ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 494, с. 5–8

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.4

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ПЛОСКИХ ОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ С НЕГЛАДКИМИ БОКОВЫМИ ГРАНИЦАМИ

© 2020 г. Е. А. Бадерко[1,*], М. Ф. Черепова[2,]**

Представлено академиком РАН Е.И. Моисеевым 26.06.2020 г.
Поступило 10.07.2020 г.
После доработки 10.07.2020 г.
Принято к публикации 30.07.2020 г.

Рассмотрены первая и вторая начально-краевые задачи для одномерных по пространственной переменной параболических по Петровскому систем второго порядка с переменными коэффициентами в ограниченной области с негладкими боковыми границами. Установлена единственность классических решений этих задач в пространстве функций, непрерывных вместе с пространственной производной первого порядка в замыкании области. Используется метод граничных интегральных уравнений.

Ключевые слова: параболическая система, начально-краевая задача, единственность классического решения, негладкая боковая граница

DOI: 10.31857/S2686954320050288

Рассматриваются первая и вторая начально-краевые задачи для одномерных по пространственной переменной x параболических по Петровскому [1] систем второго порядка в ограниченной области Ω с негладкими, вообще говоря, боковыми границами. В работах [2–4] получены теоремы о существовании и свойствах классических решений u этих задач. В настоящей работе устанавливается единственность классических решений таких задач в классе $C^{1,0}(\bar{\Omega})$ функций, непрерывных в $\bar{\Omega}$ вместе с пространственной производной первого порядка. В случае области с гладкими боковыми границами однозначная разрешимость указанных задач в классе Гёльдера $H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{\Omega})$ следует из [5] (см. также [6, с. 706–707]). Если боковые границы области негладкие, то в случае одного уравнения единственность решения первой начально-краевой задачи следует из принципа максимума (см., например, [7]), а единственность решения второй начально-краевой задачи получена в [8, 9] с помощью теоремы о знаке косой производной. В [10, 11] установлена единственность решения первой начально-краевой задачи для одномерной параболической системы второго порядка с постоянными коэффициентами в полуограниченной области Ω с негладкой боковой границей в классе $C^{1,0}(\bar{\Omega})$ при дополнительном условии на старшую производную $\partial_x^2 u$ решения, а также в классе Гёльдера $H^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\bar{\Omega})$. Заметим, что для систем не имеет места, вообще говоря, принцип максимума (см. [12]).

В полосе $D = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T)\}$, $0 < T < +\infty$, рассмотрим линейный параболический по И.Г. Петровскому матричный оператор

$$Lu = \partial_t u - \sum_{k=0}^{2} A_k(x,t)\partial_x^k u,$$
$$u = (u_1, \ldots, u_m), \quad m > 1,$$

где $A_k = \|a_{ij}^k\|_{i,j=1}^m$ – матрицы размерности $m \times m$, элементы которых есть вещественные функции, определенные в $\bar{D}$ и удовлетворяющие условиям:

а) собственные числа μ_r матрицы A_2 подчиняются неравенству $\operatorname{Re}\mu_r(x,t) \geq \delta$ для некоторого $\delta > 0$ и всех $(x,t) \in \bar{D}$, $r = 1, 2, \ldots, m$;

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия*
[2] *Национальный исследовательский университет "Московский энергетический институт", Москва, Россия*
**E-mail: baderko.ea@yandex.ru*
***E-mail: CherepovaMF@mpei.ru*

б) $a_{ij}^k \in H^{\alpha,\alpha/2}(\bar{D}), \alpha \in (0,1),\ i, j = 1, 2, \ldots, m,\ k = 0, 1, 2$, где $H^{\beta,\beta/2}(\bar{D})$ (β – нецелое число) – пространство Гёльдера ([6, с. 16]).

В D выделяется область $\Omega = \{(x,t) \in D : g_1(t) < x < g_2(t)\}$ с негладкими боковыми границами $\Sigma_k = \{(x,t) \in \bar{D} : x = g_k(t)\}$, $k = 1, 2$, где функции g_k удовлетворяют условиям:

$$|g_k(t + \Delta t) - g_k(t)| \le K|\Delta t|^{(1+\alpha)/2}, \quad t, t + \Delta t \in [0,T], \quad k = 1,2, \tag{1}$$

$$g_1(t) < g_2(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{2}$$

В Ω ставится задача отыскания классического решения системы

$$Lu = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{3}$$

удовлетворяющего начальному условию

$$u(x,0) = 0, \quad g_1(0) \le x \le g_2(0) \tag{4}$$

и одному из граничных условий

$$u(g_k(t),t) = \psi_k(t), \quad 0 \le t \le T, \quad k = 1,2, \tag{5}$$

или

$$\partial_x u(g_k(t),t) = \theta_k(t), \quad 0 \le t \le T, \quad k = 1,2. \tag{6}$$

Определим следующие функциональные пространства. Через $\underset{0}{C}[0,T]$ обозначим пространство вектор-функций $\psi: [0,T] \to R^m$, непрерывных на $[0, T]$, для которых ψ при этом $\|\psi; [0, T]\|^0 = \max\limits_{[0,T]}|\psi|$. Пусть

$$\partial^{1/2}\psi = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int_0^t (t - \tau)^{-1/2}\psi(\tau)\,d\tau, \quad t \in [0,T],$$

есть оператор дробного дифференцирования порядка 1/2. Через $\underset{0}{C}^{1/2}[0,T]$ обозначим [2, 3] пространство вектор-функций $\psi \in \underset{0}{C}[0,T]$, для которых существует $\partial^{1/2}\psi \in \underset{0}{C}[0,T]$; при этом $\|\psi; [0, T]\|^{1/2} = \max\limits_{[0,T]}|\psi| + \max\limits_{[0,T]}|\partial^{1/2}\psi|$. Здесь и далее для любого вектора b под $|b|$ понимаем максимум из модулей компонент b.

Через $H^{\alpha/2}[0,T]$ обозначим пространство непрерывных вектор-функций $\psi: [0,T] \to R^m$, для которых конечна величина

$$|\psi; [0,T]|^{\alpha/2} = \max_{[0,T]}|\psi| + \sup_{(0,T)}\{|\Delta_t\psi||\Delta t|^{-\alpha/2}\}.$$

Через $\underset{0}{C}(\bar{\Omega})$ обозначим пространство непрерывных вектор-функций $u: \bar{\Omega} \to R^m$, для которых $u(x,0) = 0$, при этом $\|u; \Omega\|^0 = \max\limits_{\Omega}|u|$. Через $\underset{0}{C}^{1,0}(\bar{\Omega})$ обозначим пространство вектор-функций $u \in \underset{0}{C}(\bar{\Omega})$, для которых $\partial_x u \in \underset{0}{C}(\bar{\Omega})$, при этом $\|u;\ \Omega\|^{1,0} = \max\limits_{\Omega}|u| + \max\limits_{\Omega}|\partial_x u|$. Под значениями вектор-функций и их производных на границе области Ω понимаем их предельные значения “изнутри” Ω.

Существование классических решений задач (3)–(5) и (3), (4), (6) при сформулированных условиях на коэффициенты системы и боковые границы области установлено в [2, 3] и [4], соответственно, если граничные функции $\psi_k \in \underset{0}{C}^{1/2}[0,T]$, $k = 1, 2$ и $\theta_k \in \underset{0}{C}[0,T]$, $k = 1,2$. В этих работах получено также интегральное представление решений в виде суммы векторных параболических потенциалов простого слоя. Основной результат настоящей работы – следующие теоремы единственности.

Т е о р е м а 1. *Пусть выполнены условия* а), б), (1), (2). *Пусть* u *– классическое решение задачи*

$$Lu = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u|_{\Sigma_k} = 0, \quad k = 1,2,$$

такое, что $u \in \underset{0}{C}^{1,0}(\bar{\Omega})$. *Тогда* $u \equiv 0$ *в* $\bar{\Omega}$.

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнены условия* а), б), (1), (2). *Пусть* u *– классическое решение задачи*

$$Lu = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u|_{t=0} = 0, \quad \partial_x u|_{\Sigma_k} = 0, \quad k = 1,2,$$

такое, что $u \in \underset{0}{C}^{1,0}(\bar{\Omega})$. *Тогда* $u \equiv 0$ *в* $\bar{\Omega}$.

З а м е ч а н и е. Если усилить требование на боковые границы области, а именно, если $g_k \in H^{1+\alpha/2}[0,T]$, $k = 1, 2$, т.е. функции g_k дифференцируемы на $[0, T]$ и их производные принадлежат пространству $H^{\alpha/2}[0,T]$, то из [5] вытекает единственность решения рассматриваемых задач в классе Гёльдера $\underset{0}{H}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{\Omega})$. В случае параболического оператора с постоянными коэффициентами и полуограниченной области теорема 1 получена в [10, 11] при дополнительном условии на старшую производную $\partial_x^2 u$ решения.

Для доказательства теорем 1, 2 сначала с помощью метода работ [10, 11] получаем теоремы единственности решений первой и второй начально-краевых задач для оператора с дифференцируемыми по x коэффициентами. Затем рассматриваем оператор со “сглаженными” коэффициентами, зависящими от параметра r,

$$L^{(r)}u = \partial_t u - \sum_{k=0}^{2} A_k^{(r)}(x,t)\partial_x^k u,$$

где $A_k^{(r)} = \|a_{ij}^{k(r)}\|_{i,j=1}^m$. Коэффициенты оператора $L^{(r)}$ получаются стандартным образом с помощью свертки с гладкой функций (“шапочкой”). Для достаточно малых r коэффициенты оператора $L^{(r)}$ удовлетворяют условию а) с постоянной параболичности $\frac{\delta}{2}$ равномерно по r и удовлетворяют условию б). Кроме того, $a_{ij}^{k(r)} \to a_{ij}^k$ при $r \to 0$ равномерно на любом компакте из D.

Далее доказываем теорему 2. Фиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$, произвольную точку $(x_0, t_0) \in \Omega$ и рассматриваем область $\Omega_d = \{(x,t) \in \Omega: g_1(t) + d < x < g_2(t) - d,\ d < t < T\}$ такую, что $(x_0, t_0) \in \Omega_d$ для достаточно малого $d \in (0,T)$. Обозначим через $\overline{u}$ – продолжение вектор-функции u с $\bar{\Omega}$ на $\bar{D}$ с сохранением нормы $\|\cdot\|^{1,0}$ (см. [6, с. 342]), причем такое, что $\overline{u}(x,0) = \partial_x \overline{u}(x,0) = 0,\ \ x \in \mathbb{R}$. Рассматриваем “сглаженные” вектор-функции $u_s(x,t)$ такие, что $u_s(x,t) \to \overline{u}(x,t)$, $s \to 0$, равномерно на любом компакте из D. Для любых $0 < s < \frac{d}{2}$ и $r > 0$ вектор-функция u_s является решением задачи

$$L^{(r)} v = f_s \quad \text{в} \quad \Omega_d,$$
$$v(x,d) = h_s(x), \quad g_1(d) + d \le x \le g_2(d) - d,$$
$$\partial_x v(g_1(t) + d, t) = \theta_s^1(t), \quad \partial_x v(g_2(t) - d, t) = \theta_s^2(t),$$
$$d \le t \le T,$$

где $f_s(x,t) = L^{(r)} u_s(x,t)$, $h_s(x) = u_s(x,d)$, $\theta_s^1(t) = \partial_x u_s(g_1(t) + d, t)$, $\theta_s^2(t) = \partial_x u_s(g_2(t) - d, t)$. Из работы [4] и в силу теоремы единственности для оператора с гладкими коэффициентами и свойств параболических потенциалов [3, 4, 13] следует, что для каждого $0 < s < \frac{d}{2}$ вектор-функцию u_s можно представить в виде суммы векторных параболических потенциалов простого слоя, оценивая которые, получаем, что найдутся достаточно малые числа $d > 0$, $s_0 = s_0(d) < \frac{d}{2}$ и $r = r(d) > 0$ такие, что $|u_s(x_0, t_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ для любого $s \le s_0$. Отсюда, учитывая, что $|u_s(x,t) - \overline{u}(x,t)| < Cs$, $(x,t) \in \bar{D}$, для любого $s > 0$ и в силу произвольности ε, следует утверждение теоремы 2. Затем, используя [3] и теорему 2, получаем утверждение теоремы 1.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают благодарность академику РАН Е.И. Моисееву и проф. И.С. Ломову за полезные обсуждения.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа М.Ф. Череповой выполнена в рамках исполнения государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FSWF-2020-0022).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Петровский И.Г.* О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюлл. МГУ, секц. А. 1938. Т. 1. Вып. 7. С. 1–72.
2. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Первая краевая задача для параболических систем в плоских областях с негладкими боковыми границами // ДАН. 2014. Т. 458. № 4. С. 379–381.
3. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Потенциал простого слоя и первая краевая задача для параболической системы на плоскости // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 2. С. 198–208.
4. *Тверитинов В.А.* Решение второй краевой задачи для параболической системы с одной пространственной переменной методом граничных интегральных уравнений // Деп. в ВИНИТИ АН СССР. 15.11.89. № 6906-В89.
5. *Солонников В.А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. МИАН. 1965. Т. 83. Ч. 3.
6. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
7. *Ильин А.М., Калашников А.С., Олейник О.А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа // УМН. 1962. Т. 17. Вып. 3 (105). С. 3–146.
8. *Камынин Л.И., Химченко Б.Н.* О приложениях принципа максимума к параболическим уравнениям 2-го порядка // ДАН СССР. 1972. Т. 204. № 3. С. 529–532.
9. *Камынин Л.И., Химченко Б.Н.* Об аналогах теоремы Жиро для параболического уравнения 2-го порядка // Сиб. мат. журнал. 1973. Т. 14. № 1. С. 86–110.
10. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Единственность решения первой начально-краевой задачи для параболических систем на плоскости в модельном случае // ДАН. 2018. Т. 483. № 3. С. 247–249.
11. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* О единственности решения первой начально-краевой задачи для параболических систем с постоянными коэффициентами в полуограниченной области на плоскости // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 5. С. 673–682.
12. *Мазья В.Г., Кресин Г.И.* О принципе максимума для сильно эллиптических и параболических систем второго порядка с постоянными коэффициентами // Матем. сб. 1984. Т 125 (167). № 4 (12). С. 458–480.
13. *Тверитинов В.А.* Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка // Деп. в ВИНИТИ АН СССР. 02.09.88. № 6850-В88.

UNIQUENESS OF SOLUTIONS TO INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR PARABOLIC SYSTEMS IN THE PLANE BOUNDED DOMANS WITH NONSMOOTH LATERAL BOUNDARIES

E. A. Baderko[a] and M. F. Cherepova[b]

[a]*Lomonosov Moscow State University, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation*
[b]*National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Moscow, Russian Federation*
Presented by Academician of the RAS E.I. Moiseev

We consider initial boundary value problems with boundary conditions of the first or the second kind for one-dimensional (with respect to a spatial variable) Petrovsky parabolic systems of the second order with variable coefficients in a bounded domain with nonsmooth lateral boundaries. The uniqueness theorems we establish in the class of regular solutions being continuous in the closure of the domain together with their spatial derivative of the first order, using boundary integral equations method.

Keywords: parabolic systems, initial boundary value problems, uniqueness of regular solutions, nonsmooth lateral boundaries