ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 493, с. 38–41

МАТЕМАТИКА

УДК 517.977

КОПРИСОЕДИНЕННЫЕ ОРБИТЫ ТРЕХСТУПЕННЫХ СВОБОДНЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП ЛИ И ЗАДАЧА БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

© 2020 г. А. В. Подобряев[1,*]

Представлено академиком РАН Р.В. Гамкрелидзе 03.06.2020 г.
Поступило 04.06.2020 г.
После доработки 09.06.2020 г.
Принято к публикации 09.06.2020 г.

Для свободных трехступенных нильпотентных групп Ли описаны коприсоединенные орбиты. Двумерные орбиты устроены так же, как и коприсоединенные орбиты групп Гейзенберга и Энгеля. На свободных трехступенных нильпотентных группах Ли рассматривается левоинвариантная задача быстродействия с множеством допустимых скоростей в первом слое алгебры Ли. Изучается поведение нормальных экстремальных траекторий, начальные ковекторы которых лежат на двумерных коприсоединенных орбитах. Оказывается, что при некоторых широких условиях на множество допустимых скоростей (включающих субриманов случай), соответствующие управления периодичны, постоянны или асимптотически постоянны.

Ключевые слова: группа Карно, коприсоединенное представление, задача быстродействия, субриманова геометрия, субфинслерова геометрия

DOI: 10.31857/S2686954320040153

Пусть $\mathfrak{g}$ — трехступенная свободная нильпотентная алгебра Ли. Имеется естественная градуировка

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_3, \quad [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j},$$
$$g_k = 0 \quad \text{при} \quad k > 3.$$

Более того, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ порождена подпространством $\mathfrak{g}_1$, его размерность $r = \dim \mathfrak{g}_1$ называется рангом алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Соответствующая связная и односвязная группа Ли G называется свободной трехступенной группой Карно ранга r. Для таких групп описываются орбиты коприсоединенного представления. Оказывается, что орбиты общего положения являются аффинными подпространствами в коалгебре Ли $\mathfrak{g}^*$. Остальные орбиты задаются квадратичными функциями на некоторых аффинных подпространствах.

Двумерные коприсоединенные орбиты в некотором смысле организованы так же, как коприсоединенные орбиты простейших групп Карно ступеней 2 и 3 — групп Гейзенберга и Энгеля.

Затем рассматривается задача быстродействия со множеством допустимых скоростей в первом слое $\mathfrak{g}_1$ алгебры Ли. Предполагается, что множество допустимых скоростей — строго выпуклый компакт, содержащий начало координат внутри, граница поляры которого принадлежит классу W^2_∞. В частности, субримановы [1] и широкий класс субфинслеровых задач [2, 3] можно рассматривать как такие задачи быстродействия. Изучается простейший интегрируемый случай — нормальные экстремальные траектории с начальными ковекторами из двумерных коприсоединенных орбит. Оказывается, что соответствующие управления периодичны, постоянны или асимптотически постоянны.

1. КОПРИСОЕДИНЕННЫЕ ОРБИТЫ

На коалгебре Ли $\mathfrak{g}^*$ имеется пуассонова структура [4]. Обозначим через B_p бивектор Пуассона в точке p, а через $\{\cdot, \cdot\}$ соответствующую скобку Пуассона. Коприсоединенные орбиты являются симплектическими слоями этой пуассоновой структуры. Опишем сначала коприсоединенные орбиты общего положения. Для этого приведем полную систему функций Казимира (функций, постоянных на коприсоединенных орбитах).

Каждый элемент $\xi \in \mathfrak{g}$ определяет линейную функцию $\mathfrak{g}^*$, которая обозначается тем же символом.

[1] *Институт программных систем им. А.К. Айламазяна Российской академии наук, Переславль-Залесский, Ярославская обл., Россия*
**E-mail: alex@alex.botik.ru*

Зафиксируем базисы в слоях алгебры Ли:

$$\mathfrak{g}_1 = \operatorname{span}\{\xi_1, \ldots, \xi_r\},$$
$$\mathfrak{g}_2 = \operatorname{span}\{\eta_1, \ldots, \eta_{d_2}\},$$
$$\mathfrak{g}_3 = \operatorname{span}\{\zeta_1, \ldots, \zeta_{d_3}\}.$$

Т е о р е м а 1. *Если ранг свободной трехступенной группы Карно $r \geq 3$, то имеются функции Казимира двух типов*:

(1) *линейные функции из пространства* $\mathfrak{g}_3$;

(2) *функции из пространства* $\operatorname{Ker} B_p^{12}$, *координаты элементов этого пространства зависят от функций типа* (1).

Полный набор независимых функций Казимира в явном виде:

$$\zeta_1, \ldots, \zeta_{d_3}, \quad F_i = \sum_{j \in J} (-1)^{j-i} \eta_j \det\{\xi_k, \eta_l\}_{k \in \{1,\ldots,r\}}^{l \in J \setminus \{j\}},$$
$$i = 1, \ldots, d_2 - r, \quad J = \{i, \ldots, i + r\}.$$

З а м е ч а н и е 1. Функции F_i линейны на совместных линиях уровня функций ζ_i, поэтому при $r \geq 3$ коприсоединенные орбиты общего положения являются аффинными подпространствами размерности $2r$.

З а м е ч а н и е 2. Среди трехступенных свободных групп Карно исключение для теоремы 1 составляет группа ранга 2 – группа Картана [5]. Здесь помимо функций Казимира типа (1) имеется функция Казимира, квадратичная на поверхностях уровня функций типа (1).

Опишем теперь коприсоединенные орбиты меньших размерностей. Введем для этого следующие обозначения. Будем рассматривать бивектор Пуассона как отображение $B_p\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$. Пусть $B_p^{12}\colon \mathfrak{g}_2 \to \mathfrak{g}_1^*$, где $B_p^{12}(\eta) = B_p(\eta)\big|_{\mathfrak{g}_1}$ для $\eta \in \mathfrak{g}_2$. Аналогично, $B_p^{11}\colon \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_1^*$, где $B_p^{11}(\xi) = B_p(\xi)\big|_{\mathfrak{g}_1}$ для $\xi \in \mathfrak{g}_1$. Обозначим через $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{g}_1$ аннулятор подпространства $\operatorname{Im} B_p^{12} \subset \mathfrak{g}_1^*$, пусть $\mathfrak{h}_2 = \operatorname{Ker} B_p^{11}\big|_{\mathfrak{h}_1}$.

Т е о р е м а 2. *Коприсоединенные орбиты размерностей меньше $2r$ возникают в случае* $\operatorname{rk} B_p^{12} < r$. *Такие коприсоединенные орбиты суть совместные поверхности уровня функций трех типов*:

(1) *линейных функций из пространства* $\mathfrak{g}_3$;

(2) *функций из пространства* $\operatorname{Ker} B_p^{12}$, *эти функции линейны на совместных поверхностях уровня функций типа* (1);

(3) *функций вида* $\gamma - \eta$, *где* $\gamma \in \mathfrak{h}_2$ *и* $\eta \in (B_p^{12})^{-1} B_p^{11}(\gamma)$, *эти функции линейны или квадратичны на совместных поверхностях уровня функций типов* (1), (2).

З а м е ч а н и е 3. Размерность коприсоединенной орбиты равна $2r - (\dim \mathfrak{h}_1 + \dim \mathfrak{h}_2)$.

2. ДВУМЕРНЫЕ КОПРИСОЕДИНЕННЫЕ ОРБИТЫ

Оказывается, что двумерные коприсоединенные орбиты трехступенных свободных групп Карно устроены так же, как такие орбиты для простейших групп Карно ступеней 2 и 3. Эти простейшие группы суть:

1. Группа Гейзенберга H_3 – двуступенная свободная группа Карно ранга 2, базис ее алгебры Ли: $\xi_1, \xi_2, \eta = [\xi_1, \xi_2]$;

2. Группа Энгеля E – трехступенная группа Карно ранга 2, алгебра Ли которой линейно порождается элементами $\xi_1, \xi_2, \eta = [\xi_1, \xi_2], \zeta = [\xi_1, \eta]$.

Т е о р е м а 3. *Пусть* $(\operatorname{Ad}^* G)p \subset \mathfrak{g}^*$ *есть двумерная коприсоединенная орбита трехступенной свободной группы Карно G. Тогда существует инвариантное аффинное подпространство* $\mathscr{A} \subset \mathfrak{g}^*$, *содержащее орбиту* $(\operatorname{Ad}^* G)p$, *на котором действует группа Ли L так*, *что*

(1) *L-орбиты в $\mathscr{A}$ совпадают с коприсоединенными G-орбитами*;

(2) *действие группы L на $\mathscr{A}$ изоморфно коприсоединенному действию группы L*;

(3) *если* $B_p^{12} = 0$, *то* $L \simeq H_3$;

(4) *если* $B_p^{12} \neq 0$, *то* $L \simeq E$, *где* B_p – *бивектор Пуассона в точке* $p \in \mathfrak{g}^*$.

3. ЗАДАЧА БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

Пусть G есть трехступенная свободная группа Карно ранга r. Ее алгебра Ли $\mathfrak{g}$ порождена подпространством $\mathfrak{g}_1 = \operatorname{span}\{\xi_1, \ldots, \xi_r\}$. Рассмотрим левоинвариантные векторные поля $X_i(g) = dL_g \xi_i$, $i = 1, \ldots, r$, где L_g – левый сдвиг на элемент $g \in G$. Пусть $U \subset \mathbb{R}^r$ есть выпуклый компакт, содержащий начало координат внутри. Рассмотрим задачу быстродействия:

$$\dot{g} = \sum_{i=1}^{r} u_i X_i(g), \quad g \in G, \quad u = (u_1, \ldots, u_r) \in U,$$
$$g(0) = \mathrm{id}, \quad g(t_1) = g_1 \in G, \tag{1}$$
$$t_1 \to \min.$$

Заметим, что при $U = -U$ получаем субфинслерову задачу [2, 3]. В частности, если U – эллипсоид, то задача субриманова [1].

Принцип максимума Понтрягина [6, 7] дает необходимые условия оптимальности. Нормальные экстремальные траектории являются проекциями траекторий гамильтонова векторного поля $\mathbf{H}$ на кокасательном расслоении T^*G. Соответствующий гамильтониан имеет вид

$$H(h_1, \ldots, h_r) = \max_{v \in U} \sum_{i=1}^{r} v_i h_i,$$

где функции $h_i = \langle \cdot, X_i \rangle$ суть линейные на слоях T^*G функции спаривания с X_i. Экстремальная траектория, проходящая через единицу группы, определяется своим начальным ковектором — элементом $T^*_{\mathrm{id}}G = \mathfrak{g}^*$. Вертикальная часть гамильтонова векторного поля $\mathbf{H}$ задается уравнением

$$\dot{h} = \{H, h\}. \tag{2}$$

Простейший интегрируемый случай — начальный ковектор экстремальной траектории принадлежит двумерной коприсоединенной орбите. В самом деле, траектория уравнения (2) лежит в пересечении коприсоединенной орбиты и поверхности уровня гамильтониана H (так как гамильтониан является первым интегралом этого уравнения).

4. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ УПРАВЛЕНИЯ НА ДВУМЕРНЫХ КОПРИСОЕДИНЕННЫХ ОРБИТАХ

Предложение 1. *Пусть множество управлений U в задаче* (1) *строго выпукло. Тогда траектории вертикальной части гамильтонова векторного поля* (2) *с начальными ковекторами из двумерной коприсоединенной орбиты являются регулярными кривыми или неподвижными точками.*

В этом случае максимизированный гамильтониан H принципа максимума Понтрягина C^1-гладок на $\mathbb{R}^r \backslash \{0\}$. Вертикальную подсистему гамильтоновой системы можно записать в виде

$$\dot{p} = -B_p \nabla H, \quad p \in \mathfrak{g}^*. \tag{3}$$

Вектор ∇H трансверсален поверхности уровня гамильтонина $H^{-1}(1)$, а подпространство $\operatorname{Ker} B_p$ трансверсально коприсоединенной орбите $(\mathrm{Ad}^*G)p$. Если $\nabla H \notin \operatorname{Ker} B_p$, то $\Gamma = H^{-1}(1) \cap (\mathrm{Ad}^*G)p$ — регулярная кривая в окрестности точки p. Если $\nabla H \in \operatorname{Ker} B_p$, то из уравнения (3) следует, что p — неподвижная точка.

В качестве следствий получаются следующие обобщения на трехступенные свободные группы Карно результатов Ю.Л. Сачкова [8, 9], полученных для двуступенных свободных групп Карно.

Следствие 1. *Пусть множество управлений U строго выпукло, коприсоединенная орбита* $(\mathrm{Ad}^*G)p$ *двумерна и* $B_p^{12} = 0$. *Рассмотрим нормальные экстремальные траектории задачи* (1) *с начальными ковекторами на этой орбите. Тогда соответствующие экстремальные управления периодичны или постоянны.*

Следствие 2. *Пусть множество управлений U строго выпукло и граница его поляры ∂U° класса W^2_∞. Пусть коприсоединенная орбита* $(\mathrm{Ad}^*G)p$ *двумерна и* $B_p^{12} \neq 0$. *Рассмотрим нормальные экстремальные траектории задачи* (1) *с начальными ковекторами на этой орбите. Тогда соответствующие экстремальные управления периодичны, постоянны или асимптотически постоянны.*

Суммируя следствия 1, 2, получаем

Следствие 3. *Рассмотрим задачу быстродействия* (1) *на трехступенной свободной группе Карно. Пусть множество управлений U строго выпукло и граница его поляры ∂U° класса W^2_∞. Тогда экстремальные управления для нормальных экстремальных траекторий с начальными ковекторами на двумерных коприсоединенных орбитах периодичны, постоянны или асимптотически постоянны.*

Следствие 4. *Рассмотрим экстремальную траекторию с начальным ковектором из двумерной коприсоединенной орбиты и периодическим управлением. Эта траектория не оптимальна после периода управления.*

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01387-П) в Институте программных систем им. А.К. Айламазяна Российской академии наук.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Agrachev A., Barilari D., Boscain U.* A comprehensive introduction to sub-Riemannian geometry. Cambridge: Cambridge University Press, 2019. 746 p.
2. *Barilari D., Boscain U., Le Donne E., Sigalotti M.* Sub-Finsler Structures from the Time-Optimal Control Viewpoint for Some Nilpotent Distributions // J. Dynamical and Control Systems. 2017. V. 23. № 3. P. 547–575.
3. *Берестовский В.Н.* Однородные многообразия с внутренней метрикой II // Сибирский математический журнал. 2017. Т. 30. № 2. С. 14–28.
4. *Kirillov A.A.* Lectures on the orbit method. Graduate Studies in Mathematics. 64. Providence, RI: AMS, 2004.
5. *Сачков Ю.Л.* Множество Максвелла в обобщенной задаче Дидоны // Матем. сб. 2006. Т. 197. № 4. С. 123–150.
6. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
7. *Аграчев А.А., Сачков Ю.Л.* Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005. 392 с.
8. *Sachkov Yu.* Periodic controls in step 2 strictly convex sub-Finsler problems // Regular and Chaotic Dynamics. 2020. V. 25. № 1. P. 33–39.
9. *Сачков Ю.Л.* Периодические оптимальные по быстродействию управления на двухступенных свободных нильпотентных группах Ли // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 492. С. 108–111.

COADJOINT ORBITS OF THREE STEP FREE NILPOTENT LIE GROUPS AND TIME-OPTIMAL CONTROL PROBLEM

A. V. Podobryaev[a]

[a] *A. K. Ailamazyan Program Systems Institute of the Russian Academy of Sciences, Pereslavl-Zalesskii, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS R.V. Gamkrelidze

We describe coadjoint orbits for three step free nilpotent Lie groups. It turns out that two-dimensional orbits are arranged as coadjoint orbits of the Heisenberg group and the Engel group. We consider a time-optimal problem on three step free nilpotent Lie groups with the set of admissible velocities in the first level of the Lie algebra. We study a behavior of extremal trajectories with initial covectors in two-dimensional coadjoint orbits. Under some broad conditions (in particular, in the sub-Riemannian case) corresponding extremal controls are periodic, constant or asymptotically constant.

Keywords: Carnot group, coadjoint orbits, time-optimal control problem, sub-Riemannian geometry, sub-Finsler geometry