ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 493, с. 42–46

МАТЕМАТИКА

УДК 517+519.2

К ТЕОРЕМЕ ХЕЙДЕ НА ГРУППЕ $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$

© 2020 г. Г. М. Фельдман[1,*]

Представлено академиком РАН И.А. Ибрагимовым 12.03.2020 г.
Поступило 26.03.2020 г.
После доработки 26.03.2020 г.
Принято к публикации 15.04.2020 г.

Согласно известной теореме Хейде гауссовское распределение на вещественной прямой характеризуется симметрией условного распределения одной линейной формы от независимых случайных величин при фиксированной второй. Мы изучаем аналоги этой теоремы на локально компактных абелевых группах, содержащих элемент порядка 2. При этом коэффициенты линейных форм – топологические автоморфизмы группы.

Ключевые слова: теорема Хейде, локально компактная абелева группа, топологический автоморфизм

DOI: 10.31857/S2686954320040050

Следующая теорема, характеризующая гауссовское распределение на вещественной прямой, была доказана С.С. Хейде в [1], см. также [2, 13.4.1].

Теорема Хейде. *Пусть ξ_j, $j = 1, 2,..., n$, $n \geq 2$, – независимые случайные величины, имеющие распределения μ_j. Пусть a_j, b_j – отличные от нуля вещественные числа, такие что $b_i a_i^{-1} + b_j a_j^{-1} \neq 0$ для всех i, j. Предположим, что условное распределение линейной формы*

$$L_2 = b_1\xi_1 + \dots + b_n\xi_n$$

при фиксированной

$$L_1 = a_1\xi_1 + \dots + a_n\xi_n$$

симметрично.

Тогда все распределения μ_j – гауссовские, возможно вырожденные.

Групповым аналогам теоремы Хейде в случае, когда независимые случайные величины принимают значения в локально компактной абелевой группе X, а коэффициентами линейных форм являются топологические автоморфизмы X, посвящены, в частности, работы [3–12] (см. также [13, гл. VI]). Настоящая работа продолжает эти исследования. В ней изучается теорема Хейде на некоторых локально компактных абелевых группах, содержащих элемент порядка 2. Элементы порядка 2 играют особую роль в теореме Хейде. Как показано в сообщении, даже для достаточно просто устроенных групп X наличие в X элемента порядка 2 приводит к тому, что на X существуют негауссовские распределения, которые характеризуются симметрией одной линейной формы от независимых случайных величин при фиксированной второй.

Пусть X – локально компактная абелева группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности. Обозначим через $\mathrm{Aut}(X)$ группу топологических автоморфизмов группы X, а через I – тождественный автоморфизм группы. Обозначим через Y группу характеров группы X, а через (x, y) – значение характера $y \in Y$ на элементе $x \in X$. Пусть $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость. Обозначим через $\mathbb{R}$ группу вещественных чисел, через $\mathbb{Z}$ – группу целых чисел, через $\mathbb{Z}(2) = \{0, 1\}$ – группу вычетов по модулю 2 и через $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$ – группу вращений окружности.

Через $M^1(X)$ обозначим сверточную полугруппу вероятностных распределений на группе X. Пусть $\mu \in M^1(X)$. Обозначим через

$$\hat{\mu}(y) = \int_X (x, y)d\mu(x), \quad y \in Y,$$

характеристическую функцию распределения μ.

Напомним, что распределение γ называется гауссовским [14, гл. IV], если его характеристическая функция представима в виде

$$\hat{\gamma}(y) = (x, y)\exp\{-\varphi(y)\}, \quad y \in Y,$$

[1] *Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина Национальной академии наук Украины, Харьков, Украина*
*E-mail: feldman@ilt.kharkov.ua

где $x \in X$, а $\varphi(y)$ — непрерывная неотрицательная функция на группе Y, удовлетворяющая уравнению

$$\varphi(u+v)+\varphi(u-v)=2[\varphi(u)+\varphi(v)], \quad u,v \in Y.$$

Обозначим через $\Gamma(X)$ множество гауссовских распределений на группе X. Обозначим через E_x вырожденное распределение, сосредоточенное в точке $x \in X$, и через m_K — распределение Хаара на компактной подгруппе K группы X. Простейшей локально компактной абелевой группой, на которой существуют невырожденные гауссовские распределения и которая содержит элемент порядка 2, является группа $X = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}(2)$. Вначале мы изучим аналог теоремы Хейде для этой группы.

Пусть $X = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}(2)$. Обозначим через $x = (t, k)$, $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}(2)$, элементы X. Пусть Y — группа характеров группы X. Группа Y топологически изоморфна группе $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}(2)$. Обозначим через (s, l), $s \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{Z}(2)$, элементы группы Y. Очевидно, что каждый топологический автоморфизм a группы X имеет вид $a(t, k) = (c_a t, k)$, где c_a — ненулевое вещественное число.

Пусть μ — распределение на группе X и $\mu \in \Gamma(\mathbb{R})*M^1(\mathbb{Z}(2))$, т.е. $\mu = \gamma*\omega$, где $\gamma \in \Gamma(\mathbb{R})$, $\omega \in M^1(\mathbb{Z}(2))$. Тогда характеристическая функция распределения μ имеет вид

$$\hat{\mu}(s,l) = \begin{cases} \exp\{-\sigma s^2 + i\beta s\}, & s \in \mathbb{R}, \quad l = 0, \\ \kappa\exp\{-\sigma s^2 + i\beta s\}, & s \in \mathbb{R}, \quad l = 1, \end{cases}$$

где $\sigma \ge 0$, β, $\kappa \in \mathbb{R}$, $|\kappa| \le 1$. Мы рассмотрим сейчас более широкий класс распределений на группе X, чем класс $\Gamma(\mathbb{R})*M^1(\mathbb{Z}(2))$.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть $X = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}(2)$ и $\mu \in M^1(X)$. Пусть $\sigma \ge 0$, $\sigma' \ge 0$, β, β', $\kappa \in \mathbb{R}$. Будем говорить, что распределение μ п р и н а д л е ж и т к л а с с у Θ, если характеристическая функция $\hat{\mu}(s, l)$ представима в виде

$$\hat{\mu}(s,l) = \begin{cases} \exp\{-\sigma s^2 + i\beta s\}, & s \in \mathbb{R}, \quad l = 0, \\ \kappa\exp\{-\sigma' s^2 + i\beta' s\}, & s \in \mathbb{R}, \quad l = 1, \end{cases}$$

где либо $0 < \sigma' < \sigma$ и

$$0 < |\kappa| \le \sqrt{\frac{\sigma'}{\sigma}} \exp\left\{-\frac{(\beta-\beta')^2}{4(\sigma-\sigma')}\right\},$$

либо $\sigma = \sigma'$, $\beta = \beta'$ и $|\kappa| \le 1$.

Очевидно, что распределения, принадлежащие классу $\Gamma(\mathbb{R})*M^1(\mathbb{Z}(2))$, в частности, распределения с носителем в $\mathbb{Z}(2)$, принадлежат классу Θ. Отметим, что распределения, принадлежащие классу Θ, впервые появились в работе [12] в связи с изучением теоремы Хейде на a-адических соленоидах. В [12] доказано также, что существуют распределения $\mu \in \Theta$, такие что $\mu \notin \Gamma(\mathbb{R})*M^1(\mathbb{Z}(2))$.

Введем в рассмотрение еще один класс распределений на группе $X = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}(2)$. Пусть $\mu \in M^1(X)$. Определим распределение $\mu_{\mathbb{R}} \in M^1(\mathbb{R})$ по формуле $\mu_{\mathbb{R}}(E) = \mu(E \times \mathbb{Z}(2))$, где E — борелевское подмножество в $\mathbb{R}$.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть $X = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}(2)$ и $\mu \in M^1(X)$. Будем говорить, что распределение μ п р и н а д л е ж и т к л а с с у Λ, если $\mu_{\mathbb{R}} \in \Gamma(\mathbb{R})$. Другими словами, если $\hat{\mu}(s, 0)$ — характеристическая функция некоторого гауссовского распределения на вещественной прямой, возможно вырожденного.

Очевидно, что все распределения $\mu \in \Lambda$ получаются следующим образом. Пусть γ — гауссовское распределение на $\mathbb{R}$ с характеристической функцией $\hat{\gamma}(s) = e^{-\sigma s^2 + i\beta s}$, $s \in \mathbb{R}$, где $\sigma \ge 0$, $\beta \in \mathbb{R}$. Пусть $\gamma = \gamma^{(0)} + \gamma^{(1)}$, где $\gamma^{(j)}$ — меры на $\mathbb{R}$. Определим распределение $\mu \in M^1(X)$ следующим образом:

$$\mu(E \times \{k\}) = \begin{cases} \gamma^{(0)}(E), & k = 0, \\ \gamma^{(1)}(E), & k = 1, \end{cases}$$

где E — борелевское множество в $\mathbb{R}$. Тогда $\mu \in \Lambda$ и $\mu_{\mathbb{R}} = \gamma$. Отметим, что классы Θ и Λ являются подполугруппами в $M^1(X)$ и $\Theta \subset \Lambda$.

Следующее утверждение можно рассматривать как аналог теоремы Хейде для независимых случайных величин, принимающих значения в группе $X = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}(2)$.

Т е о р е м а 1. *Пусть $X = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}(2)$. Пусть a_j, b_j, $j = 1, 2,\ldots, n$, $n \ge 2$, — топологические автоморфизмы группы X, такие что $b_i a_i^{-1} + b_j a_j^{-1} \ne 0$ для всех i, j. Пусть ξ_j — независимые случайные величины со значениями в группе X, имеющие распределения μ_j. Предположим, что условное распределение линейной формы*

$$L_2 = b_1\xi_1 + \cdots + b_n\xi_n$$

при фиксированной

$$L_1 = a_1\xi_1 + \cdots + a_n\xi_n$$

симметрично.

Тогда имеет место следующая альтернатива:

1. *Все распределения μ_j принадлежат классу Λ, и по крайней мере одно из распределений μ_j представимо в виде $\mu_j = \gamma_j * m_{\mathbb{Z}(2)}$, где $\gamma_j \in \Gamma(\mathbb{R})$.*

2. *Все распределения μ_j принадлежат классу Θ и имеют не обращающиеся в ноль характеристические функции.*

Доказательство теоремы 1 опирается на следующую лемму, которая является частным случаем одного результата Линника–Рао [2, лемма 1.5.1].

Лемма 1. *Пусть* $\varepsilon > 0$. *Рассмотрим уравнение*

$$\sum_{J=1}^{n} \psi_j(s_1 + c_j s_2) = 0,$$

где $|s_1| < \varepsilon$, $|s_2| < \varepsilon$, *все числа* c_j *попарно различны, а* $\psi_j(s)$ – *непрерывные комплекснозначные функции от вещественного переменного* s. *Тогда функции* $\psi_j(s)$ *являются полиномами в некоторой окрестности нуля.*

Пусть $X = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}(2)$ и $b_j \in \operatorname{Aut}(X)$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда можно построить распределения $\mu_j \in \mathrm{M}^1(X)$ либо такие, как в пункте 1, либо такие, как в пункте 2 в теореме 1, которые обладают следующим свойством. Если ξ_j – независимые случайные величины со значениями в группе X, имеющие распределения μ_j, то условное распределение линейной формы $L_2 = b_1\xi_1 + \cdots + b_n\xi_n$ при фиксированной $L_1 = a_1\xi_1 + \cdots + a_n\xi_n$ симметрично. Следовательно, теорема 1 не может быть усилена за счет сужения класса распределений, которые характеризуются симметрией условного распределения линейной формы L_2 при фиксированной L_1.

Теорема Хейде близка к хорошо известной теореме Скитовича–Дармуа, в которой гауссовское распределение на вещественной прямой характеризуется независимостью двух линейных форм от независимых случайных величин (см., например, [12, гл. 3]).

Теорема Скитовича–Дармуа. *Пусть* ξ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, $n \geq 2$, – *независимые случайные величины, имеющие распределения* μ_j. *Пусть* a_j *и* b_j – *отличные от нуля вещественные числа. Предположим, что линейные формы* $L_1 = a_1\xi_1 + \cdots + a_n\xi_n$ *и* $L_2 = b_1\xi_1 + \cdots + b_n\xi_n$ *независимы.*

Тогда все распределения μ_j – *гауссовские, возможно, вырожденные.*

Сравним теорему 1 с аналогом теоремы Скитовича–Дармуа для группы $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}(2)$ Несложно доказать, что справедливо следующее утверждение.

Теорема Скитовича–Дармуа для группы $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}(2)$. *Пусть* $X = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}(2)$. *Пусть* ξ_j – *независимые случайные величины со значениями в группе* X, *имеющие распределения* μ_j. *Пусть* a_j, b_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, $n \geq 2$, – *топологические автоморфизмы группы* X. *Предположим, что линейные формы* $L_1 = a_1\xi_1 + \cdots + a_n\xi_n$ *и* $L_2 = b_1\xi_1 + \cdots + b_n\xi_n$ *независимы.*

Тогда все распределения μ_j – *гауссовские.*

Мы видим, что если на вещественной прямой гауссовские распределения характеризуются как независимостью двух линейных форм от независимых случайных величин, так и симметрией условного распределения одной линейной формы при фиксированной второй, то на группе $X = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}(2)$ независимостью двух линейных форм от независимых случайных величин характеризуются только гауссовские распределения, а симметрией условного распределения одной линейной формы при фиксированной второй характеризуется существенно более широкий класс распределений (см. теорему 1).

Пусть $X = \mathbb{R} \times \mathbb{T}$. Элементы группы X будем обозначать через $x = (t, z)$, $t \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{T}$.

Обозначим через G подгруппу в X, порожденную элементом порядка 2. Легко проверить, что каждый топологический автоморфизм α группы X определяется матрицей $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, и α задается формулой $\alpha(t, z) = (at, e^{ibt}z^{\pm 1})$, $t \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{T}$. Мы будем отождествлять α с соответствующей матрицей $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$. Пусть $\alpha \in \operatorname{Aut}(X)$ и α имеет вид $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $a \neq 1$. Определим непрерывный мономорфизм $\tau\colon \mathbb{R} \times \mathbb{Z}(2) \to X$ по формуле

$$\tau(t, k) = (t, (-1)^k e^{\frac{ibt}{a-1}}), \quad t \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}(2).$$

Положим $F = \tau(\mathbb{R})$. Тогда F – замкнутая подгруппа в X, топологически изоморфная $\mathbb{R}$, и $\tau(\mathbb{Z}(2)) = G$. Следующее утверждение можно рассматривать как аналог теоремы Хейде для двух независимых случайных величин, принимающих значения в группе $X = \mathbb{R} \times \mathbb{T}$ в случае, когда $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Теорема 2. *Пусть* $X = \mathbb{R} \times \mathbb{T}$ *и* $\alpha \in \operatorname{Aut}(X)$, *где* $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Пусть* ξ_1 *и* ξ_2 – *независимые случайные величины со значениями в группе* X *и с распределениями* μ_1 *и* μ_2. *Предположим, что условное распределение линейной формы* $L_2 = \xi_1 + \alpha\xi_2$ *при фиксированной* $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ *симметрично.*

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. *Если* $a < 0$ *и* $a \neq -1$, *то для распределений* μ_j *имеются такие возможности.*

1а. *Распределения* μ_j *представимы в виде* $\mu_j = E_{x_j} * \tau(M_j)$, *где* $x_j \in X$, *а* M_j – *распределения на группе* $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}(2)$, *принадлежащие классу* Λ, *и по крайней мере одно из распределений* μ_j *представимо в виде* $\mu_j = E_{x_j} * \gamma_j * m_G$, *где* $\gamma_j \in \Gamma(F)$.

1б. *Распределения* μ_j *представимы в виде* $\mu_j = E_{x_j} * \tau(M_j)$, *где* $x_j \in X$, *а* M_j – *распределения на группе* $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}(2)$, *принадлежащие классу* Θ, *и характеристические функции распределений* μ_j *не обращаются в ноль.*

2. *Если $a = -1$, то распределения μ_j имеют вид $\mu_j = E_{x_j} * \lambda_j$, где $x_j \in X$, а $\lambda_j \in M^1(F \times G)$, при этом либо $\lambda_2 = \lambda_1 * \omega_1$, либо $\lambda_1 = \lambda_2 * \omega_2$, где $\omega_j \in M^1(G)$.*

3. *Если $a > 0$, то носители некоторых сдвигов распределений μ_j содержатся в G.*

Доказательство теоремы 2 опирается на теорему 1 и следующее утверждение, представляющее определенный самостоятельный интерес.

Лемма 2. *Пусть $X = \mathbb{R} \times \mathbb{T}$ и $\alpha \in \mathrm{Aut}(X)$, где $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2. Предположим, что условное распределение линейной формы $L_2 = \xi_1 + \alpha\xi_2$ при фиксированной $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ симметрично. Тогда существуют элементы $x_1, x_2 \in X$, такие что если $a \neq 1$, то носители распределений $\mu'_j = \mu_j * E_{-x_j}$ содержатся в подгруппе $F \times G$. Если $a = 1$, то носители распределений μ'_j содержатся в подгруппе G. Кроме того, если ξ'_j — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ'_j, то условное распределение линейной формы $L'_2 = \xi'_1 + \alpha\xi'_2$ при фиксированной $L'_1 = \xi'_1 + \xi'_2$ симметрично.*

Пусть $X = \mathbb{R} \times \mathbb{T}$ и $\alpha \in \mathrm{Aut}\ (X)$, где $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда можно построить распределения $\mu_1, \mu_2 \in M^1(X)$ такие, как в пунктах 1–3 теоремы 2, которые обладают следующим свойством. Если ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе X, имеющие распределения μ_1 и μ_2, то условное распределение линейной формы $L_2 = \xi_1 + \alpha\xi_2$ при фиксированной $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ симметрично. Отсюда вытекает, что теорема 2 не может быть усилена за счет сужения класса распределений, которые характеризуются симметрией условного распределения линейной формы L_2 при фиксированной L_1.

Опираясь на теорему 2, можно доказать следующее

Предложение 1. *Пусть $X = \mathbb{R} \times \mathbb{T}$. Не существует топологического автоморфизма α группы X, который обладает следующими свойствами:*

1. *Если ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2 с необращающимися в нуль характеристическими функциями, то из симметрии условного распределения линейной формы $L_2 = \xi_1 + \alpha\xi_2$ при фиксированной $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ вытекает, что $\mu_j = \gamma_j * \rho_j$, где γ_j — гауссовские распределения на X, а $\rho_j \in M^1(G)$, $j = 1, 2$.*

2. *Существуют независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 со значениями в группе X и с распределениями $\mu_j = \gamma_j * \rho_j$, где γ_j — невырожденные гауссовские распределения на X, $\rho_j \in M^1(G)$, $j = 1, 2$, такие что условное распределение линейной формы $L_2 = \xi_1 + \alpha\xi_2$ при фиксированной $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ симметрично.*

Интересно отметить, что если $X = \mathbb{T}^2$, а G — подгруппа в X, порожденная всеми элементами X порядка 2, то такой топологический автоморфизм α группы X существует (см. [5]).

Напомним определение $\boldsymbol{a}$-адического соленоида $\Sigma_{\boldsymbol{a}}$. Пусть $\boldsymbol{a} = (a_0, a_1, \ldots)$ — произвольная бесконечная последовательность целых чисел, где каждое из a_n больше, чем 1. Рассмотрим группу $\mathbb{R} \times \Delta_{\boldsymbol{a}}$, где $\Delta_{\boldsymbol{a}}$ — группа целых $\boldsymbol{a}$-адических чисел, и обозначим через B подгруппу группы $\mathbb{R} \times \Delta_{\boldsymbol{a}}$ вида $B = \{(n, n\mathbf{u}) : n \in \mathbb{Z}\}$, где $\mathbf{u} = (1, 0, \ldots, 0, \ldots)$. Фактор-группа $\Sigma_{\boldsymbol{a}} = \mathbb{R} \times \Delta_{\boldsymbol{a}} / B$ называется $\boldsymbol{a}$-адическим соленоидом. Группа $\Sigma_{\boldsymbol{a}}$ — компактна, связна и имеет размерность 1 [15, (10.12), (10.13), (24.28)]. Группа характеров группы $\Sigma_{\boldsymbol{a}}$ топологически изоморфна дискретной группе вида

$$H_{\boldsymbol{a}} = \left\{ \frac{m}{a_0 a_1 \cdots a_n} : n = 0, 1, \ldots; m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Мы будем отождествлять $H_{\boldsymbol{a}}$ с группой характеров группы $\Sigma_{\boldsymbol{a}}$. Пусть n — целое число, $n \neq 0$. Обозначим через f_n гомоморфизм $f_n : \Sigma_{\boldsymbol{a}} \to \Sigma_{\boldsymbol{a}}$, определяемый формулой $f_n x = nx$. Каждый топологический автоморфизм a группы $\Sigma_{\boldsymbol{a}}$ имеет вид $a = f_p f_q^{-1}$ для некоторых взаимно простых p и q, где $f_p, f_q \in \mathrm{Aut}(\Sigma_{\boldsymbol{a}})$.

Пусть $X = \Sigma_{\boldsymbol{a}} \times \mathbb{T}$. Элементы группы X будем обозначать через $x = (g, z)$, $g \in \Sigma_{\boldsymbol{a}}, z \in \mathbb{T}$. Нетрудно проверить, что каждый топологический автоморфизм $\alpha \in \mathrm{Aut}\ (X)$ определяется матрицей $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$, где $a \in \mathrm{Aut}\ (\Sigma_{\boldsymbol{a}})$, $b \in H_{\boldsymbol{a}}$, и α задается формулой $\alpha(g, z) = (ag, (g, b)z^{\pm 1})$, $g \in \Sigma_{\boldsymbol{a}}, z \in \mathbb{T}$. Следующее утверждение можно рассматривать как аналог теоремы Хейде для двух независимых случайных величин, принимающих значения в группе $X = \Sigma_{\boldsymbol{a}} \times \mathbb{T}$.

Теорема 3. *Пусть $X = \Sigma_{\boldsymbol{a}} \times \mathbb{T}$, где $\boldsymbol{a}$-адический соленоид $\Sigma_{\boldsymbol{a}}$ не содержит элемента порядка 2. Обозначим через G подгруппу X, порожденную элементом порядка 2. Пусть α — топологический автоморфизм группы X, удовлетворяющий условию*

$$\mathrm{Ker}(I + \alpha) = \{0\}.$$

Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2 с *необращающимися в нуль характеристическими функциями. Предположим, что условное распределение линейной формы* $L_2 = \xi_1 + \alpha\xi_2$ *при фиксированной* $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ *симметрично. Тогда существует непрерывный мономорфизм* $\pi: \mathbb{R} \times \mathbb{Z}(2) \to X$, *такой, что распределения* μ_j *представимы в виде* $\mu_j = E_{x_j} * \pi(M_j)$, $x_j \in X$, *а* M_j *— распределения на группе* $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}(2)$, *принадлежащие классу* Θ.

Доказательство теоремы 3 опирается на теорему 2 и следующую лемму.

Лемма 3 [11]. *Пусть X — локально компактная абелева группа, не содержащая элементов порядка* 2. *Пусть* α *— топологический автоморфизм группы X, удовлетворяющий условию*

$$\mathrm{Ker}(I + \alpha) = \{0\}.$$

Пусть ξ_1 *и* ξ_2 *— независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями* μ_1 *и* μ_2 *с необращающимися в нуль характеристическими функциями. Тогда из симметрии условного распределения линейной формы* $L_2 = \xi_1 + \alpha\xi_2$ *при фиксированной* $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ *вытекает, что* μ_1 *и* μ_2 *— гауссовские распределения.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Heyde C.C.* // Sankhya. Ser. A. 1970. V. 32. P. 115–118.
2. *Каган А.М., Линник Ю.В., Рао С.Р.* Характеризационные задачи математической статистики. М.: Наука, 1972. 656 с.
3. *Feldman G.M.* // J. Theoretical Probab. 2004. V. 17. P. 929–941.
4. *Миронюк М.В., Фельдман Г.М.* // Сиб. мат. журнал. 2005. Т. 46. С. 403–415.
5. *Feldman G.M.* // Probab. Theory Relat. Fields. 2005. V. 133. P. 345–357.
6. *Feldman G.M.* // Studia Math. 2006. V. 177. P. 67–79.
7. *Feldman G.M.* // J. Funct. Anal. 2010. V. 258. P. 3977–3987.
8. *Myronyuk M. V.* // J. Aust. Math. Soc. 2010. V. 88. P. 93–102.
9. *Feldman G.M.* // Math. Nachr. 2013. V. 286. P. 340–348.
10. *Feldman G.M.* // Publicationes Mathematicae Debrecen. 2015. V. 87. P. 147–166.
11. *Фельдман Г.М.* Теор. вероятн. и ее применения. 2017. Т. 62. С. 499–517.
12. *Feldman G.M.* // J. Fourier Anal. Appl. 2020. V. 26. № 14. P. 1–22.
13. *Feldman G.M.* Functional equations and characterization problems on locally compact Abelian groups. EMS Tracts in Mathematics. Zurich: Europ. Math. Soc., 2008. V. 5. 268 p.
14. *Parthasarathy K.R.* Probability measures on metric spaces. New York and London: Academic Press, 1967. 276 p.
15. *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ. 1975. Т. 1. М.: Наука, 1975. 656 с.

ON HEYDE'S THEOREM ON THE GROUP $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$

G. M. Feldman[a]

[a] *B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, Ukraine*

Presented by Academician of the RAS I.A. Ibragimov

According to the well-knows Heyde theorem the Gaussian distribution on the real line is characterized by the symmetry of the conditional distribution of one linear form in independent random variables given the other. We study analogues of this theorem for some locally compact Abelian groups that contain an element of order 2. While coefficients of linear forms are topological automorphisms of a group.

Keywords: Heyde theorem, locally compact Abelian group, topological automorphism