ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 492, с. 31–37

МАТЕМАТИКА

УДК 519.634

О L^2-ДИССИПАТИВНОСТИ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ЯВНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ С КВАЗИГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИЕЙ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ БАРОТРОПНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

© 2020 г. А. А. Злотник[1,2,*], Т. А. Ломоносов[1,]**

Представлено академиком РАН Б.Н. Четверушкиным 16.08.2019 г.
Поступило 17.08.2019 г.
После доработки 09.04.2020 г.
Принято к публикации 10.04.2020 г.

Изучается явная двухслойная симметричная по пространству разностная схема для системы многомерных уравнений баротропной газовой динамики с квазигазодинамической регуляризацией, линеаризованной на постоянном решении (с произвольной скоростью). Спектральным методом выводятся критерий и как необходимые, так и достаточные условия L^2-диссипативности решений задачи Коши для схемы. В них число Куранта равномерно ограничено по числу Маха.

Ключевые слова: уравнения баротропной газовой динамики, квазигазодинамическая система уравнений, явная двухслойная разностная схема, устойчивость

DOI: 10.31857/S2686954320030224

Среди методов численного решения систем уравнений газовой динамики существуют методы, основанные на предварительной регуляризации уравнений, в том числе кинетической (квазигазодинамической, КГД) регуляризации [1, 2]. В баротропном случае системы уравнений с КГД-регуляризацией были введены и исследованы в [3–5], а разнообразные их приложения даны в том числе в [6–8]. В данном сообщении изучается явная двухслойная по времени и симметричная по пространству разностная схема для такой системы уравнений, линеаризованной на постоянном решении (с произвольной скоростью). В многомерном случае впервые выводятся критерий и более простые как необходимые, так и достаточные условия L^2-диссипативности решений задачи Коши для этой схемы в случае равномерной прямоугольной сетки и разного выбора параметра регуляризации τ в зависимости от сетки. Используется спектральный метод [9]. Ранее авторами подобные результаты были получены в 1D-случае [10–13].

[1] *Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Москва, Россия*
[2] *Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия*
**E-mail: azlotnik@hse.ru*
***E-mail: tlomonosov@hse.ru*

Система уравнений баротропной газовой динамики с КГД-регуляризацией из [4] состоит из уравнений баланса массы и импульса:

$$\begin{gathered}\partial_t\rho + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0,\\ \partial_t(\rho\mathbf{u}) + \operatorname{div}(\mathbf{j}\otimes\mathbf{u}) + \nabla p(\rho) = \operatorname{div}\Pi\end{gathered} \tag{1}$$

в $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$ при $t \ge 0$. Искомые плотность $\rho > 0$ и скорость газа $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ зависят от (x, t), где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, а $p(\rho)$ – давление, с $p'(\rho) > 0$. Операторы div и $\nabla = (\partial_1, \ldots, \partial_n)$ берутся по x, а $\partial_t = \dfrac{\partial}{\partial t}$, $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$. Символы $\otimes$ и $\cdot$ означают тензорное и скалярное произведение векторов, а дивергенция тензора берется по его первому индексу.

Регуляризованные поток массы $\mathbf{j}$ и тензор вязких напряжений $\Pi = \Pi_{NS} + \Pi_\tau$ таковы

$$\begin{gathered}\mathbf{j} = \rho\mathbf{u} - \mathbf{m}, \quad \mathbf{m} = \tau[\operatorname{div}(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) + \nabla p(\rho)],\\ \hat{\mathbf{m}} = \tau[\rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p(\rho)],\end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered}\Pi_{NS} = \mu(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T) + \left(\lambda - \frac{2}{3}\mu\right)(\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbb{I},\\ \Pi_\tau = \mathbf{u}\otimes\hat{\mathbf{m}} + \tau p'(\rho)\operatorname{div}(\rho\mathbf{u})\mathbb{I},\end{gathered} \tag{3}$$

где Π_{NS} – тензор Навье–Стокса с $\nabla\mathbf{u} = \{\partial_i u_j\}_{i,j=1}^n$, $\mathbb{I}$ – единичный тензор, $\mathbf{m}$, $\hat{\mathbf{m}}$ и Π_τ – регуляризующие импульсы и тензор, $\mu = \mu(\rho, \mathbf{u}) > 0$ и

$\lambda = \lambda(\rho, \mathbf{u}) \geq 0$ – коэффициенты вязкости, $\tau = \tau(\rho, \mathbf{u}) > 0$ – параметр релаксации.

Напомним линеаризацию системы (1)–(3) на постоянном решении $\rho(x,t) \equiv \rho_* > 0$, $\mathbf{u}(x,t) \equiv \mathbf{u}_* = (u_{*1}, \dots, u_{*n})$ [3]. Пусть $c_* = \sqrt{p'(\rho_*)}$ – фоновая скорость звука, а $\tau_* = \tau(\rho_*, \mathbf{u}_*)$, $\mu_* = \mu(\rho_*, \mathbf{u}_*)$, $\lambda_* = \lambda(\rho_*, \mathbf{u}_*)$, и последние задаются формулами $\mu_* = \alpha_s \tau_* \rho_* c_*^2$, $\lambda_* = \alpha_{1s} \tau_* \rho_* c_*^2$ с $\alpha_s \geq 0$, $\alpha_{1s} \geq 0$ (случай $\alpha_s = \alpha_{1s} = 0$ возможен). Положим $a_1 = \frac{1}{3}\alpha_s + \alpha_{1s} + 1$. Подстановка в уравнения (1)–(3) решения в виде $\rho = \rho_* + \rho_* \tilde{\rho}$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_* + c_* \tilde{\mathbf{u}}$, где $\tilde{\rho}$, $\tilde{\mathbf{u}}$ – безразмерные малые возмущения, и отбрасывание членов 2-го порядка малости по отношению к ним приводит к линеаризованной КГД-системе уравнений для $\mathbf{z} = (\tilde{\rho}\, \tilde{\mathbf{u}})^{\mathrm{T}}$:

$$\partial_t \mathbf{z} + c_* B^{(i)} \partial_i \mathbf{z} - \tau_* c_*^2 A^{(ij)} \partial_i \partial_j \mathbf{z} = 0 \tag{4}$$

в $\mathbb{R}^n$ при $t \geq 0$, где $B^{(i)}$ и $A^{(ij)}$ – матрицы порядка $n+1$. Здесь и ниже по повторяющимся индексам i, j (и только по ним) предполагается суммирование от 1 до n. Пусть векторы-столбцы $\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_n$ образуют стандартный координатный базис в $\mathbb{R}^{n+1}$, тогда

$$\begin{gathered} B^{(i)} = M_i I_{n+1} + \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_i^T + \mathbf{e}_i \mathbf{e}_0^T, \\ A^{(kk)} = M_k^2 I_{n+1} + \operatorname{diag}\{1, \alpha_s, \dots, \alpha_s\} + \\ + 2M_k(\mathbf{e}_0 \mathbf{e}_k^T + \mathbf{e}_k \mathbf{e}_0^T) + a_1 \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T, \\ A^{(kl)} = M_k M_l I_{n+1} + M_k(\mathbf{e}_0 \mathbf{e}_l^T + \mathbf{e}_l \mathbf{e}_0^T) + \\ + M_l(\mathbf{e}_0 \mathbf{e}_k^T + \mathbf{e}_k \mathbf{e}_0^T) + \frac{a_1}{2}(\mathbf{e}_k \mathbf{e}_l^T + \mathbf{e}_l \mathbf{e}_k^T) \end{gathered}$$

при всех k, l, $k \neq l$. Здесь и ниже $M_k = \dfrac{u_{*k}}{c_*}$, I_k – единичная матрица порядка k, а $\operatorname{diag}\{p_1, \dots, p_k\}$ – диагональная матрица с указанными диагональными элементами. Ясно, что $B^{(i)}$ и $A^{(ij)}$ – симметричные матрицы, и $A^{(kl)} = A^{(lk)}$. Отметим, что

$$\begin{gathered} A^{(kk)} = (B^{(k)})^2 + \operatorname{diag}\{0, \alpha_s, \dots, \alpha_s\} + (a_1 - 1)\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T, \\ 1 \leq k \leq n. \end{gathered} \tag{5}$$

Для решения системы типа (4) с начальным условием $\mathbf{z}|_{t=0} = \mathbf{z}_0$ верна оценка [3]

$$\sup_{t \geq 0} \|\mathbf{z}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|\mathbf{z}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad \forall\, \mathbf{z}_0 \in L^2(\mathbb{R}^n). \tag{6}$$

Введем сетку ω_{kh} по x_k с узлами lh_k, $l \in \mathbb{Z}$ и шагом $h_k > 0$, $1 \leq k \leq n$. Пусть $\overline{\omega}^{\Delta t}$ – сетка по t с узлами $t_m = m\Delta t$, $m \geq 0$ и шагом $\Delta t > 0$. Определим разностные операторы

$$\mathring{\delta}_k v_l = \frac{v_{l+1} - v_{l-1}}{2h_k}, \quad (\delta_k^* \delta_k v)_l = \frac{v_{l+1} - 2v_l + v_{l-1}}{h_k^2},$$
$$\delta_t v = \frac{\overset{+}{v} - v}{\Delta t}, \quad v^{+,m} = v^{m+1}.$$

Введем прямоугольную сетку $\omega_{\mathbf{h}} := \omega_{1h} \times \dots \times \omega_{nh}$ в $\mathbb{R}^n$ с $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$ и положим $h_{\min} := \min_{1 \leq k \leq n} h_k$, $h_V = (h_1 \dots h_n)^{1/n}$, $h_{\max} := \max_{1 \leq k \leq n} h_k$.

Аппроксимируем систему уравнений (4) с помощью введенных разностных операторов и получим явную по t разностную схему, трехточечную по каждому направлению $x_1, \dots, x_n$

$$\delta_t \mathbf{y} + c_* B^{(i)} \mathring{\delta}_i \mathbf{y} - \tau_* c_*^2 A^{(ij)} (\partial_i \partial_j)_h \mathbf{y} = 0 \tag{7}$$

на $\omega_{\mathbf{h}} \times \omega^{\Delta t}$, где $(\partial_k \partial_k)_h := \delta_k^* \delta_k$ и $(\partial_k \partial_l)_h := \mathring{\delta}_k \mathring{\delta}_l$ при $k \neq l$. Такая разностная схема возникает и при линеаризации схем для исходных уравнений (1)–(3), см. в том числе [14].

Пусть H – гильбертово пространство вектор-функций $\mathbf{v}\colon \omega_{\mathbf{h}} \to \mathbb{C}^{n+1}$, суммируемых в квадрате на $\omega_{\mathbf{h}}$, со скалярным произведением

$$(\mathbf{v}, \mathbf{y})_H = h_1 \dots h_n \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} (\mathbf{v}_{\mathbf{k}}, \mathbf{y}_{\mathbf{k}})_{\mathbb{C}^{n+1}},$$
$$\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n).$$

Поставим вопрос об условиях справедливости сеточного аналога оценки (6) – оценки

$$\sup_{m \geq 0} \|\mathbf{y}^m\|_H \leq \|\mathbf{y}^0\|_H \quad \forall \mathbf{y}^0 \in H. \tag{8}$$

Она эквивалентна свойствам $\|\mathscr{A}\|_{H \to H} \leq 1$ оператора $\mathscr{A} = I - \Delta t[c_* B^{(i)} \mathring{\delta}_i - \tau_* c_*^2 A^{(ij)} (\partial_i \partial_j)_h]$ и H-диссипативности схемы $\|\mathbf{y}^m\|_H \leq \|\mathbf{y}^{m-1}\|_H \leq \ldots \leq \|\mathbf{y}^0\|_H$ для всех $\mathbf{y}^0 \in H$, $m \geq 1$.

Пусть Δt и τ_* задаются формулами

$$\begin{gathered} \Delta t \equiv \frac{\beta h_{\min}}{(M+1)c_*} = \frac{\tilde{\beta} h_{\min}}{c_*}, \\ \tau_* \equiv \frac{\alpha h_\tau}{c_*} = \frac{\hat{\alpha} h_\tau}{(M+1)c_*} = \frac{\alpha_{h_\tau} h_{\min}}{c_*} = \frac{\hat{\alpha}_{h_\tau} h_{\min}}{(M+1)c_*} \end{gathered} \tag{9}$$

с параметрами $\beta > 0$ (числом Куранта) и $\alpha > 0$, где $h_\tau = h_\tau(\mathbf{h}) > 0$ (в том числе $h_\tau = h_{\min}$, h_V или $h_{\max}$), а величины $\tilde{\beta}$, $\hat{\alpha}$, α_{h_τ}, $\hat{\alpha}_{h_\tau}$ введены для удобства (при этом $\alpha_{h_\tau} = \alpha$, $\hat{\alpha}_{h_\tau} = \hat{\alpha}$ для $h_\tau = h_{\min}$). Кроме того, $M = \dfrac{|\mathbf{u}_*|}{c_*}$ – фоновое число Маха. Ниже выводятся условия на $\tilde{\beta}$ в зависимости от α_{h_τ} или β – от $\hat{\alpha}_{h_\tau}$, связанные с выполнением оценки (8).

Следуя [9], рассмотрим частные решения схемы (7) вида $\mathbf{y}_{\mathbf{k}}^m(\xi) = e^{\mathrm{i}\mathbf{k}\xi}\mathbf{w}^m(\xi)$, где $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n$, $m \geq 0$, i – мнимая единица и $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^T \in [0, 2\pi]^n$ – параметр. Их подстановка в (7) с учетом формул (9) дает явную рекуррентную формулу $\mathbf{w}^+ = G_{\mathbf{s}}\mathbf{w}$ на $\overline{\omega}^{\Delta t}$, с матрицами

$$G_{\mathbf{s}} = I_{n+1} - \tilde{\beta}F_{\mathbf{s}}, \quad F_{\mathbf{s}} = 4\alpha_{h_\tau}A_{\mathbf{s}} + 2\mathrm{i}B_{\mathbf{s}}, \quad B_{\mathbf{s}} = d_i s_i B^{(i)},$$
$$A_{\mathbf{s}} = d_i^2 A^{(ii)} + (1 - \delta^{(ij)})d_i d_j s_i s_j A^{(ij)},$$

где $G_{\mathbf{s}}$ – символ оператора $\mathcal{A}$, $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ и

$$\sigma_k = \sin^2\frac{\xi_k}{2} \in [0,1], \quad d_k = r_k\sqrt{\sigma_k},$$
$$r_k = \frac{h_{\min}}{h_k} \leq 1, \quad s_k = (-1)^{l_k}\sqrt{1 - \sigma_k}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

а $l_k = 0$ при $0 \leq \xi_k \leq \pi$ либо $l_k = 1$ при $\pi < \xi_k \leq 2\pi$. Кроме того, $\delta^{(ij)}$ – символ Кронекера.

Введем вектор $\mathbf{M} = (M_1, \ldots, M_n)^T$, тогда $M = |\mathbf{M}|$ – число Маха, а также вектор-строку $\zeta = (d_1 s_1, \ldots, d_n s_n)$ и положим $d = (d_1^2 + \ldots + d_n^2)^{1/2}$.

Л е м м а 1. 1. *Матрицы $B_{\mathbf{s}}$ и $A_{\mathbf{s}}$ можно записать в блочном виде*

$$B_{\mathbf{s}} = \begin{pmatrix} \zeta\mathbf{M} & \zeta \\ \zeta^T & (\zeta\mathbf{M})I_n \end{pmatrix},$$
$$A_{\mathbf{s}} = \begin{pmatrix} a_{\mathbf{M}} + d^2 & 2[(\zeta\mathbf{M})\zeta + \mathbf{M}^T Q] \\ 2[(\zeta\mathbf{M})\zeta^T + Q\mathbf{M}] & (a_{\mathbf{M}} + \alpha_s d^2)I_n + a_1(\zeta^T\zeta + Q) \end{pmatrix}$$

с $a_{\mathbf{M}} := (\zeta\mathbf{M})^2 + \mathbf{M}^T Q\mathbf{M}$ и матрицей $Q = \operatorname{diag}\{q_1, \ldots, q_n\}$ с $q_k = d_k^2\sigma_k$, $1 \leq k \leq n$.

2. *Справедливо матричное неравенство $B_{\mathbf{s}}^2 \leq A_{\mathbf{s}}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. В силу формул для матриц $B^{(i)}$ и $A^{(ij)}$ можно записать

$$B_{\mathbf{s}} = \zeta_i B^{(i)} = \zeta_i M_i I_{n+1} +$$
$$+ \zeta_i(\mathbf{e}_0\mathbf{e}_i^T + \mathbf{e}_i\mathbf{e}_0^T) = (\zeta\mathbf{M})I_{n+1} + \begin{pmatrix} 0 & \zeta \\ \zeta^T & 0 \end{pmatrix},$$
$$A_{\mathbf{s}} = (\zeta_i^2 + q_i)A^{(ii)} + (1 - \delta^{(ij)})\zeta_i\zeta_j A^{(ij)} =$$
$$= q_i A^{(ii)} + |\zeta|^2 \operatorname{diag}\{1, \alpha_s, \ldots, \alpha_s\} +$$
$$+ \zeta_i\zeta_j\Big[M_i M_j I_{n+1} + M_i(\mathbf{e}_0\mathbf{e}_j^T + \mathbf{e}_j\mathbf{e}_0^T) +$$
$$+ M_j(\mathbf{e}_0\mathbf{e}_i^T + \mathbf{e}_i\mathbf{e}_0^T) + \frac{a_1}{2}(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^T + \mathbf{e}_j\mathbf{e}_i^T)\Big] =$$
$$= q_i A^{(ii)} + |\zeta|^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha_s I_n \end{pmatrix} + (\zeta\mathbf{M})^2 I_{n+1} +$$
$$+ 2\zeta\mathbf{M}\begin{pmatrix} 0 & \zeta \\ \zeta^T & 0 \end{pmatrix} + a_1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \zeta^T\zeta \end{pmatrix}.$$

Указанный вид матриц $B_{\mathbf{s}}$ и $A_{\mathbf{s}}$ следует из этих формул, а также $|\zeta|^2 + \delta^{(ii)}q_i = d^2$ и

$$q_i A^{(ii)} = q_i M_i^2 I_{n+1} + \delta^{(ii)}q_i \operatorname{diag}\{1, \alpha_s, \ldots, \alpha_s\} +$$
$$+ 2q_i M_i(\mathbf{e}_0\mathbf{e}_i^T + \mathbf{e}_i\mathbf{e}_0^T) + a_1 q_i\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^T =$$
$$= \mathbf{M}^T Q\mathbf{M}I_{n+1} + \delta^{(ii)}q_i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha_s I_n \end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix} 0 & 2\mathbf{M}^T Q \\ 2Q\mathbf{M} & 0 \end{pmatrix} + a_1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}.$$

2. Непосредственно проверяется формула

$$A_{\mathbf{s}} - B_{\mathbf{s}}^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{M}^T Q\mathbf{M} + \operatorname{tr} Q & 2\mathbf{M}^T Q \\ 2Q\mathbf{M} & (\mathbf{M}^T Q\mathbf{M} + \alpha_s d^2)I_n + (a_1 - 1)\zeta^T\zeta + a_1 Q \end{pmatrix},$$

где $\operatorname{tr} Q = \delta^{(ii)}q_i$ – след матрицы Q. Из нее следуют матричные неравенства

$$A_{\mathbf{s}} - B_{\mathbf{s}}^2 \geq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha_s d^2 I_n + (a_1 - 1)(\zeta^T\zeta + Q) \end{pmatrix} \geq 0.$$

Правое неравенство очевидно (так как $a_1 \geq 1$ и $Q \geq 0$), а левое эквивалентно неравенству

$$(\mathbf{M}^T Q\mathbf{M} + \operatorname{tr} Q)v_0^2 + 4v_0\mathbf{M}^T Q\mathbf{v} + \mathbf{M}^T Q\mathbf{M}|\mathbf{v}|^2 +$$
$$+ \mathbf{v}^T Q\mathbf{v} \geq 0 \quad \forall\, v_0 \in R, \quad \mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

В силу свойств $Q \geq 0$ и диагональности Q последнее следует из неравенств

$$2v_0\mathbf{M}^T Q\mathbf{v} \leq \mathbf{M}^T Q\mathbf{M}v_0^2 + \mathbf{v}^T Q\mathbf{v},$$
$$2v_0\mathbf{M}^T Q\mathbf{v} \leq 2|v_0|(\operatorname{tr} Q)^{1/2}(q_1 M_1^2 v_1^2 + \ldots + q_n M_n^2 v_n^2)^{1/2} \leq$$
$$\leq (\operatorname{tr} Q)v_0^2 + \mathbf{M}^T Q\mathbf{M}|\mathbf{v}|^2.$$

Обозначим через $\lambda_{\max}(A)$ максимальное собственное значение эрмитовой матрицы A.

Т е о р е м а 1. *Свойство $\|\mathcal{A}\|_{H\to H} \leq 1$ эквивалентно спектральному свойству*

$$\max_{\mathbf{s}\in S}\lambda_{\max}(G_{\mathbf{s}}^* G_{\mathbf{s}}) \leq 1 \quad \text{с} \quad S := [-1, 1]^n. \tag{10}$$

Теорема обобщается на любой линейный сеточный оператор с конечным шаблоном $\mathcal{A}: H \to H$.

Пусть $[A, B] = AB - BA$ — коммутатор матриц A и B (порядка k). Для эрмитовых матриц A и B матрица $\mathrm{i}[A, B]$ также эрмитова и справедливы простые оценки

$$-(\varepsilon A^2 + \varepsilon^{-1}B^2) \le \mathrm{i}[A, B] \le \varepsilon A^2 + \varepsilon^{-1}B^2 \quad \forall\, \varepsilon > 0. \quad (11)$$

В самом деле, для любого $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^k$ имеем

$$\left|\mathrm{i}([A, B]\mathbf{w}, \mathbf{w})_{\mathbb{C}^k}\right| \le 2\left|A\mathbf{w}\right|_{\mathbb{C}^k} \left|B\mathbf{w}\right|_{\mathbb{C}^k} \le \varepsilon\left|A\mathbf{w}\right|^2_{\mathbb{C}^k} + \\ + \varepsilon^{-1}\left|B\mathbf{w}\right|^2_{\mathbb{C}^k} = \varepsilon(A^2\mathbf{w}, \mathbf{w})_{\mathbb{C}^k} + \varepsilon^{-1}(B^2\mathbf{w}, \mathbf{w})_{\mathbb{C}^k}.$$

Дадим необходимые условия и достаточные условия справедливости оценки (8).

Т е о р е м а 2. *Выполнение матричных неравенств*:

$$\tilde{\beta}\left(2\alpha_{h_\tau}A_{\mathbf{s}}^2 + \frac{1}{2\alpha_{h_\tau}}B_{\mathbf{s}}^2 + \mathrm{i}\left[A_{\mathbf{s}}, B_{\mathbf{s}}\right]\right) \le A_{\mathbf{s}} \quad \forall\, \mathbf{s} \in S, \quad (12)$$

$$2\alpha_{h_\tau}r_k^2\tilde{\beta}A^{(kk)} \le I, \\ \frac{\tilde{\beta}}{2\alpha_{h_\tau}}(B^{(k)})^2 \le A^{(kk)}, \quad 1 \le k \le n, \quad (13)$$

$$\tilde{\beta}\left[2\alpha_{h_\tau}(1 + \varepsilon)A_{\mathbf{s}}^2 + \frac{1}{2\alpha_{h_\tau}}(1 + \varepsilon^{-1})B_{\mathbf{s}}^2\right] \le A_{\mathbf{s}} \\ \forall\, \mathbf{s} \in S \quad (14)$$

с каким-либо $\varepsilon > 0$ *соответственно необходимо и достаточно, необходимо, достаточно для справедливости оценки* (8). *Как следствие, при* $\max_{\mathbf{s}\in S}\lambda_{\max}(A_{\mathbf{s}}) \le \bar{\lambda}$ *для справедливости оценки* (8) *достаточно выполнение неравенства*

$$\tilde{\beta} \le [(2\alpha_{h_\tau}\bar{\lambda})^{1/2} + (2\alpha_{h_\tau})^{-1/2}]^{-2}. \quad (15)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подобно [11], условие (10) эквивалентно матричному неравенству $G_{\mathbf{s}}^*G_{\mathbf{s}} \le I_{n+1}$, т.е. $\tilde{\beta}F_{\mathbf{s}}^*F_{\mathbf{s}} \le 2(F_{\mathbf{s}} + F_{\mathbf{s}}^*)$, для всех $\mathbf{s} \in S$. Подставив сюда выражение для $F_{\mathbf{s}}$ и сократив обе части на $8\alpha_{h_\tau}$, получим неравенство (12).

Фиксируем $1 \le k \le n$, возьмем $\sigma_l = 0$ при $k \ne l$ и после сокращения на d_k^2 (при $\sigma_k \ne 0$) получим относящееся только к направлению x_k неравенство

$$\tilde{\beta}\Big\{2\alpha_{h_\tau}\sigma_k r_k^2(A^{(kk)})^2 + \frac{1}{2\alpha_{h_\tau}}(1 - \sigma_k)(B^{(k)})^2 + \\ + \mathrm{i}(-1)^{l_k}\sqrt{\sigma_k(1 - \sigma_k)}r_k\,[A^{(kk)}, B^{(k)}]\Big\} \le A^{(kk)}$$

при всех $\sigma_k \in (0, 1]$. Из него при $\sigma_k = 1$ и $\sigma_k \to +0$ вытекают неравенства (13).

В силу оценки (11) неравенство (12) следует из (14), а так как $B_{\mathbf{s}}^2 \le A_{\mathbf{s}}$, то и из неравенства

$$\tilde{\beta}\left[2\alpha_{h_\tau}(1 + \varepsilon)A_{\mathbf{s}}^2 + \frac{1}{2\alpha_{h_\tau}}(1 + \varepsilon^{-1})A_{\mathbf{s}}\right] \le A_{\mathbf{s}} \quad \forall \mathbf{s} \in S.$$

Оно эквивалентно неравенству для собственных значений $\lambda_k(A_{\mathbf{s}})$ матрицы $A_{\mathbf{s}}$:

$$\tilde{\beta}\left[2\alpha_{h_\tau}(1 + \varepsilon)\lambda_k^2(A_{\mathbf{s}}) + \frac{1}{2\alpha_{h_\tau}}(1 + \varepsilon^{-1})\lambda_k(A_{\mathbf{s}})\right] \le \lambda_k(A_{\mathbf{s}}) \\ \forall \mathbf{s} \in S.$$

Поскольку $\lambda_k(A_{\mathbf{s}}) \ge 0$, то последнее неравенство следует из

$$\tilde{\beta}\left[2\alpha_{h_\tau}(1 + \varepsilon)\max_{\mathbf{s}\in S}\lambda_{\max}(A_{\mathbf{s}}) + \frac{1}{2\alpha_{h_\tau}}(1 + \varepsilon^{-1})\right] \le 1.$$

При $\max_{\mathbf{s}\in S}\lambda_{\max}(A_{\mathbf{s}}) \le \bar{\lambda}$, выбрав $\varepsilon = \frac{1}{2\alpha_{h_\tau}}\bar{\lambda}^{-1/2}$, выведем достаточное условие (15).

Отметим, что при выводе условий (13) вид матриц $A^{(ij)}$ с $i \ne j$ роли не играл.

Нетрудно найти собственные значения матрицы $A^{(kk)}$ и в том числе

$$\lambda_{k\max} := \lambda_{\max}(A^{(kk)}) = M_k^2 + \frac{1}{2}(a_1 + \alpha_s + 1) + \\ + \left[4M_k^2 + \left(\frac{1}{2}(a_1 + \alpha_s - 1)\right)^2\right]^{1/2}, \quad 1 \le k \le n.$$

В частности, $\lambda_{k\max} = a_1 + \alpha_s$ при $M_k = 0$. Поскольку $a_1 \ge 1$, то

$$\max\left\{(\left|M_k\right| + 1)^2 + \frac{1}{2}(a_1 + \alpha_s + 1), M_k^2 + a_1 + \alpha_s\right\} \le \\ \le \lambda_{k\max} \le (\left|M_k\right| + 1)^2 + a_1 + \alpha_s - 1.$$

Т е о р е м а 3. *Выполнение условия*

$$\beta \le \beta_{\text{nec}}(\hat{\alpha}_{h_\tau}) := \\ := \min\left\{2\hat{\alpha}_{h_\tau}, \frac{1}{2\hat{\alpha}_{h_\tau}}\min_{1\le k\le n}\frac{h_k^2}{h_{\min}^2}\frac{(M + 1)^2}{\lambda_{k\max}}\right\} = \beta_{\text{nec}}(\hat{\alpha}r_{h_\tau h_\tau}) \quad (16)$$

необходимо для справедливости оценки (8). *Здесь* $r_{h_\tau} = \dfrac{h_\tau}{h_{\min}}$.

Если $h_1 = \ldots = h_n = h_\tau = h$, *то* $\beta_{\text{nec}}(\hat{\alpha})$ *не зависит от h и принимает вид*

$$\beta_{\text{nec}}(\hat{\alpha}) = \min\left\{2\hat{\alpha}, \frac{(M + 1)^2}{2\hat{\alpha}\lambda_{\max}}\right\} \\ c \quad \lambda_{\max} := \max_{1\le k\le n}\lambda_{k\max}. \quad (17)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое из неравенств (13) эквивалентно числовому неравенству

$$\tilde{\beta} \le \frac{h_k^2}{h_{\min}^2}\frac{1}{2\alpha_{h_\tau}\lambda_{\max}(A^{(kk)})},$$

так как $A^{(kk)} \ge 0$. Поскольку $(B^{(k)})^2 \le A^{(kk)}$ согласно (5), то второе из неравенств (13) выполнено при $\tilde{\beta} \le 2\alpha_{h_\tau}$. С другой стороны, $(B^{(k)})^2_{11} = A^{(kk)}_{11} > 0$, поэтому второе из неравенств (13) влечет неравенство $\tilde{\beta} \le 2\alpha_{h_\tau}$ и в итоге ему эквивалентно (подобно [11]). Отсюда после перехода от $\tilde{\beta}$ и α_{h_τ} к β и $\hat{\alpha}_{h_\tau}$ следует условие (16).

Максимум $\beta_{\text{nec}}(\hat{\alpha} r_{h_\tau})$ по $\hat{\alpha} > 0$ достигается в одной точке $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}_*(h_\tau)$ и

$$\hat{\alpha}_*(h_\tau) = \min_{1\le k\le n} \frac{h_k}{h_\tau} \frac{M+1}{2\lambda_{k\,\max}^{1/2}},$$
$$\beta_{\text{nec}}(\hat{\alpha}_*(h_\tau) r_{h_\tau}) = \tag{18}$$
$$= \min_{1\le k\le n} \frac{h_k}{h_{\min}} \frac{M+1}{\lambda_{k\,\max}^{1/2}} \ge 2\hat{\alpha}_{*1} := \frac{M+1}{\lambda_{\max}^{1/2}};$$

отметим, что $\beta_{\text{nec}}(\hat{\alpha}_*(h_\tau) r_{h_\tau})$ не зависит от выбора h_τ. При $h_1 = \ldots = h_n = h_\tau = h$ имеем $\hat{\alpha}_*(h_\tau) = \hat{\alpha}_{*1}$, а неравенство в (18) переходит в равенство, т.е. переход от квадратной сетки к любой прямоугольной отнюдь не приводит к уменьшению значения $\beta_{\text{nec}}(\hat{\alpha}_*(h_\tau) r_{h_\tau})$.

Однако значение $\hat{\alpha}_*(h_\tau)$, играющее важную роль на практике, существенно зависит от выбора h_τ. Отметим, что, во-первых, $\hat{\alpha}_*(h_{\min}) \ge \hat{\alpha}_{*1}$ при любых $\mathbf{h}$. Во-вторых, в случае, когда $|M_k|$ не зависит от k, величина $\lambda_{k\,\max}$ тоже не зависит от k и тогда имеем

$$\hat{\alpha}_*(h_{\min}) = \hat{\alpha}_{*1} \ge \hat{\alpha}_*(h_V) = \frac{h_{\min}}{h_V} \hat{\alpha}_{*1}, \tag{19}$$

$$\frac{h_{\min}}{h_V} = \left(\frac{h_{\min}}{h_{\max}}\right)^{1/2} \quad (\text{для } n = 2),$$
$$\frac{h_{\min}}{h_V} = \frac{h_{\min}^{2/3}}{(h_l h_{\max})^{1/3}} \quad (\text{для } n = 3), \tag{20}$$

где $h_k = h_{\min} \le h_l \le h_m = h_{\max}$ и (k, l, m) – перестановка индексов (1, 2, 3), и при $h_l = h_m$ величина (20) наименьшая для $n = 3$. Здесь $\hat{\alpha}_*(h_{\min})$ не зависит от $\mathbf{h}$, а $\hat{\alpha}_*(h_V)$ – зависит, и $\hat{\alpha}_*(h_V) \ll \hat{\alpha}_*(h_{\min})$ для сетки с $\frac{h_{\min}}{h_{\max}} \ll 1$. Эти свойства $\hat{\alpha}_*(h_V)$ неудобны на практике.

При $h_\tau = h_{\min}$ и $h_\tau = h_V$ верны также оценки снизу соответственно

$$\beta_{\text{nec}}(\hat{\alpha}) \ge \min\left\{2\hat{\alpha}, \frac{(M+1)^2}{2\hat{\alpha}\lambda_{\max}}\right\},$$
$$\beta_{\text{nec}}(\hat{\alpha} r_{h_V}) \ge \min\left\{\frac{h_V}{h_{\min}} 2\hat{\alpha}, \frac{h_{\min}}{h_V} \frac{(M+1)^2}{2\hat{\alpha}\lambda_{\max}}\right\}. \tag{21}$$

Существенно, что для $h_\tau = h_{\min}$ оценка равномерна по $\mathbf{h}$ и ее правая часть та же, что в (17), а для $h_\tau = h_V$ – нет; обе оценки переходят в равенства, когда $|M_k|$ не зависит от k.

Поскольку величина $\frac{h_\tau}{h_{\min}}$ при $h_\tau = h_{\min}$ не больше, чем при $h_\tau = h_V$, а вторая из величин в определении $\beta_{\text{nec}}(\hat{\alpha} r_{h_\tau})$ (с $\min\limits_{1\le k\le n}$) – не меньше, то

$$\beta_{\text{nec}}(\hat{\alpha}) > \beta_{\text{nec}}(\hat{\alpha} r_{h_V}) \quad \text{для} \quad h_k \not\equiv h, \quad 1 \le k \le n \tag{22}$$

при условии

$$2\hat{\alpha} > \min_{1\le k\le n} \frac{h_k^2}{h_{\min} h_V} \frac{(M+1)^2}{2\hat{\alpha}\lambda_{k\,\max}},$$
$$\text{т.е.} \quad \hat{\alpha} > \min_{1\le k\le n} \frac{h_k}{(h_{\min} h_V)^{1/2}} \frac{M+1}{2\lambda_{k\,\max}^{1/2}}. \tag{23}$$

Если $|M_k|$ не зависит от k, то это приводит к соотношениям

$$\hat{\alpha} > \left(\frac{h_{\min}}{h_V}\right)^{1/2} \alpha_{*1},$$
$$\frac{\beta_{\text{nec}}(\hat{\alpha})}{\beta_{\text{nec}}(\hat{\alpha} r_{h_V})} = \frac{h_V}{h_{\min}} \min\left\{\left(\frac{\hat{\alpha}}{\alpha_{*1}}\right)^2, 1\right\}, \tag{24}$$

и при $\frac{h_{\min}}{h_{\max}} \ll 1$, см. (20), свойство (22) выполнено для всех $\hat{\alpha}$, кроме достаточно малых.

Вторая оценка (21) сохраняет силу для любого выбора h_τ в качестве h_V, а соотношения (19), (23), (24) – для любого выбора $h_\tau > h_{\min}$ в качестве h_V, поэтому в них выбор $h_\tau = h_{\min}$ является наилучшим. Для $h_\tau = h_{\max}$ ситуация только ухудшается по сравнению с $h_\tau = h_V$.

На рис. 1 при $n = 2$ даны графики $\beta_{\text{nec}}(\hat{\alpha} r_{h_\tau})$ для $h_\tau = h_{\min}, h_V$ в зависимости от $\hat{\alpha}$ и $\frac{h_2}{h_1}$ для $M_1 = M_2 = 0$ (т.е. для числа Маха $M = 0$) и $M_1 = M_2 = 5$ (поэтому для $M = 5$) в случае $\alpha_s = 1$, $\alpha_{1s} = 0$. Они наглядно иллюстрируют выполненный выше анализ.

Перейдем к достаточному условию (15). Оно выглядит аналогично полученному в [13] другим методом для неравномерной сетки по x в 1D-случае. Его можно переписать в виде

$$\beta \le \beta_{\text{suf}}(\hat{\alpha}_{h_\tau}) := \left(\sqrt{2\hat{\alpha}_{h_\tau}} \frac{\bar{\lambda}^{1/2}}{M+1} + \frac{1}{\sqrt{2\hat{\alpha}_{h_\tau}}}\right)^{-2}. \tag{25}$$

Максимум правой части достигается при $\hat{\alpha}_{h_\tau} = \hat{\alpha}_{h_\tau *} := \frac{M+1}{2} \bar{\lambda}^{-1/2}$ и равен $\frac{\hat{\alpha}_{h_\tau *}}{2}$, ср. с (18). Характерно, что $\beta_{\text{nec}}(\hat{\alpha}_{h_\tau}) \to 0$ и $\beta_{\text{suf}}(\hat{\alpha}_{h_\tau}) \to 0$ при $\hat{\alpha}_{h_\tau} \to +0$ и $\hat{\alpha}_{h_\tau} \to +\infty$.

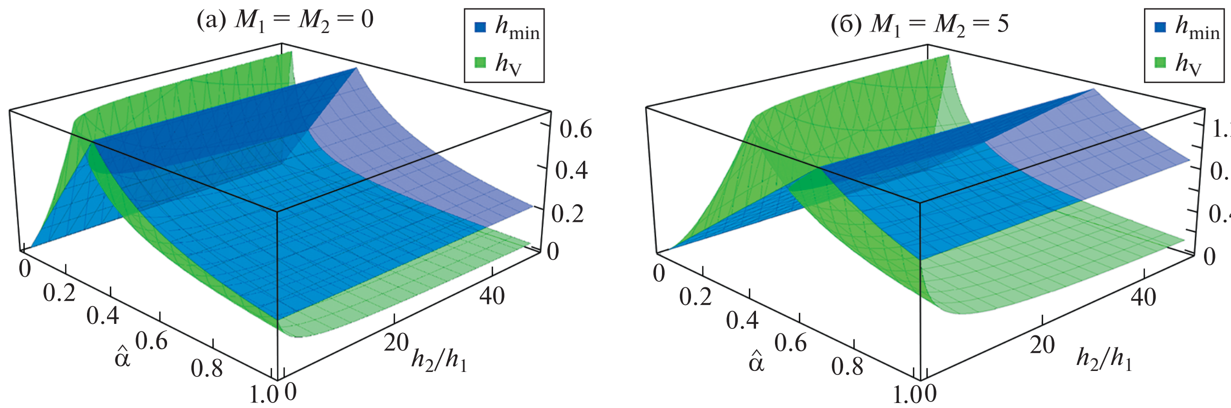

Рис. 1. Графики $\beta_{\text{nec}}(\hat\alpha r_{h_\tau})$ для $h_\tau = h_{\min}, h_V$ в зависимости от $\hat\alpha$ и $\frac{h_2}{h_1}$ для двух значений $M_1 = M_2$ при $n = 2$.

Для применения условия (25) оценим сверху $\lambda_{\max}(A_{\mathbf s})$. Положим $\mathbf r = (r_1, \ldots, r_n)$.

Т е о р е м а 4. *При $n = 2, 3$ верны оценки*

$$\max_{\mathbf s\in S}\lambda_{\max}(A_{\mathbf s}) \le \bar\lambda := \max\{|\mathbf r|^2, \alpha_s|\mathbf r|^2 + c_n a_1\} + c_n r_i^2 M_i^2 + 2(\delta^{(ii)} r_i^4)^{1/2} M \le$$

$$\le \max\{n, \alpha_s n + c_n a_1\} + c_n M^2 + 2\sqrt{n}M \qquad (26)$$

с $c_2 = 1$, $c_3 = \frac{9}{8}$, и при $h_1 = \ldots = h_n$ последнее неравенство переходит в равенство.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем разложение $A_{\mathbf s} = A_{\mathbf s0} + a_{\mathbf M} I_{n+1} + 2A_{\mathbf M1}$, где

$$A_{\mathbf s0} := A_{\mathbf s}\big|_{\mathbf M=0} = \begin{pmatrix} d^2 & 0 \\ 0 & \alpha_s d^2 I_n + a_1(\xi^T\xi + Q)\end{pmatrix},$$

$$A_{\mathbf M1} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf p \\ \mathbf p^{\text{T}} & O_n\end{pmatrix},$$

где $\mathbf p = (p_1, \ldots, p_n)$ с $p_k = d_k^2 M_k + (1 - \delta^{(kj)}) d_k s_k d_j s_j M_j$, $1 \le k \le n$, а O_n – нулевая матрица порядка n.

Поскольку $\sigma_i + s_i^2 = 1$, $0 \le \sigma_i \le 1$ и $\max\limits_{1\le i\le n} r_i = 1$, то имеем

$$\mathbf v^T(\xi^T\xi + Q)\mathbf v = d_i^2 v_i^2 + (1 - \delta^{(ij)}) d_i s_i v_i d_j s_j v_j \le$$

$$\le d_i^2 v_i^2 + (n-1) d_i^2 s_i^2 v_i^2 =$$

$$= r_i^2 (n-1)\sigma_i\left(\frac{n}{n-1} - \sigma_i\right) v_i^2 \le c_n \delta^{(ii)} v_i^2 \qquad (27)$$

для всех $\mathbf v = (v_1, \ldots, v_n)^T \in \mathbb R^n$. Отсюда по формуле Рэлея $\lambda_{\max}(\xi^T\xi + Q) \le c_n$ и

$$\lambda_{\max}(A_{\mathbf s0}) \le \max\{|\mathbf r|^2, \alpha_s|\mathbf r|^2 + c_n a_1\}.$$

Отметим, что $\lambda_{\max}(A_{\mathbf s0}) = \max\{|\mathbf r|^2, \alpha_s|\mathbf r|^2 + a_1\}$ при $\sigma_1 = \ldots = \sigma_n = 1$.

Далее, как и в (27), имеем

$$a_{\mathbf M} = d_i^2 M_i^2 + \{1 - \delta^{(ij)}\} d_i s_i M_i d_j s_j M_j \le$$

$$\le d_i^2 M_i^2 + (n-1) d_i^2 s_i^2 M_i^2 \le c_n r_i^2 M_i^2.$$

Также можно записать

$$\lambda_{\max}^2(A_{\mathbf M1}) = |\mathbf p|^2 = \delta^{(ii)}(d_i^2 M_i + (1 - \delta^{(ij)}) d_i s_i d_j s_j M_j)^2 \le$$

$$\le (\sigma_i^2 r_i^4 + (1 - \delta^{(ij)})\sigma_i s_i^2 r_i^2 \sigma_j s_j^2 r_j^2) M^2 \le$$

$$\le [\sigma_i^2 r_i^4 + (n-1)\sigma_i^2 s_i^4 r_i^4] M^2 =$$

$$= r_i^4 \sigma_i^2 [1 + (n-1)(1 - \sigma_i)^2] M^2 \le \delta^{(ii)} r_i^4 M^2.$$

Поскольку $\lambda_{\max}(A_{\mathbf s}) \le \lambda_{\max}(A_{\mathbf s0}) + a_{\mathbf M} + 2\lambda_{\max}(A_{\mathbf M1})$, то оценка (26) получена.

При $n = 3$ возможна альтернативная (27) оценка. Поскольку $\mathbf v^{\text{T}}\xi^{\text{T}}\xi\mathbf v \le |\xi|^2|\mathbf v|^2$, то

$$\mathbf v^T(\xi^T\xi + Q)\mathbf v \le \left[d_i^2 + (1 - \delta^{(ij)}) d_j^2 s_j^2\right] v_i^2 \le$$

$$\le \left[r_i^2 + (1 - \delta^{(ij)})\frac{1}{4} r_j^2\right] v_i^2 \le \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}|\mathbf r|^2\right)|\mathbf v|^2,$$

так как $d_k^2 s_k^2 = \sigma_k(1 - \sigma_k) r_k^2 \le \frac{1}{4} r_k^2$. Поэтому в $\bar\lambda$ можно заменить c_3 на $\min\left\{c_3, \frac{3}{4} + \frac{1}{4}|\mathbf r|^2\right\}$.

Важно, что $\beta_{\text{nec}}(\hat\alpha_{h_\tau})$ и $\beta_{\text{suf}}(\hat\alpha_{h_\tau})$ равномерно по M отделены от 0 и ограничены сверху.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект 19–11–00169.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Четверушкин Б.Н.* Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: МАКС Пресс, 2004.
2. *Елизарова Т.Г.* Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научный мир, 2007.
3. *Злотник А.А., Четверушкин Б.Н.* // ЖВМиМФ. 2008. Т. 48. № 3. С. 445–472.
4. *Злотник А.А.* // ЖВМиМФ. 2010. Т. 50. № 2. С. 325–337.
5. *Злотник А.А.* // Матем. моделирование. 2012. Т. 24. № 4. С. 65–79.
6. *Булатов О.В., Елизарова Т.Г.* // ЖВМиМФ. 2011. Т. 51. № 1. С. 170–184.
7. *Balashov V., Zlotnik A., Savenkov E.* // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2017. V. 32. № 6. P. 347–358.
8. *Елизарова Т.Г., Злотник А.А., Истомина М.А.* // Астрон. журн. 2018. Т. 95. № 1. С. 11–21.
9. *Годунов С.К., Рябенький В.С.* Разностные схемы. М.: Наука, 1977.
10. *Zlotnik A., Lomonosov T.* In: Differential and difference equations with applications. Springer Proceedings in Math. & Stat. V. 230. Cham: Springer, 2018. P. 635–647.
11. *Злотник А.А., Ломоносов Т.А.* // ДАН. 2018. Т. 482. № 4. С. 375–380.
12. *Злотник А.А., Ломоносов Т.А.* // ЖВМиМФ. 2019. Т. 59. № 3. С. 128–140.
13. *Zlotnik A.* // Appl. Math. Lett. 2019. V. 92. P. 115–120.
14. *Злотник А.А.* // ЖВМиМФ. 2016. Т. 56. № 2. С. 301–317.

ON L^2-DISSIPATIVITY OF A LINEARIZED EXPLICIT FINITE-DIFFERENCE SCHEME WITH QUASI-GAS DYNAMIC REGULARIZATION FOR THE BAROTROPIC GASDYNAMICS SYSTEM OF EQUATIONS

A. A. Zlotnik[a,b] and T. A. Lomonosov[a]

[a] *National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russian Federation*

[b] *Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS B.N. Chetverushkin

We study an explicit two-level symmetric in space finite-difference scheme for the multidimensional barotropic gas dynamics system of equations with quasi-gasdynamic regularization linearized at a constant solution (with arbitrary velocity). A criterion and both necessary and sufficient conditions for the L^2-dissipativity of the solutions to the Cauchy problem for the scheme are derived by the spectral method. In them, the Courant number is uniformly bounded with respect to the Mach number.

Keywords: barotropic gas dynamics equations, quasi-gasdynamic system of equations, explicit two-level finite-difference scheme, stability