

УДК 519.245

## НОВАЯ ЯДЕРНО-ПРОЕКЦИОННАЯ СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА В МЕТОДЕ МОНТЕ-КАРЛО

© 2020 г. Член-корреспондент РАН Г. А. Михайлов<sup>1,2, \*</sup>,  
Н. В. Трачева<sup>1,2,\*\*</sup>, С. А. Ухинов<sup>1,2</sup>

Поступило 12.03.2020 г.  
После доработки 23.05.2020 г.  
Принято к публикации 23.05.2020 г.

Ядерная статистическая оценка в методе Монте-Карло обычно оптимизируется на основе предварительного построения “микровыборки” значений исследуемой переменной. Уже для двумерного случая такая оптимизация весьма затруднительна. Предлагается комбинированная (ядерно-проекционная) статистическая оценка двумерной плотности распределения: по первой (основной) переменной – ядерная, по второй – проекционная. При этом для каждого определенного по микровыборке “ядерного” интервала используются статистически оцененные коэффициенты некоторого ортогонального разложения условной плотности на основе предварительных соответствующих результатов для “микроинтервалов”. Важным результатом работы является среднеквадратическая оптимизация такой оценки при сделанных предположениях о скорости сходимости используемого ортогонального разложения. Верификация оценки реализована для двунаправленного распределения потока излучения, прошедшего через слой вещества.

*Ключевые слова:* ядерная статистическая оценка, проекционная оценка, ядерно-проекционная оценка, метод Монте-Карло

DOI: 10.31857/S2686954320040128

Пусть для начала необходимо оценить плотность  $f(x)$  распределения частиц (квантов излучения) по параметру  $x$  в конечном интервале  $x_1, x_2$ . Практически эффективной для этой цели может быть универсальная статистическая ядерная оценка Парзена–Розенблатта [1] с прямоугольным (“равномерным”) ядром (см. также [2]). Она строится на основе статистической оценки функционалов вида

$$J_{\Delta} = \int f(x') I_{\Delta}(x') dx',$$

где  $I_{\Delta}(x')$  – индикатор интервала  $\Delta = \Delta(x) = \left(x - \frac{\delta}{2}, x + \frac{\delta}{2}\right)$ . Предполагается, что постановка задачи допускает построение бернуллиевской

оценки такого функционала путем подсчета числа  $n_{\Delta}$  траекторий  $\Omega$  частиц, не возвратившихся в интервал  $\Delta$ . В задачах теории переноса частиц  $f(x)$  – это, в частности, стохастическая плотность распределения числа частиц в точках их “гибели”, например, вследствие невозвратного вылета из среды. Имеет место статистическая оценка  $J_{\Delta} \approx \frac{n_{\Delta}}{N}$ , где  $N$  – объем выборки  $\{\Omega_k\}$  ( $k = 1, \dots, N$ ).

Средний квадрат погрешности оценки  $f(x) \approx \frac{n_{\Delta}}{N \cdot \delta}$  равен (см., например, [2])

$$\varepsilon^2(x; N, \delta) = E \left[ f(x) - \frac{n_{\Delta(x)}}{N\delta} \right]^2 = D \left( \frac{n_{\Delta}}{N\delta} \right) + \left( f(x) - \frac{J_{\Delta}}{\delta} \right)^2 \approx \frac{f(x)}{N\delta} + (f''(x))^2 \frac{\delta^4}{576} \quad (1)$$

с относительной погрешностью, убывающей до нуля при  $\delta \rightarrow 0$  и  $N\delta \rightarrow \infty$ . Минимизируя (1) соответственно [3], получаем

<sup>1</sup> Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия

<sup>2</sup> Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

\*E-mail: gam@sscc.ru

\*\*E-mail: tnv@osmf.sscc.ru

$$\delta_0^5(x) = \frac{144f(x)}{N(f''(x))^2},$$

$$\varepsilon^2(x; N, \delta_0) \approx \frac{5}{4} \frac{f(x)}{\delta_0(x)N} \asymp N^{-\frac{4}{5}}.$$

Если реализуется весовое моделирование, то здесь  $f(x)$  – плотность распределения квадрата “веса” частиц, посетивших интервал  $\Delta$  [3]. Отметим, что в [3] для оценки  $f(x)$  и  $f''(x)$  была использована наилучшая среднеквадратическая аппроксимация функции  $f(x)$  в интервале  $\Delta_0 \supset \Delta$  с помощью полиномов Лежандра порядков 0, 1, 2. Как и в [4], в работе [3] для оптимизации ядерной оценки была использована “мик로그руппированная” вы-

борка с шагом  $h \ll \frac{\varepsilon}{\max_x |f'(x)|}$ , где  $\varepsilon$  – требуемая погрешность оценки. При этом среднее число операций в алгоритме практически не зависит от  $\delta$ .

1. Распространение этой методики на многомерный случай затруднительно из-за существенного увеличения объема мик로그руппирования [4] и усложнения оптимизации оценки [1]. Поэтому здесь строится комбинированная статистическая оценка аналогичной двумерной плотности  $f(x, y)$ ,  $x \in (x_1, x_2)$ ,  $y \in (y_1, y_2)$  случайного вектора  $(\xi, \eta)$  при  $x_2 - x_1, y_2 - y_1 < +\infty$  в предположении, что справедливо “ортопроекционное” разложение

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x) \psi_i(y),$$

где  $(\psi_i, \psi_j) = \int_{y_1}^{y_2} \psi_i(y) \psi_j(y) dy = J_{i,j}$  ( $J_{i,j}$  – символ

Кронекера). При этом  $\psi_0(y) \equiv \frac{1}{\sqrt{y_2 - y_1}}$ ,

$$f_1(x) = \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy = a_0(x) \sqrt{y_2 - y_1}.$$

Соответствующая статистическая оценка функции  $f(x, y)$  с учетом предложенной в [5] численно-статистической реализации проекционно-го разложения имеет вид

$$\tilde{f}^{(m)}(x, y) = \sum_{i=0}^m \frac{\sum_{k=1}^N I_{\Delta(x)}(\xi_k) \psi_i(\eta_k)}{N \delta} \psi_i(y), \quad (2)$$

где  $\{\xi_k, \eta_k\}$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) – выборка случайных значений параметра  $(x, y)$ , например значений “широтного” и “азимутального” углов направления частицы, вылетающей из среды. В случае весового моделирования значения  $\psi_i(\eta_k)$  умножаются на вес  $Q_k$ .

Оценку (2) естественно назвать ядерно-проекционной. Нетрудно видеть, что

$$E\tilde{f}^{(m)}(x, y) \approx \sum_{i=0}^m a_i(x) \psi_i(y).$$

2. Среднеквадратическая погрешность оценки  $\tilde{f}^{(m)}(x, y)$  определяется следующим образом:

$$L(N, \delta, m) = \iint_{x_1 y_1}^{x_2 y_2} E(\tilde{f}^{(m)}(x, y) - f(x, y))^2 dx dy =$$

$$= \iint_{x_1 y_1}^{x_2 y_2} [E\tilde{f}^{(m)} - f]^2 + D\tilde{f}^{(m)}] dx dy,$$

$$E\tilde{f}^{(m)}(x, y) - f(x, y) = \frac{1}{\delta} \int_{x-\frac{\delta}{2}}^{x+\frac{\delta}{2}} \left( \sum_{i=0}^m a_i(x') \psi_i(y') \right) dx' -$$

$$- \sum_{i=0}^m a_i(x) \psi_i(y) - \sum_{i=m+1}^{\infty} a_i(x) \psi_i(y).$$

Предположим, что  $\left| \sum_{i=m+1}^{\infty} a_i(x) \psi_i(y) \right| \leq F(x) \cdot S_m$ , причем

$$S_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0, \quad \int_{x_1}^{x_2} F^2(x) dx = \frac{F_2}{y_2 - y_1} < +\infty. \quad (3)$$

Тогда асимптотически при  $\delta \rightarrow 0, N\delta \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty$  имеем

$$\iint_{x_1 y_1}^{x_2 y_2} E(\tilde{f}^{(m)} - f)^2 dx dy \lesssim$$

$$\approx \int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=0}^m (a_i''(x))^2 \frac{\delta^4}{576} dx + F_2 S_m^2. \quad (4)$$

Символ “ $\lesssim$ ” здесь и далее обозначает асимптотически приближенное неравенство, замена которого на равенство сохраняет порядок результирующей погрешности относительно  $N$ . Оценка параметра  $F_2$  является сложной, однако далее показано, что соответствующая ошибка может слабо влиять на асимптотическую оптимизацию алгоритма. Соотношение (4) показывает, что здесь необходимо дополнительное ограничение:

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=0}^{\infty} (a_i''(x))^2 dx = \int_{x_1}^{x_2} \|f''_{xx}(x, y)\|_{L_{2,y}}^2 dx < +\infty.$$

Предполагается также, что коэффициенты  $a_i''(x)$ , как и  $a_i(x)$ , убывают при  $i \rightarrow \infty$  достаточно

быстро и приближенно равномерно в интервале  $(x_1, x_2)$ ; тем самым можно использовать оценку

$$\|f''_{xx}\|_{L_2, y}^2 \leq C|a_0''|^2 = \frac{C|f_1''|^2}{y_2 - y_1}.$$

На этой основе получаем соотношение

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} E(\tilde{f}^{(m)} - f)^2 dx dy \leq F_1 \delta^4 + F_2 S_m^2,$$

где

$$F_1 = \frac{C_1 \int_{x_1}^{x_2} (f_1''(x))^2 dx}{576}, \quad C_1 = \frac{C}{y_2 - y_1}. \quad (5)$$

Отметим, что в первом приближении можно использовать  $C_1 = (y_2 - y_1)^{-1}$ .

3. Рассмотрим теперь второе слагаемое погрешности:

$$\begin{aligned} D\tilde{f}^{(m)}(x, y) &= \frac{1}{N\delta^2} \left[ \sum_{i=0}^m D[I_\Delta(\xi)\psi_i(\eta)]\psi_i^2(y) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i \neq j} E[I_\Delta(\xi)\psi_i(\eta)\psi_j(\eta)]\psi_i(y)\psi_j(y) \right], \\ \int_{y_1}^{y_2} D\tilde{f}^{(m)} dy &= \frac{1}{N\delta^2} \sum_{i=0}^m D[I_\Delta(\xi)\psi_i(\eta)] \approx \\ &\approx \frac{1}{N\delta^2} \sum_{i=0}^m E(I_\Delta(\xi)\psi_i^2(\eta)), \end{aligned}$$

так как  $\delta \ll 1$ . Далее,

$$\begin{aligned} E(I_\Delta(\xi)\psi_i^2(\eta)) &\approx \delta f_1(x) E(\psi_i^2(\eta)|_{\xi \in \Delta}) \approx \\ &\approx \delta f_1(x) \int_{y_1}^{y_2} \frac{f(x, y)}{f_1(x)} \psi_i^2(y) dy. \end{aligned}$$

Предполагая, что  $0 < C^{(1)} < \frac{f(x, y)}{f_1(x)} < C^{(2)} < +\infty$ , получаем соотношение

$$\int D\tilde{f}^{(m)} dy \leq \frac{F^{(0)} m f_1(x)}{N\delta}, \quad C^{(1)} < F^{(0)} < C^{(2)}. \quad (6)$$

С сохранением порядка погрешности можно полагать  $F^{(0)} = 0.5(C^{(1)} + C^{(2)})$ ; в первом приближении можно использовать  $F^{(0)} = (y_2 - y_1)^{-1}$ . Из сказанного выше следует, что для оптимизации алгоритма необходимо минимизировать величину

среднего числа вычислительных операций вида  $T = a \cdot m + b$  при условии, что

$$L(N, \delta, m) = F_0 \frac{m}{N\delta} + F_1 \delta^4 + F_2 S_m^2 = \varepsilon^2,$$

где  $F_0 = F^{(0)} \int_{x_1}^{x_2} f_1(x) dx$ , величина  $F^{(0)}$  определяется соотношением (6),  $F_1$  – соотношением (5), а  $F_2$  – соотношением (3).

Поскольку оптимизация по  $\delta$  осуществляется на основе микрогруппированной выборки, то при надлежащей организации вычислений (см., например, [3]) значение  $T$  практически не зависит от  $\delta$ . Оптимизация трудоемкости по  $\delta$  таким образом сводится к минимизации величины  $L(N, \delta, m)$  по  $\delta$ , которая, соответственно теории ядерных оценок, дает величину

$$\begin{aligned} L_0(N, m) &= \frac{5}{4} \left( F_0 \frac{m}{4NF_1} \right)^{\frac{1}{5}} \frac{mF_0}{N} + F_2 S_m^2 = \\ &= F \cdot \left( \frac{m}{N} \right)^{\frac{4}{5}} + F_2 S_m^2, \quad F = 5 \cdot 4^{\frac{4}{5}} F_0^{\frac{4}{5}} F_1^{\frac{1}{5}}, \end{aligned} \quad (7)$$

причем

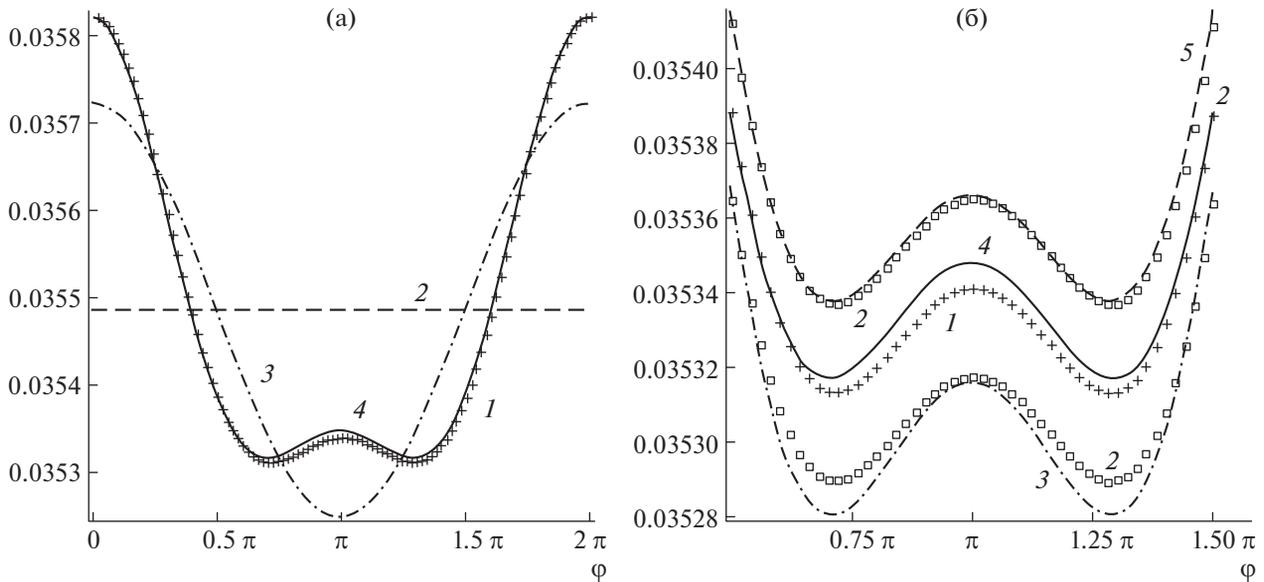
$$\delta_{opt} = \left( F_0 \frac{m}{4NF_1} \right)^{\frac{1}{5}}. \quad (8)$$

Проведенные исследования показали, что условная минимизация по  $m$  величины  $am + b$  при условии  $L_0(N, m) = \varepsilon^2$  для реальных сложных задач весьма затруднительна. Поэтому далее осуществляется оптимизация в предположении, что свойства задачи и организация вычислений позволяют предположить, что среднее число операций практически не зависит от  $m$ , т.е.  $\frac{am}{b} \ll 1$ . Ясно, что такая оптимизация сводится к минимизации величины  $L_0(N, m)$  по  $m$ .

4. Пусть  $S_m \approx O(m^{-(r-1)})$ . Такой вариант задачи рассмотрен в работе [5]. В [6] показано, что он реализуется для разложения  $r$ -кратно непрерывно дифференцируемой функции по тригонометрическим полиномам вследствие того, что при этом  $a_i = O(i^{-r})$ . Полагая  $S_m^2 = m^{-2(r-1)}$ , в результате минимизации  $L_0(N, m)$  получаем

$$m_{opt}^{(1)} = \left[ \frac{5F_2}{2F} (r-1) \right]^{\frac{1}{2r-1,2}} \cdot N^{\frac{4}{10r-6}}.$$

Практически более реализуемой является оптимизация в предположении, что  $S_m = O(e^{-\lambda m})$ , кото-



**Рис. 1.** Угловое распределение прошедшего через слой излучения для углов падения  $\omega_0 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  и вылета  $\omega^* = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\varphi), \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\varphi), \frac{1}{2}\right)$ . (а) Линия 1 – локальная оценка, 2 –  $\Phi_0(\mu, \varphi)$ , 3 –  $\Phi_1(\mu, \varphi)$ , 4 –  $\Phi_2(\mu, \varphi)$ . (б) 1 – локальная оценка, 2 – доверительный интервал  $3\sigma$  для локальной оценки, 3 –  $\Phi_2(\mu, \varphi)$  для  $\delta \approx 0.0841$ , 4 –  $\Phi_2(\mu, \varphi)$  для  $\delta_{opt} \approx 0.044$ , 5 –  $\Phi_2(\mu, \varphi)$  для  $\delta \approx 0.0396$ .

рое соответствует соотношению  $\frac{a_{i+1}}{a_i} \approx q$ , причем

$$\lambda = -\ln q, S_m \lesssim \tilde{F}_2 e^{-\lambda m}, \tilde{F}_2 = \frac{a_0}{1 - e^{-\lambda}}.$$

Такое предположение можно считать естественным для задачи оценки углового распределения частиц, испытавших многократное рассеяние в среде, которое оказывает “сглаживающее влияние”. Это подтверждает анализ результатов, полученных в [7]. Здесь оптимальное значение  $m = m_0$  определяется из уравнения

$$-\frac{4}{5} \ln N + \ln\left(\frac{4}{5} F\right) - \frac{1}{5} \ln m = \ln(2F_2 \tilde{F}_2^2) - 2\lambda m.$$

Асимптотически (при  $N \rightarrow \infty, m_0 \rightarrow \infty$ ) имеем

$$m_0 \approx \frac{2 \ln N}{5 \lambda} = \frac{2 \ln N}{5 |\ln q|}.$$

При этом, согласно (7), (8),

$$\delta_{opt} = \left(\frac{F_0}{10F_1 |\ln q|} \frac{\ln N}{N}\right)^{\frac{1}{5}},$$

$$L_0(N, m_0) \approx F \cdot \left(\frac{2}{5 |\ln q|} \frac{\ln N}{N}\right)^{\frac{4}{5}},$$

в то время как порядок оптимальной двумерной ядерной оценки с равномерным ядром определяется [2] величиной  $\frac{1}{N^{2/3}}$ .

5. Описанный выше подход был апробирован при решении задачи оценки углового распределения излучения, прошедшего через плоский слой  $0 < z < H$  рассеивающего и поглощающего вещества от расположенного на границе  $z = 0$  источника излучающего в заданном направлении  $\omega_0 = (0, \sin \theta_0, \cos \theta_0)$ , где  $\theta_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  – зенитный угол [8].

В качестве математической модели процесса переноса излучения рассматривается цепь Маркова столкновений фотонов с частицами вещества [9].

Для построения оценки типа (2) для плотности распределения потока излучения, выходящего из слоя через поверхность  $z = H$ , рассматривается разложение по ортонормированному тригонометрическому базису:

$$\Phi_m(\mu, \varphi) = \frac{a_0(\mu)}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{i=1}^m a_i(\mu) \cdot \frac{\cos(i\varphi)}{\sqrt{\pi}} + \sum_{i=1}^m b_i(\mu) \cdot \frac{\sin(i\varphi)}{\sqrt{\pi}}.$$

Здесь  $\mu = \cos \theta$ ,  $\theta$  – зенитный угол,  $\varphi$  – азимутальный угол, причем  $\mu \in (0, 1)$ ,

$$a_0(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \Phi_m(\mu, \varphi) d\varphi,$$

$$a_i(\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \Phi_m(\mu, \varphi) \cdot \cos(i\varphi) d\varphi,$$

$$b_i(\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \Phi_m(\mu, \varphi) \cdot \sin(i\varphi) d\varphi.$$

В силу свойства симметрии искомой плотности относительно плоскости падения начального излучения  $\varphi = 0$ , коэффициенты  $b_i$  здесь равны нулю. Для произвольной точки  $\mu_k \in (0, 1)$ , коэффициенты разложения оцениваются с помощью ядерного осреднения по интервалу  $\delta_{opt}$ , полученному на основе предварительных оценок значений  $F_0$  и  $F_1$  (см. пункты 2, 3).

В конкретном примере были реализованы следующие параметры: оптическая толщина слоя  $H = 4$ ,  $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$  и молекулярное рассеяние в среде [9]. По вычисленной микрогистограмме коэффициентов разложения по описанным выше формулам были получены оценки  $F_0 \approx 0.00014$  и  $F_1 \approx 0.04$ . Быстрое убывание коэффициентов разложения  $a_i$ ,  $i = 0, \dots, m$ , позволило оценить оптимальное количество членов разложения:  $m \approx 2$ , а также оптимальный шаг ядерного осреднения:  $\delta_{opt} \approx 0,044$  для  $N = 10^9$  траекторий.

Для верификации построенной комбинированной оценки были проведены дополнительные расчеты значений функции интенсивности излучения с помощью локальной оценки метода Монте-Карло [9]. Численные результаты показали, что  $m = 2$  действительно является оптимальным, поскольку добавление третьей гармоники не изменяет результат моделирования в пределах статистической погрешности, но увеличивает эту погрешность за счет большой погрешности оценки третьего коэффициента разложения. Данное свойство проиллюстрировано на рис. 1а. Проведенные расчеты с различными шагами ядерного осреднения  $\delta$  подтвердили, что  $\delta_{opt} \approx 0.044$  позволяет фактически получить наименее отклоняющуюся в пределах статистической погрешности оценку угловой плотности распределения. Данное утверждение проиллюстрировано на рис. 1б. Результаты расчетов предложенной в работе оценки хорошо согласуются с результатами локальной оценки, погрешность которой не превышает 0.03%.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Расчеты были проведены с использованием ресурсов ЦКП Сибирский суперкомпьютерный центр ИВМиМГ СО РАН [10].

## ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта 18–01–00356.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Епанечников В.А. Непараметрическая оценка многомерной плотности вероятности // Теория вероятностей и ее применения. 1969. Т. 14. № 1. С. 156–161.
2. Боровков А.А. Математическая статистика. Новосибирск: Наука, 1997. 771 с.
3. Михайлов Г.А., Пригарин М., Роженко С.А. Модификации стандартной векторной оценки метода Монте-Карло для исследования характеристик рассеянного поляризованного излучения // ДАН. 2017. Т. 476. № 3. С. 264–286.
4. Lotova G.Z. Monte Carlo Algorithms for Calculation of Diffusive Characteristics of an Electron Avalanche in Gases // Russian J. Mathematical and Mathematical Modelling. 2016. V. 31. № 6. P. 369–377.
5. Ченцов Н.Н. Статистические решающие правила и оптимальные выводы. М.: Наука, 1972. 520 с.
6. Смелов В.В. Задачи Штурма–Лиувилля и разложения функций в быстросходящиеся ряды. Новосибирск: Изд-во СО РАН; 2000. 144 с.
7. Михайлов Г.А., Трачева Н.В., Ухинов С.А. Рандомизированный проекционный метод для оценки угловых распределений поляризованного излучения на основе численного статистического моделирования // ЖВМиМФ. 2016. Т. 56. № 9. С. 1560–1570.
8. Tracheva N.V., Ukhinov S.A. On the evaluation of spatial–angular distributions of polarization characteristics of scattered radiation // Statistical Papers. 2018. V. 59. № 4. P. 1541–1557.
9. Марчук Г.И., Михайлов Г.А., Назаралиев М.А., Дарбинян Р.А., Каргин Б.С. Метод Монте-Карло в атмосферной оптике. Новосибирск: Наука, 1976. 284 с.
10. Сибирский суперкомпьютерный центр ИВМиМГ СО РАН. [Электронный ресурс]. URL: <http://www.ssc.icmmg.nsc.ru/> (дата обращения 03.03.2020).

## THE NEW KERNEL-PROJECTION STATISTICAL ESTIMATOR IN THE MONTE CARLO METHOD

Corresponding Member of the RAS **G. A. Mikhailov<sup>a,b</sup>**,  
**N. V. Tracheva<sup>a,b</sup>**, and **S. A. Ukhinov<sup>a,b</sup>**

<sup>a</sup>*Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,  
Novosibirsk, Russian Federation*

<sup>b</sup>*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation*

The kernel statistical estimator in the Monte Carlo method is usually optimized based on the preliminary construction of a “micro-grouped” sample of the values of the variable in interest. Even for the two-dimensional case, such optimization is very difficult. Therefore, in this paper, we propose a combined (kernel-projection) statistical estimator of the two-dimensional distribution density: for the first (main) variable a kernel estimator is constructed, and for the second – projection estimator. In this case, for each kernel interval, determined by the micro-grouped sample, the coefficients of particular orthogonal decomposition of the conditional probability density are statistically estimated based on preliminary results for the “micro intervals”. An important result of the work is the optimization of such an estimator under the assumptions made about the convergence rate of the orthogonal decomposition in use. The verification of the constructed estimator was implemented for the problem of evaluation of the bi-directional distribution of the radiation flux, transferred through a layer of scattering and absorbing substance.

*Keywords:* kernel statistical density estimator, projection estimator, kernel-projection estimator, Monte Carlo method