ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 493, с. 18–20

МАТЕМАТИКА

УДК 512.643

О РАЗМЕРНОСТИ КОНГРУЭНТНОГО ЦЕНТРАЛИЗАТОРА

© 2020 г. Х. Д. Икрамов[1,*]

Представлено академиком РАН Е.Е. Тыртышниковым 02.04.2020 г.
Поступило 02.04.2020 г.
После доработки 02.04.2020 г.
Принято к публикации 20.04.2020 г.

Пусть A – невырожденная комплексная $(n \times n)$-матрица. Множество $\mathcal{L}$ матриц X, удовлетворяющих соотношению $X^*AX = A$, называется конгруэнтным централизатором матрицы A. Показано, что размерность $\mathcal{L}$ как вещественного многообразия в матричном пространстве $M_n(\mathbf{C})$ равна разности вещественных размерностей двух множеств: обычного централизатора матрицы $A^{-*}A$ (называемой коквадратом матрицы A) и множества матриц, описываемых соотношением $X = A^{-1}X^*A$. Эта формула для размерностей есть комплексный аналог классического результата А. Восса, относящегося к другому типу инволюций в пространстве $M_n(\mathbf{C})$.

Ключевые слова: *-конгруэнция, конгруэнтный централизатор, коквадрат, каноническая форма относительно конгруэнций

DOI: 10.31857/S2686954320040074

1. Пусть A – невырожденная квадратная матрица порядка n над полем F характеристики $\mathrm{char}F \neq 2$. В матричном пространстве $M_n(F)$ множество, задаваемое соотношением

$$X^\top AX = A, \tag{1}$$

можно рассматривать как алгебраическое многообразие. Еще в конце XIX в. А. Восс (см. [1]) показал, что размерность этого многообразия равна разности размерностей двух линейных подпространств: централизатора матрицы $A^{-\top}A$ и подпространства

$$\{X \,|\, X^\top = A^{-1}XA\}. \tag{2}$$

Напомним, что централизатором квадратной матрицы называется множество всех коммутирующих с ней матриц.

Цель настоящего сообщения – перенести формулу Восса на случай комплексных матриц с другим типом инволюции, а именно матричным сопряжением вместо транспонирования. Вместо (1) будем рассматривать множество

$$\mathcal{M} = \{X \,|\, X^*\, AX = A\}.$$

$\mathcal{M}$ не является комплексным многообразием, но может рассматриваться как вещественное, и в этом качестве нас будет интересовать его размерность.

Мы будем называть множество $\mathcal{M}$ конгруэнтным централизатором матрицы A по той причине, что оно представляет собой аналог обычного централизатора в том случае, когда группа $GL_n(\mathbf{C})$ действует на матричном пространстве $M_n(\mathbf{C})$ конгруэнциями вместо подобий.

2. Вещественную размерность множества $\mathcal{M}$ можно вычислить как размерность касательного пространства в любой точке этого множества, например, в точке $X = I_n$. Дифференциал оператора $F(X) = X^*AX$ имеет вид

$$dF(X) = X^*AdX + (dX)^*AX.$$

Поэтому искомая размерность дается размерностью множества $\mathcal{N}$ решений матричного уравнения

$$X^*AY + Y^*AX = 0,$$

или, полагая здесь $X = I_n$, уравнения

$$AY + Y^*A = 0. \tag{3}$$

Это множество является вещественным линейным подпространством, размерность которого найдена в [2]. Чтобы привести соответствующую формулу, нам придется напомнить некоторые

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: ikramov@cs.msu.su*

факты, связанные с *-конгруэнтными преобразованиями, т.е. преобразованиями вида

$$A \to P^*AP,$$

где P – произвольная невырожденная матрица. (Такие преобразования называются в дальнейшем просто конгруэнтными или конгруэнциями.)

3. Каноническая форма невырожденной матрицы A относительно конгруэнций представляет собой блочно-диагональную матрицу с диагональными блоками двух типов. Это, во-первых, ганкелевы матрицы вида

$$\Delta_q = \lambda \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & \cdots & i \\ & 1 & \cdots & \\ 1 & i & & \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где $|\lambda| = 1$, а индекс q указывает порядок матрицы, и, во-вторых, блоки четной размерности

$$H_{2r}(\mu) = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ J_r(\mu) & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Здесь $J_r(\mu)$ – жорданова клетка с числом μ на главной диагонали, а относительно μ можно без ограничения общности считать, что $|\mu| > 1$.

Предположим, что матрица A имеет каноническую форму

$$\begin{aligned} W = \lambda_1\Delta_{q_1} \oplus \lambda_2\Delta_{q_2} \oplus \cdots \oplus \lambda_k\Delta_{q_k} \oplus \\ H_{2r_1}(\mu_1) \oplus H_{2r_2}(\mu_2) \oplus \cdots \oplus H_{2r_l}(\mu_l). \end{aligned} \tag{6}$$

Тогда вещественная размерность c множества решений уравнения (3) выражается формулой

$$c = c_1 + c_2, \tag{7}$$

где

$$c_1 = \sum_{i=1}^{k} q_i + 2\sum_{i<j}{}' \min(q_i, q_j). \tag{8}$$

Во второй сумме участвуют лишь пары (i, j), соответствующие числам λ_i и λ_j таким, что $\lambda_i = \pm\lambda_j$. Слагаемое c_2 в формуле (7) дается аналогичным выражением

$$c_2 = 2\left[\sum_{i=1}^{l} r_i + 2\sum_{i<j}{}'' \min(r_i, r_j)\right]. \tag{9}$$

В сумме $\sum''$ учитываются только пары (i, j), отвечающие блокам H_{2r_i} и H_{2r_j} с одинаковыми числами μ_i и μ_j.

З а м е ч а н и е. Наше описание суммы $\sum'$ в формуле (8) немного отличается от соответствующего описания в [2]. Дело в том, что канонические блоки первого типа, используемые в [2], имеют несколько иной вид, чем наши матрицы Δ_q.

4. Вернемся к уравнению (3). Перепишем его в виде

$$Y = -A^{-1}Y^*A. \tag{10}$$

Отсюда

$$Y^* = -A^*YA^{-*}.$$

Подставляя это выражение в (10), получаем

$$Y = A^{-1}A^*YA^{-*}A,$$

или

$$(A^{-*}A)Y = Y(A^{-*}A).$$

Таким образом, множество $\mathcal{N}$ решений уравнения (3) содержится в централизаторе $\mathcal{L}$ матрицы

$$C_A = A^{-*}A,$$

называемой коквадратом матрицы A. Однако $\mathcal{N}$ есть лишь собственное подмножество этого централизатора. Действительно, множество $\mathcal{K}$ решений уравнения

$$Z = A^{-1}Z^*A \tag{11}$$

тоже вложено в централизатор $\mathcal{L}$. (Это проверяется такими же выкладками, как выше.)

Очевидно, что вещественные линейные подпространства $\mathcal{N}$ и $\mathcal{K}$ имеют только тривиальное пересечение. Кроме того,

$$\dim_R \mathcal{K} = \dim_R \mathcal{N}.$$

В самом деле, заменой $Z = iV$ уравнение (11) превращается в

$$V = -A^{-1}V^*A,$$

т.е. в уравнение (10). Мы покажем теперь, что размерность централизатора $\mathcal{L}$ дается формулой

$$\dim_R \mathcal{L} = \dim_R \mathcal{N} + \dim_R \mathcal{K} = 2\dim_R \mathcal{N}.$$

5. Если матрица A подвергается конгруэнции

$$A \to B = P^*AP,$$

то

$$C_A \to C_B = P^{-1}C_AP,$$

т.е. коквадрат матрицы A претерпевает подобие. Неудивительно поэтому, что каноническая форма матрицы A и жорданова форма ее коквадрата тесно связаны друг с другом.

Для матрицы A с канонической формой W (см. (6)) жорданова форма коквадрата C_A имеет вид

$$\begin{aligned} J = J_{q_1}(\lambda_1^2) \oplus J_{q_2}(\lambda_2^2) \oplus \cdots \oplus J_{q_k}(\lambda_k^2) \oplus \\ J_{r_1}(\mu_1) \oplus J_{r_2}(\mu_2) \oplus \cdots \oplus J_{r_l}(\mu_l) \oplus \\ J_{r_1}(\bar{\mu}_1^{-1}) \oplus J_{r_2}(\bar{\mu}_2^{-1}) \oplus \cdots \oplus J_{r_l}(\bar{\mu}_l^{-1}). \end{aligned} \tag{12}$$

Централизатор коквадрата C_J подобен централизатору C_A и, следовательно, имеет ту же размерность. Для матрицы (12) эту размерность легко определить, следуя [3, глава VIII, теорема 1]. В результате получаются формулы типа (7)–(9), а именно

$$d = d_1 + d_2 + d_3. \tag{13}$$

Здесь

$$d_1 = \sum_{i=1}^{k} q_i + 2\sum_{i<j}{}' \min(q_i, q_j),$$

где пары (i, j), участвующие в формировании суммы $\sum'$, соответствуют жордановым клеткам, для которых $\lambda_i^2 = \lambda_j^2$. Для слагаемого d_2 имеем

$$d_2 = \sum_{i=1}^{l} r_i + 2\sum_{i<j}{}'' \min(r_i, r_j).$$

В сумме $\sum''$ учитываются лишь пары (i, j), отвечающие одинаковым числам μ_i и μ_j. Число d_3 показывает размерность прямой суммы в третьей строке формулы (12). Поскольку структура этой суммы полностью тождественна структуре прямой суммы во второй строке, то $d_3 = d_2$.

Таким образом, число d совпадает с числом c из формулы (7). Однако централизатор любой комплексной матрицы есть комплексное линейное подпространство. Поэтому d указывает комплексную размерность подпространства $\mathcal{L}$, а его вещественная размерность вдвое больше. Это и дает нужное соотношение $\dim_R \mathcal{L} = 2\dim_R \mathcal{N}$. Поскольку вещественные подпространства $\mathcal{N}$ и $\mathcal{K}$ пересекаются только по нулю, то в $M_n(\mathbf{C})$, рассматриваемом как вещественное пространство размерности $2n^2$, имеет место равенство

$$\mathcal{L} = \mathcal{N} \oplus \mathcal{K}.$$

Отсюда выводим

$$\dim_R \mathcal{M} = \dim_R \mathcal{N} = \dim_R \mathcal{L} - \dim_R \mathcal{K}. \tag{14}$$

Это равенство есть обобщение формулы Восса из [1] на случай комплексных матриц и *-конгруэнтных преобразований.

6. В заключение мы проиллюстрируем формулу (14) одним любопытным частным случаем. Пусть A — невырожденная эрмитова $(n \times n)$-матрица, не являющаяся знакоопределенной, т.е. оба ее индекса инерции p и q отличны от нуля. Коквадрат всякой эрмитовой матрицы есть единичная матрица I_n: $A^{-*}A = A^{-1}A = I_n$. Поэтому централизатор $\mathcal{L}$ матрицы C_A совпадает со всем пространством $M_n(\mathbf{C})$ и $\dim_R \mathcal{L} = 2n^2$.

Соотношение (11) описывает так называемые A-эрмитовы матрицы Z. Название связано с тем, что эти матрицы играют роль эрмитовых операторов в пространстве $\mathbf{C}^n$ с индефинитной метрикой, задаваемой матрицей A. Переписав (11) в виде

$$Z^*A = AZ,$$

замечаем, что $H = AZ$ есть обычная эрмитова матрица. Следовательно, вещественные подпространства A-эрмитовых и эрмитовых матриц имеют одну и ту же размерность n^2. Теперь формула (14) показывает, что размерность вещественного многообразия $\mathcal{M}$ также равна n^2. Соотношение $X^*AX = A$, задающее $\mathcal{M}$, описывает унитарные операторы в указанной A-индефинитной метрике.

Рассматривая $\mathcal{M}$ как группу, можно было бы иначе прийти к тому же выводу о размерности, установив изоморфное соответствие между $\mathcal{M}$ и псевдоунитарной группой $U(p, q)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Voss A.* Ueber die cogredienten Transformationen einer bilinearer Form in sich selbst // Abh. bayer. Akad. Wiss. II. 1892. B. 17. S. 233–356.
2. *De Terán F., Dopico F.M.* The equation $XA + AX^* = 0$ and the dimension of *-congruence orbits // Electronic J. Linear Algebra. 2011. V. 22. P. 448–465.
3. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966.

ON THE DIMENSION OF THE CONGRUENCE CENTRALIZER

Kh. D. Ikramov

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS E.E. Tyrtyshnikov

Let A be a nonsingular complex $n \times n$ matrix. The set $\mathcal{L}$ of matrices X satisfying the relation $X^*AX = A$ is called the congruence centralizer of A. It is shown that the dimension of $\mathcal{L}$, regarded as a real variety in the matrix space $M_n(\mathbf{C})$, equals to the difference of the real dimensions of the following two sets: the conventional centralizer of the matrix $A^{-*}A$ (this matrix is called the cosquare of A) and the matrix set described by the relation $X = A^{-1}X^*A$. This dimensional formula is a complex analog of the classical result of A. Voss that relates to a different involution in the space $M_n(\mathbf{C})$.

Keywords: *-congruence, congruence centralizer, cosquare, canonical form w.r.t. congruences