ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 493, с. 86–89

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 519.62

ЗАДАЧА БЕЗОПАСНОГО СЛЕЖЕНИЯ ЗА ОБЪЕКТОМ, УКЛОНЯЮЩИМСЯ ОТ НАБЛЮДЕНИЯ В $\mathbb{R}^2$

© 2020 г. Академик РАН В. И. Бердышев[1,*]

Поступило 06.05.2020 г.
После доработки 18.05.2020 г.
Принято к публикации 20.05.2020 г.

В задаче о движении автономного объекта в условиях недружественного наблюдения характеризуются позиции наблюдателя, при которых объект для любого маршрута может выбрать скоростной режим, позволяющий уклониться от наблюдения, и позиции, гарантирующие наблюдателю возможность слежения за объектом на начальной части траектории и только на ней.

Ключевые слова: навигация, автономный аппарат, траектория, наблюдатель

DOI: 10.31857/S2686954320040049

1. В заданном коридоре $Y \subset \mathbb{R}^2$, граница ∂Y которого гомеоморфна окружности, движется объект t со скоростным поражающим миниобъектом m, способным двигаться равномерно и прямолинейно. В $\mathbb{R}^2$ зафиксировано множество G, $G \cap Y = \phi$, с кусочно гладкой границей ∂G, являющееся замыканием открытого множества, препятствующее движению и видимости. Наблюдатель f, опасаясь миниобъекта, находится в окрестности угловых точек или выпуклых участков границы ∂G множества G. Скорость v_m миниобъекта существенно превосходит скорости $v_f > 0$, $v_t > 0$ наблюдателя и объекта. Траектория объекта – это кривая $\mathcal{T} \subset Y$ (маршрут) с заданным скоростным режимом v_t на ней. Далее t_* – начальная, t^* – конечная точки маршрута.

Задача состоит в выяснении возможности наблюдателя следить за объектом в безопасном для себя режиме, а объекта – уклониться от наблюдения при их одновременном движении. Здесь важное значение имеют позиция наблюдателя и расположение траектории $\mathcal{T}$. В работе характеризуются позиции, для которых объект для любой $\mathcal{T}$ может выбрать режим v_t, позволяющий уклониться от наблюдения, и позиции, гарантирующие наблюдателю возможность слежения за объектом на части маршрута. В предлагаемой модели объект изображается точкой t, а наблюдатель – кругом $V_\varepsilon(f)$ малого радиуса $\varepsilon > 0$, в центре f которого расположено средство наблюдения. Модель с телесным наблюдателем принципиально отличается от модели с точечным наблюдателем (см., например, [1, 2]) по причине повышенной уязвимости наблюдателя (см. также [3]).

2. Если наблюдатель f имеет время τ_0, чтобы уйти из зоны видимости движущегося объекта t, то он может следить в безопасном для себя режиме за объектом при условии, что $\|f - t\| > \mathcal{R}$, где $\mathcal{R} = v_m\tau_0$. Пусть $t_s \in \mathcal{T}$, $\|f - t_s\| = \mathcal{R}$. Поэтому далее рассматриваются сформулированные выше задачи применительно к участку маршрута от точки t_s предполагаемого старта миниобъекта до конечной точки t^* маршрута. Этот участок маршрута обозначим через $\mathcal{T}$.

Через C обозначается гладкая строго выпуклая связная максимальная по включению дуга, $C \subset \partial G$, без концевых точек. Для любой точки $c \in C$ существует единственная опорная к множеству $G \cap V_\delta(c)$ прямая при малом $\delta > 0$. Точку $a \in \partial G$ называем вершиной угла $A \subset \partial G$ или угловой, если в ней существует пара односторонне касательных к $\partial G \cap \partial V_\delta(a)$ прямых (см. рис. 1). Выпуклые дуги C и углы A играют одинаковую роль в рассматриваемой задаче, поэтому далее используем запись $S \in \{A, C\}$, $s \in \{a \in A, c \in C\}$ и S называем фрагментом границы множества G.

[1] *Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург, Россия*
E-mail: bvi@imm.uran.ru

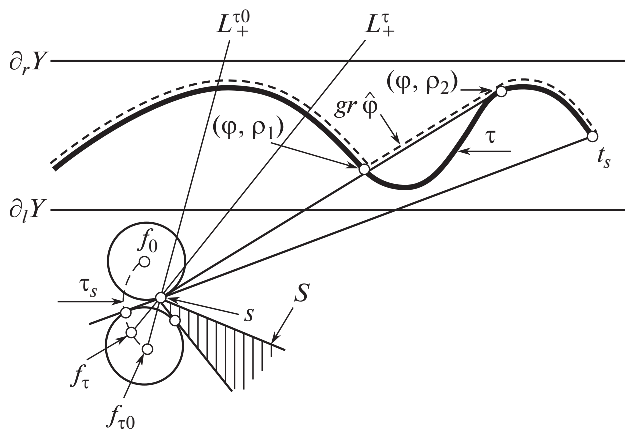

Рис. 1. На рисунке границы коридора Y изображены жирными прямолинейными отрезками, маршрут $\mathcal{T}$ движения объекта – жирной кривой внутри Y, фрагмент S множества G – заштрихованным углом, траектория $\mathcal{T}_s$ движения центра круга $V_\varepsilon(f)$ – пунктирной линией.

Далее $\partial_l Y$, $\partial_r Y$ – левая и правая границы коридора Y относительно двигающегося по коридору объекта t из начальной t_* в конечную точку t^*. Наблюдатель выбирает фрагмент S, расположенный вблизи $\mathcal{T}$, и начальную позицию f_0 так, что прямая $L_s = \{s + \lambda(t_s - s), \lambda \in \mathbb{R}^1\}$ является опорной к $V_\delta(s) \cap S$ в точке $s = L_s \cap S$, круг $V_\varepsilon(f_0)$ содержит точку s, и прямая L_s разделяет $V_\varepsilon(f_0)$ и $S \cap V_\delta(s)$, и, кроме того, существует $\bar{f}$, для которого $V_\varepsilon(\bar{f})$ принадлежит конусу $\mathrm{co}(t_s, S)$ с вершиной t_s, натянутому на S и касается невидимой из t_s стороны поверхности S. Наблюдатель также выбирает траекторию $\mathcal{T}_s$ движения центра f_τ $(0 \le \tau \le \tau_0)$ от f_0 до $\bar{f} = f_{\tau_0}$, $V_\varepsilon^\circ(f_\tau) \cap S = \phi$, где V° – внутренность круга. Выбор исходного положения f_0 диктуется желанием видеть весь коридор Y, а $\mathcal{T}_s$ – траектория, по которой наблюдатель должен стартовать из f_0 (одновременно со стартом объекта из t_s по траектории $\mathcal{T}$) в “укрытие”, исключающее возможность попадания миниобъекта m в круг $V_\varepsilon(f_\tau)$.

Обозначим через $L_+^\tau = L_+(f_\tau)$ луч с началом f_τ такой, что прямая $L^\tau = L^\tau(f_\tau) \supset L_+^\tau$ является опорной к S и разделяет точку f_0 и S, и $L_+^\tau \cap S = L^\tau \cap S$. Полупространство с границей L^τ, содержащее S, обозначается через P_τ. Наблюдателю f_τ не видны точки из $P_\tau \cap Y$, но видны точки из $(\mathbb{R}^2 \backslash P_\tau) \cap Y$. Множество возможных позиций наблюдателя разобьем на две группы I и II, в зависимости от расположения S на левой или правой стороне коридора Y и от направления движения вокруг S по траектории $\mathcal{T}_s$ центра шара f_τ, $0 \le \tau \le \tau_0$, по или против часовой стрелки:

$$\text{I.}\ \begin{array}{l} \rho(S,\partial_r Y) < \rho(S,\partial_l Y) - \text{движение } f_\tau \text{ по часовой стрелке;} \\ \rho(S,\partial_l Y) < \rho(S,\partial_r Y) - \text{движение } f_\tau \text{ против часовой стрелки;} \end{array}$$
$$\text{II.}\ \begin{array}{l} \rho(S,\partial_r Y) < \rho(S,\partial_l Y) - \text{движение } f_\tau \text{ против часовой стрелки;} \\ \rho(S,\partial_l Y) < \rho(S,\partial_r Y) - \text{движение } f_\tau \text{ по часовой стрелке.} \end{array}$$

3. Рассмотрим случай I. Ради определенности будем считать, что $\rho(S, \partial_l Y) < \rho(S, \partial_r Y)$ и, значит, f_τ движется против часовой стрелки часов. Пусть

$$\mathcal{T} = \{t(\eta): 0 \le \eta \le 1, t(0) = t_*, t(1) = t^*\} \subset Y$$

есть гладкая кривая, определяющая маршрут, наблюдатель находится в ε-окрестности фрагмента S, который занимает позицию I, $t_s \in \mathcal{T}$, $\|s - t_s\| = \mathcal{R}$. Определим полярную систему координат (φ, ρ) с началом в точке s и осью $L_+(f_{\tau_s}) = \{s + \lambda(t_s - s): \lambda \ge 0\}$. При движении наблюдателя по траектории $\mathcal{T}_s$ луч $L_+^\tau = L_+(f_\tau)$ вращается против стрелки часов от $L_+(f_{\tau_s})$ до $L_+(f_{\tau_0})$, при этом f_τ не видит точки из P_τ. Поэтому задача объекта t – следовать по $\mathcal{T}$ за лучом L_+^τ, находясь в полупространстве P_τ, например, в полупространстве $P_{\tau - \delta}$ при малом $\delta > 0$.

Пусть границы $\partial_l Y$, $\partial_r Y$ и кривая $\mathcal{T}$ представлены в полярной системе координат графиками функций $\varphi = \varphi_l(\rho)$, $\varphi = \varphi_r(\rho)$, $\varphi = \varphi(\rho)$. Ясно, что

$$\varphi_l(\rho) \le \varphi(\rho) \le \varphi_r(\rho) \quad (0 \le \rho \le \mathcal{R}).$$

Функция

$$\hat{\varphi}(\rho) = \max\{\varphi(\gamma): \rho \ge \gamma \ge \mathcal{R}\}$$

непрерывна и при изменении ρ от $\mathcal{R}$ до нуля возрастает. На участке строгого возрастания функции $\hat{\varphi}$ движение объекта $t(\tau)$, следующего по кривой $\mathcal{T}$ за точкой $\mathcal{T} \cap L_+^\tau$, задается соотношением $t(\tau) = \mathcal{T} \cap L_+^{\tau-\delta}$. Скорость движения точки $t(\tau)$ по такому участку кривой $\mathcal{T}$ определяется величиной производной

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\|t(\tau + \Delta\tau) - t(\tau)\|}{\Delta\tau}.$$

Пусть $[\rho_1, \rho_2] \subset [0, \mathcal{R}]$, $\rho_1 < \rho_2$ – участок постоянства функции $\hat{\varphi}(\rho)$. График функции $\hat{\varphi}$ на этом участке лежит на луче L_+^τ при некотором τ. Чтобы объекту t следовать за лучом $L_+^{\tau+0}$, он должен преодолеть участок графика $\mathrm{gr}\varphi = \mathcal{T}$, связывающий точки $(\hat{\varphi}(\rho_i), \rho_i)$ $(i = 1, 2)$, с возможно большей скоростью, потратив на это некоторое время $\delta > 0$. В момент прибытия объекта в точку $(\hat{\varphi}(\rho_1), \rho_1)$ преследуемый луч займет положение $L_+^{\tau+\delta}$. Итак, наблюдатель, опасаясь миниобъекта, вынужден без остановки двигаться по $\mathcal{T}_s$, при этом вращается луч L_+^τ. Объект следует за лучом L_+^τ с некоторым отставанием, будучи невидимым для наблюдателя. В конечный момент τ_0 наблюдатель занимает положение f_{τ_0} и в целях безопасности выключает излучающее устройство, а объект t далее следует по $\mathcal{T}$ в отсутствии наблюдения. Таким образом, указан способ выбора скоростного режима $v(\tau)$ на $\mathcal{T}$ и доказана

Т е о р е м а 1. *Пусть наблюдатель f располагается в ε-окрестности фрагмента S, который находится в позиции* I, *$\mathcal{T} \subset Y$ – гладкая кривая, соединяющая точки t_s и t^*. Тогда существует функция $v_t(\tau)$ скорости передвижения объекта t по кривой $\mathcal{T}$ такая, что*

$$v_t(\cdot) \geq \min_{0 \leq \tau \leq \tau_0} \frac{dt(\tau)}{d\tau}$$

и объект t, начинающий движение из точки t_s одновременно со стартом наблюдателя из точки f_{τ_s} по траектории $\mathcal{T}_s$, не виден наблюдателем ни в одной точке кривой $\mathcal{T}$.

З а м е ч а н и е. Пусть φ_{τ_0} – угол луча $L_+^{\tau_0}$ с осью $L_+(f_{\tau_s})$. Если наблюдатель в конечном положении f_{τ_0} готов продолжить слежение (в безопасном режиме) за объектом $t = t(\varphi, \rho)$, то это возможно только при $\varphi > \varphi_{\tau_0}$

Наличие двух наблюдателей в позиции I не исключает для объекта возможности быть незамеченным на траектории. Пусть фрагменты S^i $(i = 1, 2)$ расположены по разные стороны коридора Y в позиции I каждый, $\hat{t} = t_{s^1 s^2} \subset Y$, $\|\hat{t} - s^i\| = \mathcal{R}$. Одновременное движение наблюдателей f^i по своим траекториям $\mathcal{T}_{s^i}$ порождает два однопараметрических пучка лучей $L_+(f_\tau^i)$, $\tau_{s^i} \leq \tau \leq \tau_0^i$. Обозначим

$$\beta_1 = \tau_{s^1}, \quad a_1 = \tau_0^1, \quad \beta_2 = \tau_{s^2}, \quad a_2 = \tau_0^2,$$

Непрерывная кривая

$$\hat{\mathcal{T}} = \{\hat{t}(\lambda) = L_+(f^1_{\beta_1+\lambda(\alpha_1-\beta_1)}) \cap L_+(f^2_{\beta_2+\lambda(\alpha_2-\beta_2)}): 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

соединяет точки $\hat{t}$ и $L_+(f^1_{\tau_0^1}) \cap L_+(f^2_{\tau_0^2})$. Объект t, двигаясь по этой кривой за точкой $\hat{t}(\lambda)$ с малым запаздыванием, при изменении λ от 0 до 1 остается невидимым для обоих наблюдателей.

4. Пусть скорость движения объекта t по $\mathcal{T}$ строго больше нуля. Покажем, что наблюдатель в позиции II всегда имеет возможность отслеживать начальный участок любого маршрута $\mathcal{T}$ от точки $t_s \subset \mathcal{T}$, $\|s - t_s\| = \mathcal{R}$. Не ограничивая общности рассуждений, предположим, что

$$\rho(S, \partial_l Y) < \rho(S, \partial_r Y).$$

Для $\tau \in [0, \tau_0]$ наблюдатель, находясь в положении f_τ, видит все точки из $Y \cap (\mathbb{R}^2 \setminus P_\tau)$, а точки из $Y \cap P_\tau$ ему не видны, где P_τ – полупространство с границей L_τ, содержащее множество S. В момент $\tau = 0$ одновременно стартуют объект t по $\mathcal{T}$ из точки t_s и наблюдатель f по $\mathcal{T}_s$ из точки f_0 по часовой стрелке. Пусть $\tilde{\tau}$ – момент встречи объекта с движущимся ему навстречу лучом L_+^τ, и $\tilde{t}$ – точка из $\mathcal{T} \cap L_+^{\tilde{\tau}}$, для которой длина дуги $\mathcal{T}(t_s, \tilde{t})$ кривой $\mathcal{T}$ между точками t_s и $\tilde{t}$ минимальна. Двигаясь по дуге $\mathcal{T}(t_s, \tilde{t})$, объект находится в поле зрения наблюдателя $f_\tau(0 \geq \tau \geq \tilde{\tau})$. Часть кривой $(\mathcal{T} \setminus P_{\tilde{\tau}}) \setminus \mathcal{T}(t_s, \tilde{t})$ преодолевается объектом t движением по $\mathcal{T}$ за лучом L_+^τ $(\tau \geq \tilde{\tau})$ с запаздыванием. Остаток маршрута $\mathcal{T} \cap P_{\tilde{\tau}}$ объект проходит вне области наблюдения. Наблюдатель в целях безопасности движется до момента τ_s, для которого $t_s \in L_+^{\tau_s}$. Итак, установлена

Т е о р е м а 2. *Пусть наблюдатель f расположен в ε-окрестности фрагмента S, находящегося в позиции* II, *$\mathcal{T} \subset Y$ – кривая, соединяющая точки t_s и t^*. Тогда существует точка $\tilde{t} \in \mathcal{T}$, $\tilde{t} \neq t^*$, $\tilde{t} \neq t_s$ такая, что для наблюдателя обеспечена возможность проследить движение объекта t на участке кривой $\mathcal{T}$ от точки t_s до $\tilde{t}$, и только на нем.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бердышев В.И.* Характеризация оптимальных траекторий в $\mathbb{R}^3$ // ДАН. 2015. Т. 464. № 4. С. 411–413.

2. *Бердышев В.И., Костоусов В.Б., Попов А.А.* Траектория, минимизирующая облучение движущегося объекта // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24. № 1. С. 41–52.

3. *Лю В.* Методы планирования пути в среде с препятствиями (обзор) // Математика и мат. моделирование. 2018. № 1. С. 15–58.

PROBLEM OF SAFETY TRACKING THE OBJECT AVOIDIND THE OBSERVATION IN $\mathbb{R}^2$

Academicain of the RAS V. I. Berdyshev[a]

[a] *Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation*

In the problem of the movement of an autonomous object under unfriendly observation, the observer's positions are characterized at which the object for any route can choose a speed mode that allows him to evade observation, and positions that guarantee the observer the ability to track the object at the initial part of the trajectory and only on it.

Keywords: moveing object, solid observer, trajectory