ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 494, с. 14–16

МАТЕМАТИКА

УДК 511.336

ТРЕХМЕРНЫЕ АНАЛОГИ ТОЖДЕСТВ ХИС-БРАУНА И СЕЛЬБЕРГА

© 2020 г. Член-корреспондент РАН В. А. Быковский[1,*], А. В. Устинов[2,]**

Поступило 28.05.2020 г.
После доработки 09.06.2020 г.
Принято к публикации 17.06.2020 г.

Доказаны аналоги тождеств Хис-Брауна и Сельберга для трехмерных сумм Клостермана.

Ключевые слова: аналитическая теория чисел, суммы Клостермана, оценки тригонометрических сумм

DOI: 10.31857/S2686954320050318

Пусть q – натуральное число. Положим $e_q(a) = \exp\left(2\pi i\dfrac{a}{q}\right)$ и для целого a

$$\delta_q(a) = \frac{1}{q}\sum_{b(\bmod q)} e_q(ab) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad a \equiv 0(\bmod q); \\ 0, & \text{если} \quad a \not\equiv 0(\bmod q). \end{cases}$$

Для натурального $k \geq 2$

$$\tau_k(q) = \sum_{q=q_1\ldots q_k} 1$$

есть число разбиений q на k сомножителей и $\tau(q) = \tau_2(q)$.

Пусть $m_1,\ldots,m_{k+1}$ и d – целые, $P \geq 1$. При изучении асимптотического поведения средних

$$\sum_{\substack{0<n\leq P \\ n\equiv d \ (\bmod q)}} \tau_k(n)$$

(см., например, [1]) возникает необходимость в оценке сумм

$$H(m_1,\ldots,m_{k+1};q) = \frac{1}{q}\sum_{a_1,\ldots,a_{k+1}(\bmod q)} e_q(m_1a_1 + \ldots + m_{k+1}a_{k+1} - a_1\ldots a_{k+1}) =$$

$$= \sum_{a_1,\ldots,a_k(\bmod q)} \delta_q(a_1\ldots a_k - m_{k+1})\, e_q(m_1a_1 + \ldots + m_ka_k).$$

З а м е ч а н и е 1. Из определения следует, что величина $H(m_1,\ldots,m_{k+1};q)$ не меняется при любой перестановке параметров $m_1,\ldots,m_{k+1}$. В частном случае $m_{k+1} = 1$ сумма

$$H(m_1,\ldots,m_k,1;q) = S(m_1,\ldots,m_k;q) =$$

$$= \sideset{}{^*}\sum_{a_1,\ldots,a_{k-1}(\bmod q)} e_q(m_1a_1 + \ldots + m_{k-1}a_{k-1} + m_k\overline{a_1\ldots a_{k-1}})$$

называется k-мерной суммой Клостермана. Знак звездочки означает, что суммирование проводится по a_i (mod q) с НОД$(a_i,q) = 1$ и

$$a_1\ldots a_{k-1}\cdot\overline{a_1\ldots a_{k-1}} \equiv 1(\bmod q).$$

Двумерную сумму называют просто суммой Клостермана.

В работе [2] было доказано тождество

$$H(m_1,m_2,d;q) = \sum_{l\setminus \text{НОД}(m_2,\,d,q)} lS\left(m_1,\frac{m_2d}{l^2};\frac{q}{l}\right), \tag{1}$$

которое при $m_1 = 1$, $m_2 = m$ и $d = n$ превращается в тождество Сельберга

$$S(m,n;q) = \sum_{l\setminus \text{НОД}(m,n,q)} lS\left(1,\frac{mn}{l^2};\frac{q}{l}\right). \tag{2}$$

Оно без доказательства впервые было опубликовано в [3] и переоткрыто в [4] с доказательством, основанным на соотношении мультипликативности для операторов Гекке из теории автоморфных функций. Позднее в [5] было предложено элементарное доказательство.

[1] *Хабаровское отделение Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук, Хабаровск, Россия*
[2] *Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск, Россия*
**E-mail: vab@iam.khv.ru*
***E-mail: ustinov.alexey@gmail.com*

В работе [6] доказано неравенство

$$\left|H(m,n,d;q)\right| \le \tau(q')\tau(q)\text{НОД}^{1/2}(mn,md,nd,q)q^{1/2} \quad (3)$$

с $q' = \text{НОД}(m,n,d,q)$. При $d = 1$ оно превращается в неравенство

$$\left|S(m,n;q)\right| \le \tau(q)\,\text{НОД}^{1/2}(m,n,q)\,q^{1/2} \quad (4)$$

из работы [7].

В настоящей работе доказываются трехмерные аналоги тождеств Хис-Брауна (1) и Сельберга (2).

Т е о р е м а 1. *Для любых целых m_1, m_2, m_3 и d*

$$H(m_1,m_2,m_3,d;q) =$$
$$= \sum_{l,t,r}(lt)^2\frac{\mu(r)}{r}S\left(\frac{m_1}{t/r},\frac{m_2}{l},\frac{dm_3}{(lt)^2}\overline{r};\frac{q}{lt}\right),$$

где $\mu(r)$ – функция Мёбиуса и суммирование проводится по натуральным l, t и r, для которых

$$l\backslash\text{НОД}(m_2,m_3,d,q),\quad t\backslash\text{НОД}\left(\frac{m_3}{l},\frac{d}{l},\frac{q}{l}\right),$$

$$r\backslash t,\quad \left(\frac{t}{r}\right)\backslash m_1,\quad \text{НОД}\left(r,\frac{q}{lt}\right)=1,$$

$$r\overline{r} \equiv 1\left(\operatorname{mod}\frac{q}{lt}\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выделив отдельно суммирование по a_1, с помощью замен $a_2 = a_2' + b_2'\dfrac{q}{l}$, $a_3 = a_3' + b_3'\dfrac{q}{l}$ получим

$$H(m_1,m_2,m_3,d;q) =$$
$$= \sum_{l\backslash q}\ \sum_{\substack{a_1(\operatorname{mod}q)\\ \text{НОД}(a_1,q)=l}} e_q(m_1a_1)\times$$
$$\times\sum_{a_2,a_3(\operatorname{mod}q)}\delta_q(a_1a_2a_3-d)e_q(m_2a_2+m_3a_3) =$$
$$= \sum_{l\backslash\text{НОД}(d,q)}\ \sideset{}{^*}\sum_{a_1'(\operatorname{mod}q/l)} e_{q/l}(m_1a_1')\times$$
$$\times\sum_{a_2',a_3'(\operatorname{mod}q/l)}\delta_{q/l}\left(a_1'a_2'a_3'-\frac{d}{l}\right)e_q(m_2a_2'+m_3a_3')\times$$
$$\times\sum_{b_2',b_3'(\operatorname{mod}l)} e_l(m_2b_2')e_l(m_3b_3') =$$
$$= \sum_{l\backslash\text{НОД}(m_2,m_3,d,q)} l^2\ \sideset{}{^*}\sum_{a_1'(\operatorname{mod}q/l)} e_{q/l}(m_1a_1')H\left(\frac{m_2}{l},\frac{m_3}{l},\frac{d}{l}\overline{a_1'};\frac{q}{l}\right).$$

С помощью тождества (1) последнее выражение преобразуется к виду

$$\sum_{l\backslash\text{НОД}(m_2,m_3,d,q)} l^2 \sum_{t\backslash\text{НОД}(m_3/l,\,d/l,q/l)} t\times$$
$$\times\sideset{}{^*}\sum_{a_1'(\operatorname{mod}q/l)} e_{q/l}(m_1a_1')S\left(\frac{m_2}{l},\frac{m_3d}{(lt)^2}\overline{a_1'};\frac{q}{lt}\right).$$

Осталось только воспользоваться следующим утверждением.

Л е м м а. *Пусть $t\backslash q$ и $f\colon \mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ – периодическая функция с периодом q/t. Тогда для любого целого m*

$$\sideset{}{^*}\sum_{a(\operatorname{mod}q)} e_q(ma)f(\overline{a}) =$$
$$= t\sum_{\substack{r\backslash t\\ \text{НОД}(r,q/t)=1}}\frac{\mu(r)}{r}\delta_{t/r}(m)\sideset{}{^*}\sum_{a(\operatorname{mod}q/t)} e_{q/t}\left(\frac{m}{t/r}a\right)f(\overline{ar}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. С помощью функции $\delta_q(a)$ получаем

$$\sideset{}{^*}\sum_{a\ (\operatorname{mod}q)} e_q(ma)f(\overline{a}) = \sum_{a,b\ (\operatorname{mod}q)}\delta_q(ab-1)e_q(ma)f(b) =$$
$$= \sum_{\substack{a\ (\operatorname{mod}q)\\ \text{НОД}(a,t)=1}} e_q(ma)\sum_{\substack{b'(\operatorname{mod}q/t)\\ b''(\operatorname{mod}t)}}\delta_q(a(b'+(q/t)b'')-1)f(b') =$$
$$= \sum_{\substack{a(\operatorname{mod}q)\\ \text{НОД}(a,t)=1}} e_q(ma)\sum_{b'(\operatorname{mod}q/t)}\delta_{q/t}(ab'-1)f(b')\times$$
$$\times\sum_{b''(\operatorname{mod}t)}\delta_t\left(ab''+\frac{ab'-1}{q/t}\right) =$$
$$= \sum_{\substack{a(\operatorname{mod}q)\\ \text{НОД}(a,t)=1}} e_q(ma)\sum_{b'(\operatorname{mod}q/t)}\delta_{q/t}(ab'-1)f(b') =$$
$$= \sum_{b'(\operatorname{mod}q/t)} f(b')\sum_{r\backslash t}\mu(r)\sum_{a'\ (\operatorname{mod}q/r)}\delta_{q/t}(ra'b'-1)e_{q/r}(ma') =$$
$$= \sum_{b'(\operatorname{mod}q/t)} f(b')\sum_{\substack{r\backslash t\\ \text{НОД}(r,q/t)=1}}\mu(r)\times$$
$$\times\sum_{a''(\operatorname{mod}q/t)}\delta_{q/t}(ra''b'-1)e_{q/r}(ma'')\times$$
$$\times\sum_{a'''(\operatorname{mod}t/r)} e_{t/r}(ma''') =$$
$$= t\sum_{b'(\operatorname{mod}q/t)} f(b')\sum_{\substack{r\backslash t\\ \text{НОД}(r,q/t)=1}}\frac{\mu(r)}{r}\delta_{t/r}(m)\times$$
$$\times\sum_{a''(\operatorname{mod}q/t)}\delta_{q/t}(ra''b'-1)e_{q/t}\left(\frac{m}{t/r}a''\right).$$

Произведя замену $b' = \overline{r}b(\operatorname{mod}q/t)$, получим утверждение леммы.

Тем самым теорема 1 полностью доказана.

Принимая во внимание замечание 1, получим равенство $S(m_1,m_2,m_3;q) = H(1,m_1,m_2,m_3;q)$. Применяя к $H(1,m_1,m_2,m_3;q)$ теорему 1, получим трехмерный аналог тождества Сельберга.

Т е о р е м а 2. *Для любых целых* m_1,m_2 *и* m_3

$$S(m_1,m_2,m_3;q) = \sum_{l,t}\mu(t)\,l^2tS\left(\frac{m_1}{l},1,\frac{m_2m_3}{(lt)^2}\overline{t};\frac{q}{lt}\right),$$

где суммирование проводится по всем натуральным l *и* t, *для которых* $l\backslash$НОД$(m_1,\ m_2,\ m_3,\ q)$, $t\backslash$НОД$\left(\frac{m_2}{l},\frac{m_3}{l},\frac{q}{l}\right)$ *и* НОД$\left(t,\frac{q}{lt}\right)=1$.

З а м е ч а н и е 2. Многомерный аналог тождества Сельберга из работы [5] ошибочен. Его доказательство основано на лемме (с. 318), которая при простом $q = d$ приводит к неверному равенству

$$\sum_{y(\mathrm{mod}\,q)}^{*} e_q(ay) = q\delta_q(a).$$

З а м е ч а н и е 3. Из результатов работы [8] с помощью теорем 1 и 2 получается аналог неравенства (3)

$$|H(m_1,m_2,m_3,d;q)| \le$$
$$\le \tau(q')\tau_3(q)\text{НОД}(m_1d,m_2d,m_3d;q)q,$$

где q' = НОД$(d,\ q)$. При $d = 1$ оно превращается в аналог неравенства (4)

$$|S(m_1,m_2,m_3;q)| \le \tau_3(q)\,\text{НОД}(m_1,m_2,m_3;q)\,q.$$

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование второго автора (теорема 1) выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18–41–05001).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Smith R.A.* The generalized divisor problem over arithmetic progressions // Mathematische Annalen. 1982. V. 260. P. 255–268.
2. *Heath-Brown D.R.* The fourth power moment of the Riemann zeta function // Proc. London Mathematical Society. 1979. V. 38. № 3. P. 385–422.
3. *Selberg A.* Über die Fourierkoeffizienten elliptischer Modulformen negativer Dimension. Neuvième Congrès Math Scandinaves. Helsinki, 1938. P. 320–322.
4. *Кузнецов Н.В.* Гипотеза Петерсона для параболических форм веса нуль и гипотеза Линника. Суммы сумм Клостермана // Матем. сб. 1980. Т. 111(153). № 3. С. 334–383.
5. *Smith R.A.* A generalization of Kuznietsov's identity for Kloosterman sums // C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada. 1980. V. 2. № 6. P. 315–320.
6. *Устинов А.В.* О числе решений сравнения $xy \equiv l$ (mod$q$) под графиком дважды непрерывно дифференцируемой функции // Алгебра и анализ. 2008. Т. 20. № 5. С. 186–216.
7. *Estermann T.* On Kloosterman's sum // Mathematika. 1961. V. 8. P. 83–86.
8. *Smith R.A.* On n-dimensional Kloosterman sums // J. Number Theory. 1979. V. 11. P. 324–343.

THREE-DIMENSIONAL ANALOGUES OF HEATH-BROWN AND SELBERG IDENTITIES

Corresponding Member of the RAS V. A. Bykovskii[a] and A. V. Ustinov[b]

[a] *Khabarovsk Division of the Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, Khabarovsk, Russian Federation*

[b] *Pacific National University, Khabarovsk, Russian Federation*

In this work we prove analogues of Heath-Brown and Selberg identities for three-dimensional Kloosterman sums.

Keywords: analytic number theory, Kloosterman sums, estimates of trigonometric sums