

КВАНТОВАНИЕ ПО ШРЁДИНГЕРУ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ С НЕКВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ ГАМИЛЬТОНА

© 2020 г. О. Г. Смолянов^{1,2,*}, Н. Н. Шамаров^{1,2,**}

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 26.09.2019 г.

Поступило 29.12.2019 г.

После доработки 29.12.2019 г.

Принято к публикации 19.03.2020 г.

Согласно одной теореме Андре Вейля (Andre Weil), на бесконечномерном локально выпуклом пространстве не существует аналога стандартной меры Лебега. Поэтому для определения квантования по Шрёдингеру бесконечномерной гамильтоновой системы используются σ -аддитивные меры, не являющиеся инвариантными относительно сдвигов. В сообщении обсуждается существенно иной подход, при котором используется обобщенная мера Лебега, являющаяся трансляционно инвариантной. В неявной форме такая мера использовалась в самой первой статье Фейнмана, опубликованной в 1948 г. При этом псевдодифференциальные операторы, символами которых являются классические функции Гамильтона, формально определяются как в конечномерном случае; в частности, при этом используется преобразование Фурье, которое отображает функции (на бесконечномерном пространстве) снова в функции. По-видимому, такое определение бесконечномерного преобразования Фурье в литературе не встречалось.

Ключевые слова: квантование, квантование по Шрёдингеру, обобщенная мера Лебега, бесконечномерные гамильтоновы системы, алгебра Гейзенберга, бесконечномерные псевдодифференциальные операторы

DOI: 10.31857/S2686954320030200

1. БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ

Понятия и факты из книг [1] и [2] далее используются без объяснений. При этом отображение локально выпуклого пространства (ЛВП) в ЛВП называется дифференцируемым, если оно дифференцируемо по Гато.

Симплектическое ЛВП — это набор (E, I) , где E — это вещественное ЛВП, $I: E' \rightarrow E$ — инъективное линейное непрерывное отображение наделенного топологией Макки сопряженного к E пространства E' в E такое, что $I^* = -I$. При этом предполагается, что E'' отождествлено с E .

Гамильтонова система — это набор (E, I, H) , где (E, I) — это симплектическое ЛВП и H —

определенная на плотном векторном подпространстве E_0 пространства E , дифференцируемая вдоль E_0 (см. [3]) функция, называемая функцией Гамильтона. Уравнением Гамильтона для такой системы называется уравнение $z'(t) = I(H'(z(t)))$ относительно функции z , определенной на отрезке вещественной прямой и принимающей значения в E . Классическое уравнение Шрёдингера является уравнением Гамильтона некоторой гамильтоновой системы; роль фазового пространства здесь играет овеществление гильбертова пространства чистых состояний квантовой системы.

Далее предполагается, что $E_0 = E$ и что E — это ортогональная сумма изоморфных гильбертовых пространств Q и P , отождествляемая с произведением $Q \times P$. При этом Q и P называются соответственно конфигурационным пространством и пространством импульсов, и предполагается, что P отождествлено с сопряженным к Q пространством; отображение I определяется равенством $I(p, q) = (q, -p)$.

Пример 1. Если E реализовано как комплексное пространство функций или последовательностей, то роль Q может играть вещественное

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

² Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия

*E-mail: smolyanov@yandex.ru

**E-mail: nshamarov@yandex.ru

подпространство всех функций (или, соответственно, последовательностей) из E , которые принимают вещественные значения, а роль P — вещественное подпространство всех функций с нулевой вещественной частью. В случае пространства состояний электромагнитного поля в качестве Q можно выбрать пространство определенных на $\mathbb{R}^3$ функций, значениями которых являются напряженности электрического поля, а в качестве P — пространство определенных на $\mathbb{R}^3$ функций, значениями которых являются напряженности магнитного поля.

Определение 1. Для каждого вещественного $\hbar > 0$ скобкой Пуассона с параметром $\hbar$ упорядоченной пары дифференцируемых числовых функций f и g на E называется функция на E , обозначаемая символом $\{f, g\}_{I, \hbar}$ и задаваемая равенством $\{f, g\}_{I, \hbar}(z) = \hbar(f'(z), I(g'(z)))_{E', E}$, где для всех пар $(\ell, z) \in E' \times E$ $(\ell, z)_{E', E} = \ell(z)$. Алгеброй Пуассона с параметром $\hbar$ на симплектическом пространстве (E, I) называется векторное пространство $\mathcal{P}$ всех комплекснозначных непрерывных цилиндрических полиномов f на E , наделенное билинейной операцией умножения $\{, \}_{I, \hbar}$.

Эту алгебру будем называть также алгеброй классических наблюдаемых и обозначать символом $(\mathcal{P}, \{, \}_{I, \hbar})$, а пространство $\mathcal{P}$ будем иногда обозначать символами P , $\mathcal{P}(E)$ и $\mathcal{P}(E, I)$. Алгеброй Гейзенберга называется подалгебра алгебры Пуассона, порождаемая всеми линейными функционалами из этой алгебры.

Определение 2. Квантованием по Шрёдингеру с параметром $\hbar$ симплектического пространства (E, I) называется комплексно линейное отображение $f \mapsto \hat{f}$ пространства $\mathcal{P}(E, I)$ в пространство нормальных линейных операторов в подходящем гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, состоящем из определенных на Q комплекснозначных функций, обладающее следующими свойствами (ср. [8]):

1) вещественные полиномы переходят в самосопряженные операторы;

2) некоторое пространство $\mathcal{S}(Q)$ всюду бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций на Q , инвариантное относительно умножения на цилиндрические непрерывные полиномы и относительно изометрических в Q замен переменных, является плотным в пространстве $\mathcal{H}$;

3) сужение скалярного произведения пространства $\mathcal{H}$ на $\mathcal{S}(Q) \times \mathcal{S}(Q)$ является инвариантным относительно изометрических в Q замен переменных;

4) если $f \in \mathcal{P}$, причем $f(q, p) = g(q)$ и g — комплекснозначный полином на Q , то

$$(\hat{f}\psi)(q) = g(q)\psi(q) \quad \text{для всех } q \in Q;$$

$$5) \text{ если } f(q, p) = \prod_{j=1}^n p(q_j) \text{ для всех } (q, p) \in Q \times P,$$

где $n \in \mathbb{N}$ и $q_j \in Q$, то

$$(\hat{f}\psi)(q) = (\hbar/i)^n D^n \psi(q)(q_1, \dots, q_n)$$

для всех $\psi \in \mathcal{S}(Q)$, где $D^n \psi(q)$ — производная n -го порядка функции ψ в точке q .

Отметим, что это квантование не обладает свойствами квантования, определенного Дираком в [7]; тем не менее для всех $(f, g) \in E' \times E'$ справедливо равенство $[\hat{f}, \hat{g}] = i\widehat{\{f, g\}_{I, \hbar}}$, где слева стоит коммутатор операторов $\hat{f}$ и $\hat{g}$ (он определяется как замыкание определенного на пересечении областей определения операторов $\hat{f}\hat{g}$ и $\hat{g}\hat{f}$ обычного коммутатора операторов $\hat{f}$ и $\hat{g}$).

Сообщение посвящено построению квантования по Шрёдингеру.

2. ОБОБЩЕННАЯ МЕРА ЛЕБЕГА

Обобщенной мерой на множестве M называется (непрерывный) линейный функционал на некотором векторном пространстве определенных на M комплекснозначных функций, называемых пробными функциями этой обобщенной меры. Если F — пространство таких пробных функций, $\varphi \in F$ и $\mu : F \rightarrow \mathbb{C}$ — обобщенная мера, то в соответствии с традицией, принятой в теории обобщенных функций, вместо $\mu(\varphi)$ будут использоваться символы $\int_M \varphi(x) \mu(dx)$ и $\int \varphi(x) \mu(dx)$, а также $\int \varphi \mu$.

Обобщенная мера μ называется неотрицательной, если она принимает неотрицательные значения на неотрицательных пробных функциях.

При определении неотрицательной обобщенной меры, которую мы будем называть обобщенной мерой Лебега на Q и обозначать символом λ_Q , роль пространства пробных функций будет играть описываемое ниже нормированное пространство $C_1(Q)$. Пусть функция g на Q определяется равенством $g(q) = e^{-\pi \|q\|^2}$, и для каждого конечномерного подпространства K пространства Q символ $\lambda(K)$ обозначает стандартную меру Лебега на K , P_K — ортогональный проектор на подпространство K , действующий в пространстве Q , $P_{K^\perp} = \text{id}_Q - P_K$, $C_1(K, \mathbb{C})$ — пространство всех непрерывных комплекснозначных функций на K , произведения которых на полиномы являются ограниченными функциями, $C_{1,K}(Q) = \{(\psi \circ P_K)(g \circ P_{K^\perp}) :$

$\psi \in C_1(K, \mathbb{C})$ и $C_1(Q) = \bigcup_{K \subset Q} C_{1,K}(Q)$. Пусть еще λ_Q — это линейный функционал на $C_1(Q)$, определяемый так: если $f = (\psi \circ P_K)(g \circ P_{K^\perp})$, где $\psi \in C_1(K, \mathbb{C})$ (ψ является сужением f на K), то $\int_Q f(q) \lambda_Q(dq) = \int_K \psi(x) \lambda(K)(dx)$ (это определение корректно).

Фактически интегрирование по обобщенной мере Лебега использовалось в работах Фейнмана [13, 14], который в то время не знал о теореме Андре Вейля.

Пусть M_1 и M_2 — множества, J — биективное отображение M_1 на M_2 , и μ_1 — обобщенная мера на M_1 с пространством F_1 пробных функций. Образом меры μ_1 относительно отображения J называется линейный функционал $\mu_1 \circ J^{-1}$ на комплексном линейном пространстве F_2 всех функций вида $\varphi \circ J^{-1}$ ($\varphi \in F_1$), определяемый равенством

$$\int_{M_2} \varphi(J^{-1}(y)) \mu_1 \circ J^{-1}(dy) = \int_{M_1} \varphi(x) \mu_1(dx) (= \mu_1(\varphi)).$$

В частности, λ_P — образ меры λ_Q относительно гильбертова изоморфизма между Q и P ($C_1(P)$ — пространство пробных функций для λ_P).

Мера μ_1 называется инвариантной относительно J , если $M_2 = M_1$, $F_2 = F_1$ и $\mu_1 \circ J^{-1} = \mu_1$. В частности, мера λ_Q инвариантна относительно изометрий в Q — сдвигов и ортогональных операторов.

Всюду далее символ J_h обозначает оператор умножения на число $\sqrt{h}$ ($h > 0$) в пространстве Q , а символ $C_h(Q)$ — пространство пробных функций обобщенной меры $\lambda_Q \circ J_h^{-1}$. Тогда функция g_h , определяемая равенством $g \circ J_h^{-1}$, является элементом $C_h(Q)$, при этом $g_1 = g$ и $g_h(q) = (g_1(q))^{1/h} = e^{-\frac{\pi \|q\|^2}{h}} = e^{-\frac{2\pi \|q\|^2}{h}} = e^{-\frac{\|q\|^2}{2h}}$ ($q \in Q$), где $\hbar = \frac{h}{2\pi}$.

Отметим, что пространства $C_h(Q)$ инвариантны относительно умножения на непрерывные ограниченные цилиндрические комплекснозначные функции и относительно операции комплексного сопряжения.

Комплексно сопряженная функция $\bar{\varphi}$ к функции $\varphi \in C_h(Q)$ также является элементом пространства $C_h(Q)$, и произведение двух элементов пространства $C_h(Q)$ является элементом пространства $C_{\frac{h}{2}}(Q)$. Поэтому равенство $(\varphi_1, \varphi_2)_h = \int_Q \varphi_1(q) \bar{\varphi}_2(q) \lambda_Q \circ J_{h/2}^{-1}(dq)$ определяет (эрмитово) скалярное произведение на пространстве $C_h(Q)$. Пополнение пространства $C_h(Q) \equiv C_{2\pi\hbar}(Q)$ отно-

сительно нормы, порожденной этим скалярным произведением, обозначается символом $\mathcal{H}_h$, так что $\mathcal{H}_h = L_2(\lambda_Q \circ J_{h/2}^{-1})$; это гильбертово пространство будет играть роль пространства $\mathcal{H}$ в конструкции $\hbar$ -квантования симплектического пространства $(Q \times Q', I)$ по Шрёдингеру (с параметром $\hbar$).

Пусть $\mathcal{S}_h(Q)$ — подпространство в $C_h(Q)$, состоящее из всех таких функций $f \in C_h(Q)$, в представлении которых вида $f = (f_K \circ P_K)(g_h \circ P_{K^\perp}) \in C_h(Q)$ с конечномерным подпространством $K \subset Q$ функция $f_K \equiv f|_K$ принадлежит обычному комплексному пространству $S(K; \mathbb{C})$ Шварца на K . Таким образом, подпространство $\mathcal{S}_h(Q)$ в $C_h(Q)$ состоит из всех таких функций, сужение каждой из которых на каждое конечномерное подпространство K в Q принадлежит пространству Шварца $S(K; \mathbb{C})$. Отметим, что если Q сепарабельно, то пространство $\mathcal{H}_h$ также сепарабельно (а его подпространство $\mathcal{S}_h(Q)$ плотно). Скалярное произведение в пространстве $\mathcal{H}_h$ является инвариантным относительно изометрий пространства Q ; это вытекает из инвариантности мер $\lambda_Q \circ J_{h/2}^{-1}$ и поляризационного тождества. Стоит отметить, что элементы пространства $\mathcal{S}_1(Q)$ могут считаться обобщенными плотностями цилиндрических мер, а также — в естественном смысле — плотностями этих цилиндрических мер относительно обобщенной меры λ_Q .

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ В $\mathcal{S}_h(Q)$

Определение 3. Для каждого $c \in \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$ c -преобразованием Фурье называется отображение пространства $\mathcal{S}_h(Q)$ в пространство функций на P , обозначаемое символом $F_{q \rightarrow p}^c$ и определяемое равенством

$$(F_{q \rightarrow p}^c \psi)(p) = \int_Q e^{\frac{i}{c} p(q)} \psi(q) \lambda_Q(\sqrt{h}^{-1} dq).$$

Аналогично определяется отображение $F_{p \rightarrow q}^c$, переводящее элементы из $\mathcal{S}_h(P)$ в функции на Q .

Теорема 1. При каждом $\hbar > 0$ оператор $F_{q \rightarrow p}^{\hbar}$ отображает пространство $\mathcal{S}_h(Q)$ в $\mathcal{S}_h(P)$ биективно, причем $(F_{q \rightarrow p}^{\hbar})^{-1} = F_{p \rightarrow q}^{-\hbar}$; после отождествления пространств Q и P функция g_h переводится этой биекцией в себя, а сама биекция продолжается до унитарного оператора в $\mathcal{H}_h$ (эта теорема не противоречит результатам работ [11], [12], где при других условиях доказывается, что аналогичного отображения не существует).

З а м е ч а н и е 1. Функция g_h играет роль вакуумного вектора для фоковского представления

канонических коммутационных соотношений (гомоморфизма комплексной алгебры Гейзенберга) в пространстве $\mathcal{H}_h$ в смысле книги [6].

Далее $h(=2\pi\hbar) > 0$. С помощью введенного в теореме 1 бесконечномерного преобразования Фурье можно определить псевдодифференциальные операторы, действующие в пространстве функций на бесконечномерном пространстве с помощью таких же формул, что и в конечномерном случае.

Определение 4. Псевдодифференциальным оператором (ПДО) с символом Вейля $f \in \mathcal{P}(E)$ называется отображение $\hat{f}$ пространства $\mathcal{S}_h(Q)$ в пространство функций на Q , определяемое так:

$$\begin{aligned} (\hat{f}\psi)(q) &= F_{p \rightarrow q}^h \left(F_{\tilde{q} \rightarrow p}^{-h} \left(f \left(\frac{\tilde{q} + q}{2}, p \right) \psi(\tilde{q}) \right) \right) = \\ &= \int_P \left(e^{2\pi i p(q)/h} \int_Q e^{-2\pi i p(\tilde{q})/h} \times \right. \\ &\quad \left. \times f \left(\frac{\tilde{q} + q}{2}, p \right) \psi(\tilde{q}) \lambda_Q J_h^{-1}(d\tilde{q}) \right) \lambda_P \circ J_h^{-1}(dp). \end{aligned}$$

Определение 5. Для каждого $\tau \in [0, 1]$ ПДО с τ -символом $f \in \mathcal{P}(E)$ называется отображение $\hat{f}_\tau$ пространства $\mathcal{S}_h(Q)$ в пространство функций на Q , определяемое так:

$$\begin{aligned} (\hat{f}_\tau \psi)(q) &= F_{p \rightarrow q}^h (F_{\tilde{q} \rightarrow p}^{-h} (f(\tau\tilde{q} + (1-\tau)q, p) \psi(\tilde{q}))) = \\ &= \int_P \left(e^{2\pi i p(q)/h} \int_Q e^{-2\pi i p(\tilde{q})/h} f(\tau\tilde{q} + (1-\tau)q, p) \times \right. \\ &\quad \left. \times \psi(\tilde{q}) \lambda_Q J_h^{-1}(d\tilde{q}) \right) \lambda_P \circ J_h^{-1}(dp). \end{aligned}$$

Если $\tau = \frac{1}{2}$, то определение 5 совпадает с определением 4.

Теорема 2. Каково бы ни было $\tau \in [0, 1]$, ПДО $\hat{f}_\tau$ отображает пространство $\mathcal{S}_h$ в себя и является дифференциальным оператором конечного порядка с частными производными с коэффициентами из пространства непрерывных цилиндрических полиномов на Q . Именно, ПДО $\hat{f}_\tau$ является конечной линейной комбинацией с комплексными коэффициентами операторов, задаваемых следующим образом: для каждого конечного набора элементов $\{p_1, \dots, p_n\} \subset P (=Q')$ и каждого конечного набора элементов $\{q_1, \dots, q_m\} \subset Q$ функция $\psi \in \mathcal{S}_h(Q)$ отображается в функцию

$$Q \ni q \mapsto \left(\prod_{j=1}^n (p_j, q) \right) D^m \psi(q; q_1, \dots, q_m).$$

Теорема 3 (ср. [10]). Пусть $f \in \mathcal{P}(E)$ принимает вещественные значения. Тогда

1) оператор $\hat{f}$ в пространстве $\mathcal{S}_{2\pi\hbar}(Q)$ является симметричным относительно скалярного произведения, порожденного в $\mathcal{S}_{2\pi\hbar}(Q)$ скалярным произведением пространства $\mathcal{H}_h$;

2) оператор $\hat{f}$ является существенно самосопряженным в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_h$.

Замечание 2. Отображение, сопоставляющее функции f замыкание в $\mathcal{H}_h$ оператора $\hat{f}$, является квантованием по Шрёдингеру с параметром $\hbar$. Сужение этого отображения на алгебру Гейзенберга является фоковским (см. [6]) представлением канонических коммутационных соотношений в пространстве $\mathcal{H}_h$ с вакуумным векто-

ром, определяемым равенством $g_{2\pi\hbar}(\cdot) = e^{\frac{\|\cdot\|^2}{2\hbar}}$, т.е. гомоморфизмом алгебры Гейзенберга, причем гомоморфизмом будет и сужение на подалгебру полиномов степени не выше 2 в алгебре Пуассона.

Эти утверждения проверяются путем непосредственных вычислений.

Замечание 3. Функцию $g_h \equiv g_{2\pi\hbar}$ можно назвать плотностью гауссовской обобщенной меры $\gamma_h(d\cdot) = g_h(\cdot) \lambda_Q \circ J_h^{-1}(d\cdot)$ относительно обобщенной меры $\lambda_Q \circ J_h^{-1}$. При $h = 1$ ($\hbar = (2\pi)^{-1}$) такую гауссовскую обобщенную меру γ_1 можно отождествить с центрированной цилиндрической гауссовской [15] мерой G со скалярным корреляционным оператором $(2\pi)^{-1} \text{id}_Q$ следующим образом: интеграл от всякой ограниченной цилиндрической непрерывной функции $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ по цилиндрической мере G (по всему пространству Q) совпадает со значением обобщенной меры γ_1 на пробной функции f .

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в рамках гранта “Фундаментальные проблемы математики и механики”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bogachev V.I., Smolyanov O.G. Topological vector spaces and their applications. Springer, 2017. 590 p.
2. Смолянов О.Г. Анализ на топологических линейных пространствах и его приложения. М.: Изд-во МГУ, 1979.
3. Козлов В.В., Смолянов О.Г. Гамильтоновы аспекты квантовой теории // ДАН. 2012. Т. 444. № 6. С. 607–611.

4. Боголюбов Н.Н., Боголюбов Н.Н. (мл.). Введение в квантовую статистическую механику. М.: Наука, 1984.
5. Фок В.А. Работы по квантовой теории поля // Изд. 2-е. М.: Изд-во ЛКИ, 2007.
6. Березин Ф.А. Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1986.
7. Дирак П. Принципы квантовой механики. М.: Наука, 1979.
8. Смолянов О.Г. Бесконечномерные псевдодифференциальные операторы и квантование Шрёдингера // ДАН. 1982. Т. 263. № 3. С. 558–562.
9. Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г. // ДАН. 2019. Т. 486. № 6. С. 608–612.
10. Смолянов О.Г., Шамаров Н.Н. // ДАН. 2019. Т. 488. № 3. С. 15–19.
11. Угланов А.В. // УМН. 1973. Т. 28. № 4 (172). С. 227–228.
12. Бенткус В.Ю. // Матем. заметки. 1973. Т. 14. № 4. С. 465–468.
13. Feynman R.P. // Phys. Rev. 1948. V. 20. № 2. P. 367–387.
14. Feynman R.P. // Phys. Rev. 1951. V. 84. № 2. P. 108–128.
15. Смолянов О.Г., Шавгулидзе Е.Т. Континуальные интегралы. М.: URSS, 2020. Изд. 3-е, стереотипное. ISBN 978-5-9710-7525-7.

SCHRÖDINGER QUANTIZATION OF INFINITE-DIMENSIONAL HAMILTONIAN SYSTEMS WITH A NON-QUADRATIC HAMILTONIAN FUNCTION

O. G. Smolyanov^{a,b} and N. N. Shamarov^{a,b}

^a *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

^b *Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

Due to a theorem by Andre Weil there does not exist the standard Lebesgue measure on any infinite dimensional locally convex space. Because of that, to define a Schrödinger quantization of infinite dimensional Hamiltonian system one usually exploits a sigma-additive measure which is not translation invariant. In the present communication, a completely different approach is applied: we use the generalized Lebesgue measure, which is translation-invariant. In non-explicit form such a measure was used in the very first paper published by Feynman (1948). In this situation the pseudo-differential operators, whose symbols are classical Hamiltonian functions, are defined formally like in the finite-dimensional case; in particular, they use the unitary Fourier transforms which map functions into functions. Such definition of the infinite dimensional unitary Fourier transforms have not used in the literature.

Keywords: quantization, Schrödinger quantization, generalized Lebesgue measure, infinite-dimensional Hamiltonian systems, Heisenberg algebras, infinite-dimensional pseudodifferential operators