ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 492, с. 75–78

МАТЕМАТИКА

УДК 511.3

ОГРАНИЧЕННЫЕ ПРОМЕЖУТКИ МЕЖДУ ПРОСТЫМИ ЧИСЛАМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

© 2020 г. А. В. Шубин[1,*]

Представлено академиком РАН С.В. Конягиным 12.03.2020 г.
Поступило 14.03.2020 г.
После доработки 14.03.2020 г.
Принято к публикации 21.03.2020 г.

Пусть $0 < \alpha, \sigma < 1$ – произвольные фиксированные постоянные, $q_1 < q_2 < \ldots < q_n < q_{n+1} < \ldots$ – все простые числа с условием $\{q_n^\alpha\} < \sigma$, занумерованные в порядке возрастания, и пусть $m \geq 1$ – произвольное фиксированное целое число. С помощью аналога теоремы Бомбьери–Виноградова для простых указанного вида получены верхние оценки постоянных $c(m)$ таких, что неравенство $q_{n+m} - q_n \leq c(m)$ выполняется для бесконечного множества номеров n.

Ключевые слова: последовательные простые числа, малые расстояния, дробные доли, ограниченные промежутки, метод решета, теорема Бомбьери–Виноградова

DOI: 10.31857/S2686954320030194

Асимптотический закон распределения простых чисел q, удовлетворяющих при фиксированных $0 < \alpha, \sigma < 1$ условию $\{q^\alpha\} < \sigma$, был установлен И.М. Виноградовым [1] с помощью метода тригонометрических сумм. Именно, он доказал, что остаточный член $R(x)$ в формуле

$$\pi_\sigma(X) = \sum_{\substack{q \leq X, \\ \{q^\alpha\} < \sigma}} 1 = \sigma \cdot \pi(X) + R(X)$$

не превосходит по порядку $X^{1-\vartheta(\alpha)+\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое фиксированное число,

$$\vartheta(\alpha) = \min\left(\frac{1}{5}(1-\alpha), \frac{2}{15}\alpha\right) = \begin{cases} \frac{2}{15}\alpha, & 0 < \alpha \leq \frac{3}{5}, \\ \frac{1}{5}(1-\alpha), & \frac{3}{5} < \alpha < 1. \end{cases}$$

Впоследствии этот результат неоднократно уточнялся рядом авторов; в их числе А. Балог, Г. Харман, С.А. Гриценко. Аналогичные результаты для случая нецелого $\alpha > 1$ были получены И.М. Виноградовым в [2] и впоследствии уточнялись в работах Д. Лейтмана, Е.П. Голубевой, О.М. Фоменко, Р. Бейкера, Г.А. Колесника, М.Е. Чанги и др. Наилучшая оценка $R(X)$ при $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ принадлежит С.А. Гриценко [3]:

$$\vartheta(\alpha) = \begin{cases} \frac{\alpha}{2} - (\sqrt{3\alpha} - 1)^2, & \frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{3}{4}, \\ \frac{1}{2}(1-\alpha), & \frac{3}{4} < \alpha < 1. \end{cases}$$

В [3] также показано, что в случае $\alpha = \frac{1}{2}$ можно положить $\vartheta(\alpha) = \frac{1}{5}$. Метод, примененный в [3], восходит к Ю.В. Линнику [4, 5]; он опирается на так называемую ''явную формулу'' для функции Чебышева $\psi(x)$ и плотностные теоремы для нулей дзета-функции Римана.

Для решения задач с простыми числами p, принадлежащими некоторой бесконечной последовательности $\mathbb{E}$, необходимо иметь аналог теоремы Бомбьери–Виноградова, т.е. оценку вида

$$\sum_{q \leq Q} \max_{y \leq X} \max_{(a,q)=1} \left| \sum_{\substack{p \leq y,\, p \in \mathbb{E}, \\ p \equiv a (\mathrm{mod}\, q)}} 1 - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{p \in \mathbb{E}, \\ p \leq y}} 1 \right| \ll \frac{X}{(\ln X)^B}, \qquad (1)$$

где $B > 0$ – сколь угодно большая постоянная, а $Q = X^{\theta-\varepsilon}$, $0 < \theta < 1$. Продвижение в исходных задачах напрямую связано с величиной θ, именуемой “уровнем распределения'' последовательно-

[1]*Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия*
**E-mail: andrey.shubin@phystech.edu*

сти $\mathbb{E}$: чем выше уровень распределения, тем точнее оказывается результат.

Примером служит задача о существовании бесконечной последовательности пар соседних простых чисел из $\mathbb{E}$, расстояние между которыми не превосходит некоторой постоянной (аналог простых близнецов). Ряд общих утверждений о малых расстояниях между простыми числами из подмножеств целых чисел, для которых выполнен аналог теоремы Бомбьери—Виноградова, доказан Ж. Бенатаром [6] и Дж. Майнардом [7].

Пусть далее $\mathbb{E}$ — множество натуральных чисел n, удовлетворяющих условию $\{n^{\alpha}\} < \sigma$. Как показал Д.И. Толев [8], в случае $\alpha = \frac{1}{2}$ уровень распределения θ последовательности $\mathbb{E}$ оказывается не меньшим $\frac{1}{4}$. С.А. Гриценко и Н.А. Зинченко [9] было доказано, что можно положить $\theta = \frac{1}{3}$. Этот результат остается наилучшим на сегодняшний день.

Доказательство неравенств вида (1) сводится к получению верхней оценки тригонометрической суммы по простым вида

$$\sum_{\substack{X \le p < 2X \\ p \equiv a (\mathrm{mod} q)}} e^{2\pi i c p^{\alpha}}, \quad c > 0.$$

Оценку нужного вида дает следующая

Т е о р е м а 1. *Пусть* $0 < \alpha < 1, 0 < \varepsilon < \frac{1}{3}, D > 1$ — *произвольные фиксированные числа*, $X \ge X_0(\alpha, \varepsilon, D)$, $Q = X^{\frac{1}{3} - \varepsilon}$, *и пусть* c — *целое число с условием* $1 \le c \le (\ln X)^D$. *Тогда для суммы*

$$T = \sum_{q \le Q} \max_{(a,q)=1} \left| \sum_{\substack{X \le p < 2X \\ p \equiv a (\mathrm{mod}\, q)}} e^{2\pi i c p^{\alpha}} \right|$$

справедлива оценка $T \ll X^{1 - \frac{\varepsilon^3}{10\alpha^2}}$, *где постоянная в знаке* $\ll$ *зависит от* ε *и* D.

Таким образом, при любом $0 < \alpha < 1$ можно положить $\theta = \frac{1}{3}$. В частности, при $\frac{1}{2} \le \alpha < 1$ отсюда получается теорема Гриценко—Зинченко.

Использование теоремы 1 наряду с методом решета А. Сельберга, модифицированным Дж. Майнардом [10], приводит к следующим результатам:

Т е о р е м а 2. *Пусть* $m \ge 1$ — *фиксированное целое число*, $q_1, q_2, q_3, \ldots$ — *все простые числа из множества* $\mathbb{E}$, *занумерованные в порядке возрастания. Тогда существует бесконечная последовательность чисел* n, *для которых*

$$q_{n+m} - q_n \le 9700 m^3 e^{6m}.$$

Набор целых чисел $h_1 < h_2 < \ldots < h_k$ называется допустимым, если для любого простого p найдется a такое, что $h_i \not\equiv a \ (\mathrm{mod}\, p)$ для всех i, $1 \le i \le k$. Доказательство теоремы 2 основано на изучении сумм S типа

$$S = \sum_{\substack{X \le n < 2X \\ n \in \mathbb{E} \\ n + h_i \in \mathbb{E}\ \forall i}} \left(\sum_{i=1}^{k} \chi_{\mathbb{E} \cap \mathbb{P}} (n + h_i) - \rho \right) \omega_n. \qquad (2)$$

Здесь $\chi_{\mathbb{E} \cap \mathbb{P}}$ — характеристическая функция простых из $\mathbb{E}$, $\{h_1, \ldots, h_k\}$ — фиксированный допустимый набор, $\rho > 0$ — постоянная, ω_n — некоторые неотрицательные числа. Несложно видеть, что утверждение теоремы 2 следует из оценки вида $S > 0$, отвечающей значению $\rho = m$. Выполнение этого неравенства гарантирует существование бесконечного множества пар простых чисел из $\mathbb{E}$, отличающихся не более чем на диаметр допустимого набора, т.е. на величину $\max\limits_{1 \le i < j \le k} (h_j - h_i)$. Получение оценки $S > 0$ в формуле (2) сводится к подбору оптимальных весов ω_n, для которых сумма

$$S_2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\substack{X \le n < 2X \\ n \in \mathbb{E} \\ n + h_i \in \mathbb{E} \forall i}} \chi_{\mathbb{E} \cap \mathbb{P}} (n + h_i) \omega_n$$

при $X \to +\infty$ превосходит величину ρS_1, где

$$S_1 = \sum_{\substack{X \le n < 2X \\ n \in \mathbb{E} \\ n + h_i \in \mathbb{E} \forall i}} \omega_n.$$

Следуя работе Дж. Майнарда [10], мы выбираем веса ω_n в виде

$$\omega_n = \left(\sum_{d_i | (n + h_i)} \lambda_{d_1, \ldots, d_k} \right)^2,$$

где

$$\lambda_{d_1, \ldots, d_k} = \left(\prod_{i=1}^{k} \mu(d_i) d_i \right) \cdot \sum_{\substack{r_1, \ldots, r_k: \\ d_i | r_i, (r_i, W) = 1}} \frac{\mu^2 (r_1 \ldots r_k)}{\varphi(r_1) \ldots \varphi(r_k)} \times$$
$$\times F\left(\frac{\ln r_1}{\ln R}, \ldots, \frac{\ln r_k}{\ln R} \right).$$

Здесь W обозначает произведение всех простых чисел p, не превосходящих $\ln \ln \ln X$ (так что $W \le (\ln \ln X)^2$ при достаточно больших X), а $F(x_1, \ldots, x_k)$ — фиксированная кусочно-дифференцируемая функция, равная нулю всюду, кроме, быть может, множества

$$\left\{(x_1,\dots,x_k)\in[0,1]^k : \sum_{i=1}^{k} x_i \le 1\right\}.$$

Положим $\omega_n = 0$ во всех случаях, кроме $n \equiv \nu_0 \pmod{W}$, для фиксированного ν_0, выбранного так, что $(\nu_0 + h_i, W) = 1$ для всех i. Это ограничение не является ключевым в построении, но позволяет избежать некоторых технических сложностей. Также положим $\lambda_{d_1,\dots,d_k} = 0$ в случае $\left(\prod_{i=1}^{k} d_i, W\right) > 1$.

Применяя рассуждения, подобные тем, что использовались в работе Дж. Майнарда [10], получаем следующие формулы:

$$S_1 = (\sigma + o(1))\frac{\varphi^k(W)X(\ln R)^k}{W^{k+1}} I_k(F), \quad (3)$$

$$S_2 = (\sigma + o(1))\frac{\varphi^k(W)X(\ln R)^{k+1}}{W^{k+1} lnX}\sum_{m=1}^{k} J_k^{(m)}(F), \quad (4)$$

где

$$I_k(F) = \int_0^1\dots\int_0^1 F^2(t_1,\dots,t_k)\,dt_1\dots dt_k,$$

$$J_k^{(m)}(F) = \int_0^1\dots\int_0^1\left(\int_0^1 F(t_1,\dots,t_k)\,dt_m\right)^2 \times$$
$$\times\, dt_1\dots dt_{m-1}dt_{m+1}\dots dt_k.$$

Ключевым отличием от доказательства Дж. Майнарда при выводе формулы (4) является использование теоремы 1 вместо теоремы Бомбьери–Виноградова. Коэффициент σ в главном члене в (3) и (4) отражает тот факт, что доля как всех целых, так и простых чисел из множества $\mathbb{E}$ асимптотически равна σ.

Так исходная задача сводится к поиску функции F, удовлетворяющей указанным ограничениям и дающей максимум отношения

$$L_k(F) = \frac{\sum_{m=1}^{k} J_k^{(m)}(F)}{I_k(F)}.$$

Пусть $M_k = \sup_F L_k(F)$. Докажем существование бесконечного множества целых n таких, что по крайней мере $\left\lceil \frac{\theta M_k}{2}\right\rceil$ из чисел $n + h_i$ $(1 \le i \le k)$ являются простыми. Тогда при $m < \left\lceil \frac{\theta M_k}{2}\right\rceil$ из этого будет следовать справедливость неравенства

$$\lim_{n\to+\infty}\inf(q_{n+m} - q_n) \le \max_{1\le i,j\le k}|h_i - h_j|.$$

Положим $R = X^{\frac{\theta}{2}-\varepsilon}$. По определению M_k, найдется функция F_0 такая, что

$$\sum_{m=1}^{k} J_k^{(m)}(F_0) > (M_k - \varepsilon) I_k(F_0).$$

Тогда

$$S = \sigma\frac{\varphi^k(W)X(\ln R)^k}{W^{k+1}}\times$$
$$\times\left(\frac{\ln R}{\ln X}\sum_{j=1}^{k} J_k^{(m)}(F_0) - \rho I_k(F_0) + o(1)\right) \ge$$
$$\ge \sigma\frac{\varphi^k(W)X(\ln R)^k I_k(F_0)}{W^{k+1}}\times$$
$$\times\left(\left(\frac{\theta}{2} - \varepsilon\right)(M_k - \varepsilon) - \rho + o(1)\right).$$

Таким образом, если $\rho = \frac{\theta M_k}{2} - \delta$ для некоторого δ, то выбрав $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ достаточно малым, получим, что для бесконечного числа целых n по крайней мере $[\rho + 1]$ чисел из набора $n + h_i$, $i = 1,\dots,k$, являются простыми. В силу того, что $\lfloor \rho + 1\rfloor = \left\lceil \frac{\theta M_k}{2}\right\rceil$ при достаточно малом δ, получаем требуемое.

Оценим величину $\max_{1\le i<j\le k}(h_j - h_i)$. Она равна диаметру некоторого допустимого множества из k чисел, где $\frac{\theta M_k}{2} > 1$. Значит, достаточно найти минимальное k, удовлетворяющее условию $M_k > 6m$. Проводя вычисления, аналогичные приведенным в [10], получаем неравенство

$$M_k > \ln k - 2\ln\ln k - 1 \quad (5)$$

для $k \ge 527$. В соответствии с этим выберем k из условия $k \ge 390m^2e^{6m}$, а в качестве допустимого множества возьмем конечную подпоследовательность простых $\{p_{\pi(k)+1},\dots,p_{\pi(k)+k}\}$. Легко видеть, что такой выбор дает допустимое множество в силу того, что, с одной стороны, ни один элемент не сравним с нулем по модулям $p \le k$, с другой стороны, указанное множество не пробегает полной системы вычетов по модулю любого простого $p > k$ из-за недостаточного числа элементов. Тогда

$$\max_{1<i,j\le k}|h_i - h_j| \le p_{\pi(k)+k} \le p_{\lceil 1.1k\rceil}$$

при $k \ge 98716$. Далее, используя оценку $p_n < n(\ln n + \ln\ln n + 8)$ при $n = 1.1\cdot 390m^2e^{6m}$, найдем

$$c(m) \le \max_{1<i,j\le k}|h_i - h_j| \le 9700m^3e^{6m}.$$

Для малых значений m оценку можно уточнить. Например, при $m = 1$ положим $k = 157337$. Тогда $M_k > 6$ и

$$c(1) < p_{k+\pi(k)} - p_{\pi(k)+1} = 2176652.$$

Аналогично, при $m = 2$ выберем $k = 157629323$. Тогда $M_k > 12$

$$c(2) < p_{k+\pi(k)} - p_{\pi(k)+1} = 3130607572.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Виноградов И.М.* Некоторое общее свойство распределения простых чисел // Мат. сб. 1940. Т. 7 (49). № 2. С. 365–372.
2. *Виноградов И.М.* Оценка одной тригонометрической суммы по простым числам // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1959. Т. 23. № 2. С. 157–164.
3. *Гриценко С.А.* Об одной задаче И.М. Виноградова // Матем. заметки. 1986. Т. 39. № 5. С. 625–640.
4. *Линник Ю.В.* Об одной теореме теории простых чисел // ДАН СССР. 1945. Т. 47. № 1. С. 7–8.
5. *Кауфман Р.М.* О распределении $\{\sqrt{p}\}$ // Матем. заметки. 1979. Т. 26. № 4. С. 497–504.
6. *Benatar J.* The Existence of Small Prime Gaps in Subsets of the Integers // Int. J. Number Theory. 2015. V. 11. № 3. P. 801–833.
7. *Maynard J.* Dense Clusters of Primes in Subsets // Compos. Math. 2016. V. 152. № 7. P. 1517–1554.
8. *Tolev D.I.* On a Theorem of Bombieri–Vinogradov Type for Prime Numbers from a Thin Set // Acta Arith. 1997. V. 81. № 1. P. 57–68.
9. *Гриценко С.А., Зинченко Н.А.* Об оценке одной тригонометрической суммы по простым числам // Научные ведомости Белгородского гос. ун-та. Серия: Математика. Физика. 2013. Вып. 30. № 5 (148). С. 48–52.
10. *Maynard J.* Small Gaps between Primes // Ann. Math. 2015. V. 181. № 1. P. 383–413.

BOUNDED GAPS BETWEEN PRIMES OF SPECIAL FORM

A. V. Shubin[a]

[a] *Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS S.V. Konyagin

Let $0 < \alpha, \sigma < 1$ be fixed numbers, $q_1 < q_2 < \ldots < q_n < q_{n+1} < \ldots$ is the set of primes satisfying the condition $\{q_n^\alpha\} < \sigma$ and indexed in ascending order, and let $m \geq 1$ be any fixed integer. Using an analogue of Bombieri–Vinogradov theorem for given set of primes we obtain an explicit upper bound for the constants $c(m)$ such that the inequality $q_{n+m} - q_n \leq c(m)$ holds for infinitely many n.

Keywords: consecutive primes, small gaps, fractional parts, bounded gaps, sieve method, Bombieri–Vinogradov theorem