ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 493, с. 108–111

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

ТЕРМИНАЛЬНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФУЗИОННО-СКАЧКООБРАЗНОГО ТИПА

М. М. Хрусталев[1],*, К. А. Царьков[1],**

Представлено академиком РАН С.Н. Васильевым 30.03.2020 г.
Поступило 15.04.2020 г.
После доработки 15.04.2020 г.
Принято к публикации 30.04.2020 г.

Предложены достаточные условия терминальной инвариантности нелинейных динамических стохастических управляемых систем диффузионно-скачкообразного типа, не имеющие аналогов в мировой литературе. Сформулированы как условия инвариантности по возмущениям при заданной начальной точке, так и условия абсолютной инвариантности, обеспечивающие постоянство значения терминального критерия при любых начальных данных.

Ключевые слова: терминальная инвариантность, достаточные условия инвариантности, нелинейные стохастические системы, диффузионно-скачкообразные процессы, системы с импульсными воздействиями

DOI: 10.31857/S2686954320040098

В настоящем сообщении разрабатываются достаточные условия терминальной инвариантности стохастических управляемых систем диффузионно-скачкообразного типа. В отличие от диффузионных процессов [1, 2], скачкообразные диффузии описываются стохастическими системами, содержащими не только непрерывную гауссовскую часть, но и разрывную пуассоновскую компоненту [3]. Такие системы (и соответствующие им процессы) в различных источниках называют системами с импульсными воздействиями, со случайным периодом квантования или диффузионно-скачкообразными процессами. Авторы считают последнее наименование наиболее удачным в рамках рассматриваемой теории и ориентируются, в частности, на работы [4, 5], где оно также использовано. В сравнении с исследованиями этих процессов и систем в [4], пуассоновская компонента дополнительно предполагается неоднородной по времени [5, 6].

Под измеримостью (подмножеств действительного пространства и действительнозначных функций на нем) в работе понимается измеримость по Борелю. Обозначения $f(\cdot)$ и $f(t)$ для записи функции одной переменной t там, где это не вызывает противоречий, отождествляются.

[1] *Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук, Москва, Россия*
**E-mail: mmkhrustalev@mail.ru*
***E-mail: k6472@mail.ru*

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предположим, что управляемая динамическая система описывается стохастическим дифференциальным уравнением [3]

$$\begin{aligned} dx(t) &= f(t,x(t),u(t,x(t),v(t)),v(t))dt + \\ &+ g(t,x(t),u(t,x(t),v(t)),v(t))dw(t) + \qquad (1) \\ &+ \int_{R^r} h(t,x(t^-),u(t,x(t^-),v),v)\hat{\mu}(dt\times dv), \quad x(t_0) = x_0, \end{aligned}$$

где $t \in [t_0; t_F] \subset [t_S; t_F] \subset R_+$ – время, моменты t_S и t_F фиксированы, t_F совпадает с конечным моментом времени функционирования системы; начальное условие $(t_0, x_0) \in B_0$, $t_0 \geq t_S$, заранее не задано, но определено множество $B_0 \subset [t_S; t_F) \times R^n$ всех возможных начальных условий; $x(t)$ – n-мерный вектор, характеризующий состояние системы в момент времени t; $t \to v(t)$ – r-мерный случайный процесс с заданным распределением (вероятностной мерой) $\nu(t,\cdot)$, и, в частности, допускается $\nu(t,dv) = \delta(v - \phi(t))dv$, $\delta(\cdot)$ – функция Дирака, $\phi(\cdot)$ – заданная измеримая функция; $t \to w(t)$ – q-мерный стандартный винеровский процесс, стартующий из нуля в момент времени t_0;

$$\hat{\mu}(dt\times dv) := \begin{cases} \mu(dt\times dv) - \Pi(t,dv)dt, \text{ если } dv \subset \Theta_1, \\ \mu(dt\times dv), \text{ если } dv \subset \Theta_2, \end{cases}$$

$\mu(\cdot)$ – l-мерная неоднородная случайная пуассоновская мера на $[t_S; t_F] \times R^r$ с интенсивностью

$t \to \Pi(t,\cdot)$, в каждый момент времени t значение $\Pi(t,\cdot)$ – заданная l-мерная неслучайная ненормированная мера на R^r с условием $0 < \Pi(t, R^r) < +\infty$ такая, что выполнено равенство

$$\Pi(t,\cdot) = \Pi(t, R^r)\nu(t,\cdot),$$

$\Theta_{1,2}$ – заданные измеримые подмножества R^r такие, что

$$\Theta_1 \cap \Theta_2 = \phi, \quad \Theta_1 \cup \Theta_2 = R^r;$$

$(t,x,v) \to u(t,x,v)$ – m-мерная неслучайная измеримая стратегия управления (заранее не задана, но может быть выбрана произвольно в целях, формулируемых далее); $f(\cdot)$, $g(\cdot)$, $h(\cdot)$ – заданные измеримые матричные функции соответствующих размеров; здесь и далее в работе используется обозначение $x(t^-) := \lim\limits_{s\to t-0} x(s)$. Предполагается, что процессы $v(t)$, $w(t)$ и мера $\mu(\cdot)$ независимы в совокупности.

Определение 1. Стратегию управления $(t,x,v) \to u(t,x,v)$ будем называть B_0-допустимой, если уравнение (1) имеет слабое решение [3, с. 519] на интервале $[t_0;t_F]$ для любого фиксированного начального условия $(t_0,x_0) \in B_0$.

Если при заданных множестве B_0 и функциях $f(\cdot)$, $g(\cdot)$, $h(\cdot)$, $\Pi(\cdot)$ не существует ни одной B_0-допустимой стратегии, то такая управляемая динамическая система дальнейшему анализу не подлежит. Ниже рассматриваются только B_0-допустимые стратегии управления.

Пусть стратегия $(t,x,v) \to u(t,x,v)$ фиксирована. Рассмотрим некоторое начальное условие $(t_0,x_0) \in B_0$. В соответствии с определением 1, существует слабое решение Ξ уравнения (1), включающее в себя вероятностное пространство (Ω, Ψ, P) с фильтрацией $\{\Psi_t \subset \Psi,\ t \in [t_0;t_F]\}$, на котором найдутся процесс $v(t)$ с распределением $\nu(t,\cdot)$, винеровский процесс $w(t)$, пуассоновская мера $\mu(\cdot)$ интенсивности $\Pi(t,\cdot)$ и процесс $x(t)$, все согласованные с Ψ_t и P-п.н. связанные соотношением (1) при $t \in [t_0;t_F]$. Через $D(t_0,x_0)$ обозначим множество всех таких решений Ξ, и введем также множество

$$D(B_0) := \bigcup_{(t_0,x_0)\in B_0} D(t_0,x_0).$$

На множестве $D(B_0)$ определим терминальный критерий, который каждому элементу $\Xi \in D(B_0)$ ставит в соответствие случайную величину

$$J(\Xi) = F(x(t_F)), \quad F(\cdot) \in C^2(R^n). \tag{2}$$

Определение 2. Систему (1) при фиксированной стратегии $(t,x,v) \to u(t,x,v)$ будем называть инвариантной по возмущениям, если для любой фиксированной начальной точки $(t_0,x_0) \in B_0$ и при любом $\Xi \in D(t_0,x_0)$ случайная величина (2) совпадает P-п.н. с некоторым числом $J_c(t_0,x_0)$.

Определение 3. Систему (1) при фиксированной стратегии $(t,x,v) \to u(t,x,v)$ будем называть абсолютно инвариантной, если при любом $\Xi \in D(B_0)$ случайная величина (2) совпадает P-п.н. с одним и тем же числом J_c^A.

В условиях задачи, сформулированных в настоящем разделе, требуется определить стратегию управления, обеспечивающую терминальную инвариантность динамической системы (1) в смысле определения 2 или определения 3.

2. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ТЕРМИНАЛЬНОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ

Введем в рассмотрение множество Φ функций $(t,x) \to \varphi(t,x)$: $[t_S;t_F]\times R^n \to R$, имеющих непрерывные производные φ_t, φ_x, φ_{xx}. Для краткости обозначим

$$\sigma(t,x,u,v) = g(t,x,u,v)g^{\mathrm{T}}(t,x,u,v), \tag{3}$$

$$K(t,x,u,v) = \varphi_t(t,x) + \varphi_x^{\mathrm{T}}(t,x)f(t,x,u,v) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}[\sigma(t,x,u,v)\varphi_{xx}(t,x)], \tag{4}$$

$$S(t,x,u,v) = \varphi_x^{\mathrm{T}}(t,x)g(t,x,u,v), \tag{5}$$

$$\Gamma^{(j)}(t,x,u,v) = \varphi(t, x + h^{(j)}(t,x,u,v)) - \varphi(t,x), \quad \Gamma = (\Gamma^{(1)}, \ldots, \Gamma^{(l)}), \tag{6}$$

$$\Lambda(t,x,u,v) = \Gamma(t,x,u,v) - \varphi_x^{\mathrm{T}}(t,x)h(t,x,u,v), \tag{7}$$

$$L(t,x,u,v) = K(t,x,u,v) + \int_{\Theta_1}\Lambda(t,x,u,v)\Pi(t,dv). \tag{8}$$

Теорема 1. *Если при фиксированной стратегии $(t,x,v) \to u(t,x,v)$ существуют измеримая ограниченная функция $t \to \eta(t)$: $[t_S;\ t_F] \to R$ и функция $\varphi(\cdot) \in \Phi$ такие, что для всех $x \in R^n$, $v \in R^r$ выполнены условия*

(i) $\varphi(t_F, x) = F(x)$,

(ii) $L(t,x,u(t,x,v),v) = \eta(t)$ *п.в. на* $[t_S;\ t_F]$,

(iii) $S(t,x,u(t,x,v),v) = 0$ *п.в. на* $[t_S;\ t_F]$,

(iv) $\Gamma(t,x,u(t,x,v),v) = 0$ *всюду на* $[t_S;\, t_F]$,
то система (1) *инвариантна по возмущениям, а значение критерия*

$$J_c(t_0,x_0) = \varphi(t_0,x_0) + \int_{t_0}^{t_F} \eta(t)dt. \qquad (9)$$

Т е о р е м а 2. *Если при фиксированной стратегии* $(t,x,v) \to u(t,x,v)$ *существуют измеримая ограниченная функция* $t \to \eta(t)$: $[t_S;\, t_F] \to R$, *функция* $\varphi(\cdot) \in \Phi$ *и постоянная* $A > 0$ *такие, что для всех* $x \in R^n$, $v \in R^r$ *выполнены условия*

(i) $\eta(t_F^-) = \eta(t_F)$,

(ii) $\varphi(t_F,x) = F(x)$,

(iii) $L(t,x,u(t,x,v),v) = (\eta(t) - A\varphi(t,x))(t_F - t)^{-1}$ *п.в. на* $[t_S;t_F]$,

(iv) $S(t,x,u(t,x,v),v) = 0$ *п.в. на* $[t_S;t_F]$,

(v) $\Gamma(t,x,u(t,x,v),v) = 0$ *всюду на* $[t_S;t_F]$,
то система (1) *абсолютно инвариантна, а значение критерия*

$$J_c^A = \frac{\eta(t_F)}{A}. \qquad (10)$$

3. ПРИМЕРЫ

П р и м е р 1. Рассмотрим систему

$$dx_1(t) = x_2(t)dt + x_2(t^-)\mu(dt \times R),$$
$$dx_2(t) = -x_1(t)dt + u(t,x(t^-))\mu(dt \times R),$$

где $t \in [t_0;\, 1] \subset [0;\, 1]$; интенсивность пуассоновской меры $\Pi(t,R) \equiv \lambda = 5$; размерности векторов $n = 2$, $m = l = 1$; отсутствуют возмущения, связанные со случайными процессами $v(t)$ и $w(t)$ (поэтому интеграл в уравнении (1) устраняется с введением обозначения $\hat{\mu}(\cdot,R)$, и можно считать, что $r = q = 1$); множества $\Theta_1 = \phi$, $\Theta_2 = R$, так что $\hat{\mu}(\cdot) \equiv \mu(\cdot)$.

Требуется обеспечить инвариантность системы по возмущениям относительно величины $J = x_2(1)$ для множества $B_0 = [0;1) \times R^2$.

Функции $\varphi(\cdot)$ и $\eta(\cdot)$ построим в форме

$$\varphi(t,x) = \psi_1(t)x_1 + \psi_2(t)x_2, \quad \eta(t) \equiv 0,$$

где $\psi_1(t) = \sin(t-1)$, $\psi_2(t) = \cos(t-1)$. Тогда условия теоремы 1 выполняются при выборе управления в виде

$$u(t,x) = -\mathrm{tg}(t-1)x_2,$$

и замкнутая система становится терминально инвариантной по возмущениям.

П р и м е р 2. Запишем систему с дополнительным управлением

$$dx_1(t) = [x_2(t) + u_1(t,x(t))]dt + x_2(t^-)\mu(dt \times R),$$
$$dx_2(t) = -x_1(t)dt + u_2(t,x(t^-))\mu(dt \times R).$$

При тех же значениях параметров, что и в примере 1, требуется обеспечить абсолютную инвариантность системы относительно величины $J = x_2(1)$ для произвольного начального условия $(t_0,\, x(t_0)) \in B_0$.

Функции

$$\varphi(t,x) = \sin(t-1)x_1 + \cos(t-1)x_2, \quad \eta(t) \equiv 0,$$

$$u_1(t,x) = \frac{A}{t-1}\left(x_1 + \mathrm{ctg}(t-1)x_2\right),$$
$$u_2(t,x) = -\mathrm{tg}(t-1)x_2, \quad A > 0,$$

обеспечивают выполнение условий теоремы 2 и, следовательно, абсолютную терминальную инвариантность замкнутой системы со значением (10)

$$J_c^A = \frac{\eta(1)}{A} = 0.$$

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20–08–00400).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хрусталев М.М.* Инвариантность стохастических систем диффузионного типа // ДАН. 2017. Т. 476. № 2. С. 148–150.
2. *Хрусталев М.М.* Терминальная инвариантность стохастических систем диффузионного типа // АиТ. 2018. № 8. С. 81–100.
3. *Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985. 640 с.
4. *Øksendal B., Sulem A.* Applied Stochastic Control of Jump Diffusions. B.; Heidelberg: Springer, 2005. 266 p.
5. *Рыбаков К.А.* Достаточные условия оптимальности в задаче управления системами диффузионно-скачкообразного типа // Тр. Всерос. сов. по пробл. управления (ВСПУ-2014, Москва). М.: ИПУ РАН, 2014. С. 734–744.
6. *Аверина Т.А., Рыбаков К.А.* Два метода анализа стохастических систем с пуассоновской составляющей // Дифференц. уравнения и процессы управления. 2013. № 3. С. 85–116.

TERMINAL INVARIANCE OF JUMP DIFFUSIONS

M. M. Khrustalev[a] and K. A. Tsarkov[a]

[a] *V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS S.N. Vassilyev

We propose terminal invariance sufficient conditions for nonlinear dynamical stochastic systems of diffusion-jump type. The conditions have no analogues in the world literature. We formulate both invariance in perturbations conditions (for a fixed initial point) and absolute invariance conditions (ensuring that the terminal criterion takes constant value for any initial data).

Keywords: terminal invariance, invariance sufficient conditions, nonlinear stochastic systems, jump diffusions