ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 493, с. 13–17

МАТЕМАТИКА

УДК 515.124, 515.126.4, 515.126.83

СОХРАНЕНИЕ НУЛЕЙ У СЕМЕЙСТВА МНОГОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ И ПРИЛОЖЕНИЯ К ТЕОРИИ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК И СОВПАДЕНИЙ

 Ю. Н. Захарян[1,*], Т. Н. Фоменко[1,]**

Представлено академиком РАН С. В. Матвеевым 23.05.2020 г.
Поступило 23.05.2020 г.
После доработки 23.05.2020 г.
Принято к публикации 02.06.2020 г.

Доказана теорема о сохранении существования нулей у параметрического семейства многозначных (α, β)-поисковых функционалов на открытом подмножестве метрического пространства. Получен ряд следствий о сохранении существования прообразов замкнутого подпространства при действии параметрического семейства многозначных отображений, о сохранении существования точек совпадения, общих неподвижных точек конечного набора параметрических семейств отображений. Введено понятие пары многозначных отображений типа Замфиреску, получена теорема о совпадениях такой пары отображений, а также теорема о сохранении существования совпадений у параметрического семейства таких пар отображений. Из полученных результатов вытекают несколько известных теорем.

Ключевые слова: параметрическое семейство функционалов, многозначное отображение, неподвижная точка, точка совпадения, отображение Замфиреску, пара отображений типа Замфиреску, сохранение существования совпадений, параметрическое семейство отображений

DOI: 10.31857/S2686954320040220

Доказана теорема о сохранении, при изменении числового параметра, существования нулей у параметрического семейства многозначных (α, β)-поисковых функционалов на открытом подмножестве метрического пространства. Доказательство основано на одной из версий каскадного принципа поиска нулей функционалов, предложенных в [1, 2].

Из этого основного результата выводится ряд следствий о сохранении существования на заданном открытом подмножестве прообразов замкнутого подпространства метрического пространства-образа при действии параметрического семейства многозначных отображений, о сохранении существования точек совпадения, общих неподвижных точек конечного набора параметрических семейств многозначных отображений. Подобные задачи о сохранении существования неподвижных точек и совпадений рассматривались в [3] для семейств многозначных отображений упорядоченных множеств.

Кроме того, в работе вводится новое понятие пары многозначных отображений типа Замфиреску. Получена теорема о существовании совпадений у такой пары отображений, обобщающая результаты [4], а также теорема о сохранении существования совпадений у параметрического семейства пар многозначных отображений типа Замфиреску при изменении числового параметра.

В качестве простого частного случая из полученных результатов следует известная теорема о сохранении существования неподвижных точек так называемого сжимающего семейства многозначных отображений М. Фригон и А. Гранаса [5, 6].

Приведем необходимые обозначения. Пусть $(X, d), (Y, \rho)$ – метрические пространства. Будем обозначать $C(X)$ – совокупность непустых замкнутых подмножеств X, $CB(X)$ – совокупность непустых замкнутых ограниченных подмножеств X. Для любых непустых подмножеств A, B множества X

$$d(A, B) := \inf\{d(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: yuri.zakharyan@gmail.com*
***E-mail: tn-fomenko@yandex.ru*

обозначает расстояние между подмножествами,

$$d(a,B) := \inf\{d(a,b) \mid b \in B\} = d(\{a\}, B)$$

расстояние от точки a до подмножества B,

$$h(A,B) := \sup_{a \in A} d(a,B)$$

отклонение подмножества A от подмножества B, расстояние Хаусдорфа между подмножествами A и B обозначается

$$H(A,B) := \max\{h(A,B), h(B,A)\}.$$

Через $B(a,r) = \{x \in X \mid d(a,x) \le r\}$ обозначается замкнутый шар радиуса $r > 0$ с центром в точке $a \in X$. Две стрелочки $\rightrightarrows$ обозначают многозначное отображение. Символом $\subset$ ($\subseteq$) будем обозначать отношение строгого (нестрогого) включения.

Общей неподвижной точкой многозначных отображений $F_k\colon X \rightrightarrows X$, $1 \le k \le m$, называется точка $x \in X$ такая, что $x \in \bigcap_{k=1}^{m} F(x)$. Точкой совпадения отображений $F_k\colon X \rightrightarrows Y$, $1 \le k \le m$, называется такая точка $x \in X$, что $\bigcap_{k=1}^{m} F(x) \ne \phi$. Множество таких точек обозначается $\mathrm{Coin}(F_1, \ldots, F_m)$.

Следующие понятия введены в [1, 2].

Пусть $\Phi\colon X \rightrightarrows \mathbb{R}_+$ — многозначный функционал. График $\mathrm{Graph}(\Phi) := \{(x,c) \in X \times \mathbb{R}_+ \mid c \in \Phi(x)\}$ функционала Φ называется $\{0\}$-полным, если всякая фундаментальная последовательность $\{(x_n, c_n)\} \subseteq \mathrm{Graph}(\Phi)$ такая, что $c_n \to 0$, сходится к некоторому элементу $(\xi, 0) \in \mathrm{Graph}(\Phi)$, т.е. $0 \in \Phi(\xi)$, другими словами

$$\xi \in \mathrm{Nil}(\Phi) := \{x \in X \mid 0 \in \Phi(x)\}.$$

График $\mathrm{Graph}(\Phi)$ называется $\{0\}$-замкнутым, если для всякой последовательности $\{(x_n, c_n)\} \subseteq \subseteq \mathrm{Graph}(\Phi)$, сходящейся к некоторому элементу $(\xi, 0)$, верно, что $(\xi, 0) \in \mathrm{Graph}(\Phi)$, т.е. $\xi \in \mathrm{Nil}(\Phi)$. Фундаментальность и сходимость последовательностей элементов графика рассматриваются относительно метрики $D\colon (X \times \mathbb{R}_+)^2 \to \mathbb{R}_+$, где

$$D((x',c'),(x'',c'')) = d(x',x'') + |c' - c''|.$$

Следующее понятие есть небольшая модификация понятия, введенного в [2]. Пусть (X,d) — метрическое пространство, $Y \subseteq X$, $0 \le \beta < \alpha$. Многозначный функционал $\Phi\colon Y \rightrightarrows \mathbb{R}_+$ называется (α,β)-поисковым на Y, если для любой точки $x \in Y$ и любого значения $c \in \Phi(x)$ существует точка $x' \in X$, для которой $d(x,x') \le \frac{1}{\alpha}c$, а если $x' \in Y$, то существует значение $c' \in \Phi(x')$ такое, что $c' \le \frac{\beta}{\alpha}c$.

Введем следующее понятие. Пусть (X,d) — метрическое пространство, $Y \subseteq X$, и $\theta\colon [0;1] \to \mathbb{R}$ — непрерывная возрастающая функция. Параметрическое семейство многозначных функционалов

$$\Phi = \{\Phi_t\colon Y \rightrightarrows \mathbb{R}_+\}_{t \in [0;1]}$$

будем называть θ-*непрерывным*, если для каждого $x \in X$, любых $t', t'' \in [0;1]$ и любого $c' \in \Phi_{t'}(x)$ существует такое значение $c'' \in \Phi_{t''}(x)$, что

$$|c' - c''| \le |\theta(t') - \theta(t'')|.$$

Следующее утверждение есть модификация обобщенного локального принципа каскадного поиска нулей функционала, доказанного в [2].

Теорема 1. *Пусть (X,d) — метрическое пространство, $Y \subseteq X$, $\Phi\colon Y \rightrightarrows \mathbb{R}_+$ — многозначный функционал, являющийся (α,β)-поисковым на Y, с $\{0\}$-полным графиком, $0 \le \beta < \alpha$. Пусть заданы $x_0 \in Y$, $c_0 \in \Phi(x_0)$ и $r > 0$ такие, что*

$$B(x_0, r) \subseteq Y, \quad c_0 \le \alpha\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) r.$$

Тогда существует точка $\xi \in B(x_0, r)$ такая, что $0 \in \Phi(\xi)$.

Используя теорему 1 и лемму Куратовского—Цорна, удается доказать следующее основное утверждение.

Теорема 2. *Пусть (X,d) — метрическое пространство, $U \subset X$ — открытое подмножество X, $\theta\colon [0;1] \to \mathbb{R}$ — непрерывная возрастающая функция. Пусть задано θ-непрерывное параметрическое семейство $\Phi = \{\Phi_t\colon \overline{U} \rightrightarrows \mathbb{R}_+\}_{t \in [0;1]}$ многозначных (α, β)-поисковых на $\overline{U}$ функционалов с $\{0\}$-полными графиками. Пусть множество $M = M_U(\Phi) := \{(x,t) \mid x \in U$, $0 \in \Phi_t(x)\}$ замкнуто. Тогда если существует элемент вида $(x_0, 0) \in M$, то существует и элемент вида $(x_1, 1) \in M$.*

На теореме 2 основаны доказательства следующих теорем 3, 4, 6.

Пусть (X,ρ), (Y,d) — метрические пространства, $Q \subseteq Y$ — замкнутое подпространство в Y, и $F\colon X \to CB(Y)$. График $\mathrm{Graph}(F)$ называется Q-*полным*, если всякая фундаментальная последовательность $\{(x_n, y_n)\} \subseteq \mathrm{Graph}(F)$ такая, что $d(y_n, Q) \to 0$, сходится к некоторому элементу $(\xi, \eta) \in \mathrm{Graph}(F)$.

Т е о р е м а 3. *Пусть* (X,ρ), (Y,d) — *метрические пространства*, $Q \subseteq Y$ — *замкнутое подпространство в* Y, $U \subset X$ — *открытое подмножество* X. *Пусть* $T = \{T_t\}_{t\in[0;1]}$ — *параметрическое семейство многозначных отображений* $T_t\colon \overline{U} \to C(Y)$. *Пусть для некоторых чисел* α, β, $0 \le \beta < \alpha$, *непрерывной возрастающей функции* $\theta\colon [0;1] \to \mathbb{R}$ *и любого* $t \in [0;1]$ *выполнены следующие условия*:

1) *график* $\mathrm{Graph}(T_t)$ *является* Q-*полным*;

2) *для любого* $x \in \overline{U}$ *и для любого* $y \in T_t(x)$ *существует* $x' \in X$ *такой, что*

$$\rho(x,x') \le \frac{1}{\alpha} d(y,Q),$$

и если $x' \in \overline{U}$, *то существует* $y' \in T_t(x')$, *для которого*

$$d(y',Q) \le \frac{\beta}{\alpha} d(y,Q);$$

3) $T_t^{-1}(Q) \cap \partial U = \phi$, *где* ∂U — *граница* U.

Пусть, кроме того,

$$H(T_{t'}(x),T_{t''}(x)) \le |\theta(t'') - \theta(t')|,$$

$\forall t',t'' \in [0;1]$, $\forall x \in \overline{U}$. *Тогда, если* $T_0^{-1}(Q) \ne \phi$, *то* $T_1^{-1}(Q) \ne \phi$.

Отметим, что если в условиях теоремы 3 подпространство $Q = \{y_0\}$ — точка $y_0 \in Y$, то утверждается существование семейства $\{x_t\}_{t\in[0;1]}$ решений параметрического включения вида $T_t(x) \ni y_0$.

Следующая теорема решает задачу о сохранении существования совпадений у конечного набора параметрических семейств отображений.

Т е о р е м а 4. *Пусть* (X,ρ), (Y,d) — *метрические пространства*, $U \subset X$ — *открытое подмножество* X. *Пусть заданы параметрические семейства отображений*

$$S = \{S_t \,|\, S_t\colon X \to CB(Y)\}_{t\in[0;1]}$$

и

$$T^k = \{T_t^k \,|\, T_t^k\colon \overline{U} \to CB(Y)\}_{t\in[0;1]}, \quad 1 \le k \le m.$$

Пусть для некоторых $0 \le \beta < \alpha$, $\gamma \ge 1$, $1 < q < \dfrac{\alpha\gamma}{\beta}$ *и некоторой непрерывной возрастающей функции* θ: $[0;1] \to \mathbb{R}$ *выполнены следующие условия*:

1) *график* $\mathrm{Graph}(S_t|_{\overline{U}}) = \{(x,y) \in \overline{U} \times Y | y \in S_t(x)\}$ *полон, и* $T_t^m(\overline{U}) \subseteq S_t(X)$, $\forall t \in [0;1]$;

2) *для любой фундаментальной последовательности* $\{x_n\} \subseteq \overline{U}$, *всякая последовательность* $\{y_n\}$, *где* $y_n \in S_t(x_n)$, *является фундаментальной*, $\forall t \in [0;1]$;

3) $\max\limits_{1\le k\le m}\{H(T_t^k(x'),T_t^k(x''))\} \le \dfrac{\beta}{\alpha\gamma q} d(S_t(x'),S_t(x''))$, $\forall t \in [0;1]$, $\forall x',x'' \in \overline{U}$;

4) *для любого* $y^0 \in S_t(x)$ *верно, что* $H(\{y^0\}, T_t^k(x)) \le \gamma d(y^0, \ T_t^m(x))$, $1 \le k \le m-1$, $\forall t \in [0;1]$, $\forall x \in \overline{U}$;

5) $\rho(x',x'') \le \dfrac{1}{\alpha} d(S_t(x'),S_t(x''))$, $\forall t \in [0;1]$, $\forall x'$, $x'' \in X$;

6) $\max\limits_{1\le k\le m}\{H(T_{t'}^k(x),T_{t''}^k(x))\} + H(S_{t'}(x), \ S_{t''}(x)) \le |\theta(t'') - \theta(t')|$, $\forall x \in \overline{U}$, $\forall t',t'' \in [0;1]$;

7) $\mathrm{Coin}(S_t,T_t^1,\ldots,T_t^m) \cap \partial U = \phi$.

Тогда, если $\mathrm{Coin}(S_0,T_0^1,\ldots,T_0^m) \ne \phi$, *то* $\mathrm{Coin}(S_1, T_1^1,\ldots,T_1^m) \ne \phi$.

Предположив в условиях теоремы 4, что $Y = X$, отображение $S_t\colon X \to X$ тождественно при всех $t \in [0;1]$, и (без ограничения общности) $0 \le \beta < \alpha \le 1$, получаем теорему о сохранении существования общих неподвижных точек у семейства многозначных отображений на открытом подмножестве метрического пространства. Соответствующая формулировка здесь не приводится.

Если в условиях теоремы 4 предположить, что $Y = X$ — полное пространство, $0 \le \beta < \alpha \le 1$, $m = 1$, и $S_t = Id_X\colon X \to X$ для любого $t \in [0;1]$, то она превращается в теорему Фригон–Гранаса [5, 6] о сохранении существования неподвижной точки у λ-сжимающего параметрического семейства многозначных отображений, при $\lambda = \dfrac{\beta}{\alpha}$.

Введем понятие пары многозначных отображений типа Замфиреску и рассмотрим задачу о совпадении такой пары отображений.

О п р е д е л е н и е. Пусть (X,ρ), (Y,d) — метрические пространства, и $U \subset X$ — некоторое открытое подмножество в X. Пусть $T\colon \overline{U} \to CB(Y)$, $S\colon X \to CB(Y)$ — два многозначных отображения. Пару отображений (T,S) будем называть п а р о й т и п а З а м ф и р е с к у н а $\overline{U}$, если $T(\overline{U}) \subseteq S(X)$ и при некоторых A, B, C, таких, что $0 \le A < 1$, $0 \le B, C < \dfrac{1}{2}$, для любых точек $x', x'' \in \overline{U}$ выполнено одно из следующих условий:

$$(fz1)\ \ H(T(x'),T(x'')) \le Ad(S(x'),S(x'')),$$

$$(fz2)\ \ H(T(x'),T(x'')) \le$$
$$\le B[d(T(x'),S(x')) + d(T(x''),S(x''))],$$

$$(fz3)\ \ H(T(x'),T(x'')) \le$$
$$\le C[d(T(x'),S(x'')) + d(T(x''),S(x'))].$$

Доказано следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть* (X,ρ), (Y,d) *— полные метрические пространства*, $T,S\colon X \to CB(Y)$ *— пара отображений типа Замфиреску на X. Пусть график* $\mathrm{Graph}(S)$ *замкнут, и для некоторого* $\gamma \ge 1$ *для любых* $x', x'' \in X$ *верно*:

$$\rho(x', x'') \le \gamma d(S(x'), S(x'')).$$

Тогда существует точка совпадения отображений T и S.

Теорема 5 является обобщением соответствующих результатов [4]. Отметим, что ее справедливость вытекает из упомянутого выше обобщенного принципа поиска нулей многозначного функционала [2].

Теперь рассмотрим вопрос о сохранении, на открытом подмножестве метрического пространства, существования точек совпадения у параметрического семейства пар многозначных отображений типа Замфиреску.

Предыдущие результаты позволяют утверждать следующее.

Теорема 6. *Пусть* (X,ρ), (Y,d) *— метрические пространства*, $U \subset X$ *— открытое подмножество в* X. *Пусть заданы параметрические семейства отображений* $T = \{T_t \,|\, T_t\colon \overline{U} \to \mathrm{CB}(Y)\}_{t\in[0;1]}$, $S = \{S_t \,|\, S_t\colon X \to \mathrm{CB}(Y)\}_{t\in[0;1]}$. *Пусть для некоторых* $0 \le A < 1$, $0 \le B$, $C < \frac{1}{2}$, *при любом* $t \in [0;1]$, *пара отображений* (T_t, S_t) *является парой многозначных отображений типа Замфиреску на подмножестве* $\overline{U}$, *для любого* $t \in [0;1]$ *график* $\mathrm{Graph}(S_t|_{\overline{U}}) = \{(x,\, y) \in \overline{U} \times Y \,|\, y \in S_t(x)\}$ *полон, и для всякой фундаментальной последовательности* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{U}$ *любая последовательность вида* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где $y_n \in S_t(x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, *также фундаментальна. Пусть для некоторого* $\gamma \ge 1$, *любого* $t \in [0;1]$ *и любых* $x', x'' \in X$ *верно, что* $\rho(x', x'') \le \gamma d(S_t(x'),\, S_t(x''))$. *Предположим, что для некоторой непрерывной возрастающей функции* $\theta : [0;1] \to \mathbb{R}$, *для любого* $x \in \overline{U}$ *и любых* $t', t'' \in [0;1]$ *выполнено неравенство*

$$H(T_{t'}(x), T_{t''}(x)) + H(S_{t'}(x), S_{t''}(x)) \le |\theta(t'') - \theta(t')|.$$

Пусть, кроме того, для любого $t \in [0;1]$ *на границе* ∂U *множества* U *нет точек совпадения отображений* T_t *и* S_t, *т.е.* $\mathrm{Coin}(T_t, S_t) \cap \partial U = \phi$.

Тогда, если

$$\mathrm{Coin}(T_0, S_0) \cap U \ne \phi,$$

то

$$\mathrm{Coin}(T_1, S_1) \cap U \ne \phi.$$

Если в условиях теоремы 6 положить $Y = X$ и $S_t = Id_X$ — тождественное отображение при любом $t \in [0;1]$, то в качестве следствия получается утверждение о сохранении существования, на открытом подмножестве метрического пространства, неподвижной точки у параметрического семейства многозначных отображений Замфиреску. (Определение и некоторые свойства многозначного отображения Замфиреску даны в [4]. Отметим, что такое отображение не обязано быть сжимающим, и даже не обязано быть непрерывным.)

Легко видеть, что многозначное сжимающее (по метрике Хаусдорфа) отображение является одним из частных случаев многозначного отображения Замфиреску, поэтому, как и из теоремы 4, из только что упомянутого следствия из теоремы 6 вытекает, в качестве частного случая, теорема Фригон—Гранаса [5, 6].

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках направления исследований Московского центра фундаментальной и прикладной математики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фоменко Т.Н.* К задаче каскадного поиска множества совпадений набора многозначных отображений // Матем. заметки. 2009. Т. 86. № 2. С. 304–309.
2. *Фоменко Т.Н.* Каскадный поиск прообразов и совпадений: глобальная и локальная версии // Матем.заметки. 2013. Т. 93. С. 127–143.
3. *Подоприхин Д.А., Фоменко Т.Н.* Сохранение свойства неподвижной точки и свойства совпадения при гомотопии отображений упорядоченных множеств // ДАН. 2017. Т. 477. № 4. С. 402–405.
4. *Neammanee K., Kaevkhao A.* Fixed Point Theorems of Multi-Valued Zamfirescu Mappings // Mathematics Research. 2010. V. 2. № 2. P. 150–156.
5. *Frigon M., Granas A.* Resultats du type de Leray-Schauder pour des contractions multivoques // Topol. Methods Nonlinear Anal. 1994. V. 4. P. 197–208.
6. *Frigon M.* On continuation Methods for Contractive and Nonexpansive Mappings // Recent Advances on Metric Fixed Point Theory (Sevilla, 1995). Univ. of Sevilla. 1996. P. 19–30.

THE ZERO EXISTENCE FOR A FAMILY OF MULTIVALUED FUNCTIONALS, AND APPLICATIONS TO THE THEORY OF FIXED POINTS AND COINCIDENCES

Yu. N. Zakharyan[a] and T. N. Fomenko[a]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS S.V. Matveev

A theorem on the zero existence preservation, for parametric family of multivalued (α, β)-search functionals on an open subset of a metric space, is proved. Several corollaries are obtained on the existence preservation of a closed subspace preimages, of coincidence points, and of common fixed points, under actions of a (a number of) parametric family of mappings. A notion of a Zamfirescu type pair of mappings is introduced, and a coincidence theorem is obtained for such pairs of mappings. In addition, the coincidence existence preservation theorem is obtained, for a parametric family of such pairs of mappings. The obtained results imply several known theorems.

Keywords: parametric family of functionals, multivalued mapping, fixed point, coincidence point, Zamfirescu mapping, Zamfirescu type pair of mappings, coincidence existence preservation, parametric family of mappings