 2019. V. 26. № 3. P. 286–305.
3. Bertrand D., Chirskii V., Yebbou J. Effective Estimates for Global Relations on Euler-Type Series // Ann. Fac. Sci. Toulouse. 2004. V. 13. № 2. P. 241–260.
4. Matala-aho T., Zudilin W. Euler factorial series and global relations // J. Number Theory. 2018. V. 186. P. 202–210.
5. Шидловский А.Б. Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987. 448 с.
6. Салихов В.Х. Критерий алгебраической независимости значений одного класса гипергеометрических Е-функций // Мат. сборник. 1990. Т. 181. № 2. С. 189–211.
7. Bombieri E. On G-functions // Recent progress in Analytic Number Theory. L.: Academic Press, 1981. V. 2. P. 1–68.
8. Yves Andre. G-functions and Geometry. Aspects of Math. Vieweg. 1989. V. 13.
9. Flicker Yu. On p -adic G-functions // J. London Math. Soc. 1977. V. 15. № 3. P. 395–402.
10. Chirskii V.G. Arithmetic properties of Generalized Hypergeometric Series // Russian J. Mathematical Physics. 2020. V. 27. № 2. P. 175–184.
11. Chudnovsky G.V. On applications of Diophantine approximations // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1985. V. 81. P. 7261–7265.
12. Иванков П.Л. О линейной независимости значений некоторых гипергеометрических функций с иррациональными параметрами // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34. № 1. С. 53–62.
13. Чирский В.Г. Об арифметических свойствах обобщенных гипергеометрических рядов с иррациональными параметрами // Известия РАН. Сер. матем. 2014. Т. 78. № 6. С. 193–210.
14. Нестеренко Ю.В. Приближения Эрмита–Паде обобщенных гипергеометрических функций // Мат. сб. 1994. Т. 185. № 3. С. 39–72.

ARITHMETIC PROPERTIES OF EULER-TYPE SERIES WITH A LIOUVILLEAN POLYADIC PARAMETER

V. G. Chirskii^a

^a *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS A.L. Semenov

The paper states, that for any nonzero linear form $h_0 f_0(1) + h_1 f_1(1)$ with integer coefficients h_0, h_1 . There exist infinitely many p-adic fields where this form doesn't vanish. Here $f_0(1) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n$,

$f_1(1) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + 1)_n$ λ is a liouvillean polyadic number and $(\lambda)_n$ stands for Pochhammer symbol. This result shows the possibility of studying the arithmetic properties of the values of hypergeometric series with transcendental parameters.

Keywords: infinite linear independence, polyadic numbers, Hermite–Pade approximations