ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 492, с. 108–111

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЯ НА ДВУХСТУПЕННЫХ СВОБОДНЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУППАХ ЛИ

© 2020 г. Ю. Л. Сачков[1,2,*]

Представлено академиком РАН Р.В. Гамкрелидзе 12.02.2020 г.
Поступило 13.02.2020 г.
После доработки 31.03.2020 г.
Принято к публикации 31.03.2020 г.

Для двухступенных свободных нильпотентных групп Ли описаны симплектические слоения и функции Казимира. Рассмотрена левоинвариантная задача быстродействия, для которой множество допустимых скоростей есть строго выпуклый компакт в первом слое алгебры Ли, содержащий начало координат внутри себя. Для вертикальной подсистемы гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина описаны интегралы. Описаны свойства решений этой подсистемы для малых рангов бивектора Пуассона.

Ключевые слова: симплектические слоения, функции Казимира, задача быстродействия, принцип максимума Понтрягина, периодические управления

DOI: 10.31857/S2686954320030182

1. ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Пусть $\mathfrak{g}$ есть двухступенная свободная нильпотентная алгебра Ли с $k \geq 2$ образующими:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(1)} + \mathfrak{g}^{(2)},$$

$$\mathfrak{g}^{(1)} = \operatorname{span}\{X_i \mid i = 1, 2, \dots, k\},$$

$$\mathfrak{g}^{(2)} = \operatorname{span}\{X_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq k\}, \tag{1}$$

$$[X_i, X_j] = X_{ij}, \quad \operatorname{ad} X_{ij} = 0, \quad 1 \leq i < j \leq k,$$

$$\dim \mathfrak{g} = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Пусть G есть связная односвязная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Будем считать X_i, X_{ij} левоинвариантными векторными полями на G.

Модель для векторных полей X_i, X_{ij} на $G \cong \mathbb{R}^{k(k+1)/2} = \{(x_1, \dots, x_k; x_{12}, \dots, x_{(k-1)k})\}$ можно выбрать в следующем виде [11]:

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{j>i} \frac{x_j}{2} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} + \sum_{j<i} \frac{x_j}{2} \frac{\partial}{\partial x_{ji}}, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

$$X_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_{ij}}, \quad 1 \leq i < j \leq k.$$

Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ есть выпуклый компакт, содержащий начало координат внутри себя. Рассмотрим следующую задачу быстродействия [2]:

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^{k} u_i X_i, \quad q \in G, \quad u = (u_1, \dots, u_k) \in U, \tag{2}$$

$$q(0) = \mathrm{id}, \quad q(t_1) = q_1, \tag{3}$$

$$t_1 \to \min. \tag{4}$$

При $U = -U$ получаем субфинслерову задачу [4–7], а если U есть эллипсоид с центром в нуле, то задача субриманова [1–3].

В случае $k = 2$ G есть группа Гейзенберга, и решение задачи (2)–(4) было получено Х. Буземаном [12] и В.Н. Берестовским [5].

Субриманов случай $U = \left\{\sum_{i=1}^{k} u_i^2 \leq 1\right\}$ был впервые рассмотрен Р. Брокеттом [8] и был полностью исследован для $k = 3$ О. Мясниченко [9]. Некоторые результаты для $k = 4$ были получены Л. Рицци и У. Серресом [10].

[1] *Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия*
[2] *Институт программных систем им. А.К. Айламазяна Российской академии наук, Переславль-Залесский, Ярославская область, Россия*
[*] *E-mail: yusachkov@gmail.com*

Существование оптимальных управлений в задаче (2)–(4) следует стандартным образом из теорем Рашевского–Чжоу и Филиппова [2].

2. СИМПЛЕКТИЧЕСКОЕ СЛОЕНИЕ

Перед началом исследования экстремалей в задаче (2)–(4), рассмотрим функции Казимира и симплектическое слоение (разбиение на коприсоединенные орбиты) коалгебры Ли $\mathfrak{g}^*$ [13]. Это важно для исследования экстремалей в этой задаче.

Пусть $p^0 \in \mathfrak{g}^*$. Обозначим через S_{p^0} симплектичекий лист (орбиту коприсоединенного представления) для точки p^0:

$$S_{p^0} = \{\mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}(p^0) \,|\, g \in G\} \subset \mathfrak{g}^*.$$

Далее в теореме 1 получено явное описание листа S_{p^0}.

Введем линейные на слоях кокасательного расслоения T^*G гамильтонианы, соответствующие левоинвариантному реперу на G:

$$h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i \rangle, \quad h_{ij}(\lambda) = \langle \lambda, X_{ij} \rangle, \quad \lambda \in T^*G.$$

Из таблицы умножения для скобки Ли (1) получаем следующую таблицу умножения для скобки Пуассона:

$$\{h_i, h_j\} = h_{ij}, \quad \{h_{ij}, h_l\} = \{h_{ij}, h_{lm}\} = 0. \tag{5}$$

Гамильтонианы h_i, h_{ij} будем считать координатами на коалгебре Ли $\mathfrak{g}^*$.

Бивектор Пуассона (т.е. матрица попарных скобок Пуассона между базисными гамильтонианами h_i, h_{ij}) определяется кососимметрической матрицей

$$M = (h_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & h_{12} & \dots & h_{1k} \\ -h_{12} & 0 & \dots & h_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -h_{1k} & -h_{2k} & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{so}(k). \tag{6}$$

Для вектора $a = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k$ рассмотрим линейную функцию

$$I_a = \sum_{i=1}^k a_i h_i, \quad I_a \colon \mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}.$$

Далее, для любого $p^0 \in \mathfrak{g}^*$ рассмотрим аффинное подпространство

$$L_{p^0} = \{p \in \mathfrak{g}^* \,|\, h_{ij}(p) = h_{ij}(p^0),$$
$$I_a(p) = I_a(p^0)\ \forall a \in \ker M_{p^0}\} \subset \mathfrak{g}^*,$$

где $M_{p^0} = (h_{ij}(p^0))$ есть соответствующая матрица (6). Очевидно, что

$$\dim L_{p^0} = \dim S_{p^0} = \mathrm{rank} M_{p^0}.$$

Теорема 1. *Для любого $p^0 \in \mathfrak{g}^*$ выполнено равенство $S_{p^0} = L_{p^0}$.*

3. ФУНКЦИИ КАЗИМИРА НА $\mathfrak{g}^*$

Напомним, что функцией Казимира называется такая функция $h \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, что

$$\{h, h_i\} = \{h, h_{ij}\} = 0 \quad \forall i, j. \tag{7}$$

Имеется $\dfrac{k(k-1)}{2}$ очевидных функций Казимира

$$h_{ij}, \quad 1 \le i < j \le k. \tag{8}$$

Теорема 2.

1. *Если $k = 2n$, $n \in \mathbb{N}$, то на коалгебре $\mathfrak{g}^*$ существуют всего $\dfrac{k(k-1)}{2}$ независимых функций Казимира* (8).

2. *Если $k = 2n+1$, $n \in \mathbb{N}$, то на коалгебре $\mathfrak{g}^*$, кроме функций Казимира* (8), *существует еще одна, не зависящая от них*:

$$C(p) = I_{a(p)}(p) = \sum_{i=1}^k a_i(p) h_i(p),$$

где

$$a_i = \sum_{\substack{j_l \ne i \\ j_1, \dots, j_{2n}\ \text{разные}}} (-1)^{\sigma + i} h_{j_1 j_2} \cdots h_{j_{2n-1} j_{2n}}, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

σ – *четность перестановки* $(j_1, \dots, j_{2n})$.

Функция Казимира C есть однородный полином степени $n + 1 = \dfrac{k+1}{2}$ на $\mathfrak{g}^*$.

4. ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА И ИНТЕГРАЛЫ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ

Применим принцип максимума Понтрягина (ПМП) [2] к задаче (2)–(4). Гамильтониан принципа максимума равен $\sum_{i=1}^k u_i h_i(\lambda)$, $\lambda \in T^*G$. Гамильтонова система ПМП имеет вид

$$\dot{h}_i = -\sum_{j=1}^k u_j h_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, k, \tag{9}$$

$$\dot{h}_{ij} = 0, \quad 1 \le i < j \le k, \tag{10}$$

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^k u_i X_i, \tag{11}$$

а условие максимальности есть

$$\sum_{i=1}^{k} u_i(t) h_i(\lambda_t) = \max_{v \in U} \sum_{i=1}^{k} v_i h_i(\lambda_t) = H(h(\lambda_t)), \qquad (12)$$

где

$$H(h_1, \ldots, h_k) := \max_{v \in U} \sum_{i=1}^{k} v_i h_i$$

есть опорная функция множества U [14]. Функция H выпукла, положительно однородна и непрерывна.

Вдоль экстремальных траекторий $H \equiv \mathrm{const} \geq 0$. Анормальный случай

$$H \equiv 0 \Leftrightarrow h_1 = \ldots = h_k \equiv 0$$

можно опустить, так как распределение $\Delta = \mathrm{span}(X_1, \ldots, X_k)$ удовлетворяет равенствам $\Delta^2 = \Delta + [\Delta, \Delta] = TG$, поэтому по условию Гоха [2] все локально оптимальные анормальные траектории одновременно нормальны. Поэтому рассмотрим нормальный случай $H \equiv \mathrm{const} > 0$. В силу однородности H можно считать $H = 1$.

Будем далее предполагать дополнительно, что множество U строго выпукло. Тогда максимизированный гамильтониан H является C^1-гладким на $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$, а максимум в (12) достигается на управлении $u = \nabla H = \left(\frac{\partial H}{\partial h_1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial h_k} \right)$ [14]. Обозначим $H_i = \frac{\partial H}{\partial h_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Тогда вертикальная подсистема (9), (10) гамильтоновой системы ПМП принимает вид

$$\dot{h}_i = -\sum_{j=1}^{k} h_{ij} H_j, \quad \dot{h}_{ij} = 0, \quad 1 \leq i < j \leq k. \qquad (13)$$

З а м е ч а н и е. Если $M = 0$, то все решения $h_i(t)$ системы (13) постоянны, поэтому управления $u(t)$ постоянны и оптимальны.

Т е о р е м а 3. *Система* (13) *имеет следующие интегралы*:

1) *функции Казимира* h_{ij}, $1 \leq i < j \leq k$, *а также гамильтониан* H *при* $k = 2n$, $n \in \mathbb{N}$,

2) *функции Казимира* h_{ij}, $1 \leq i < j \leq k$, *и* C, *а также гамильтониан* H *при* $k = 2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Для любого $p^0 \in \mathfrak{g}^*$ *симплектический лист* S_{p^0} *есть инвариантное множество системы* (13). *В частности, любая функция* I_a, $a \in \ker M_{p^0}$, *постоянна на решениях этой системы*.

Т е о р е м а 4. *Пусть* $p^0 \in H^{-1}(1)$ *и* $\mathrm{rank} M_{p^0} = 2$. *Тогда решение* $p(t)$ *системы* (13) *с начальным условием* $p(0) = p^0$ *существует и единственно для любого* $t \in \mathbb{R}$.

1) *Если* $\nabla H(p^0) \in \ker M$, *то* $p(t) \equiv p^0$. *Соответствующее управление* $u(t)$ *оптимально*.

2) *Если* $\nabla H(p^0) \notin \ker M$, *то* $p(t)$ *есть регулярная* C^1-*гладкая периодическая плоская кривая. Соответствующее управление* $u(t)$ *периодическое*.

Т е о р е м а 5. *Пусть* $U = \left\{ \sum_{i=1}^{k} u_i^2 \leq 1 \right\}$. *Тогда*:

1) *помимо интегралов*, *указанных в теореме* 3, *имеется еще* $n = [k/2]$ *независимых интегралов*,

2) *если* $k \geq 4$, *то решения системы* (13) *общего вида непериодические*.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации номер 075-15-2019-1613.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Montgomery R.* A Tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics and Applications. AMS, 2002
2. *Аграчев А.А., Сачков Ю.Л.* Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005.
3. *Agrachev A., Barilari D., Boscain U.* A comprehensive introduction to sub-Riemannian geometry. Cambridge: Cambridge University Press, 2019.
4. *Берестовский В.Н.* Однородные многообразия с внутренней метрикой II // Сиб. матем. журн. 1989. Т. 30. № 2. С. 14–28.
5. *Берестовский В. Н.* Геодезические неголономных левоинвариантных внутренних метрик на группе Гейзенберга и изопериметриксы плоскости Минковского // Сиб. матем. журн. 1994. Т. 35. № 1. С. 3–11.
6. *Barilari D., Boscain U., Le Donne E., and Sigalotti M.* Sub-Finsler structures from the time-optimal control viewpoint for some nilpotent distributions // J. Dyn. Control Syst. 2017. V. 23. № 3. P. 547–575.
7. *Ardentov A., Le Donne E., Sachkov Yu.* Sub-Finsler geodesics on Cartan group // Regular and Chaotic Dynamics. 2019. V. 24. № 1. P. 36–60.
8. *Brockett R.* Nonlinear Control and Differential Geometry // Proc. Intern. Congress of Mathematicians. August 16–24, 1983. Warszawa. P. 1357–1368.
9. *Myasnichenko O.* Nilpotent (3, 6) sub-Riemannian problem // J. Dyn. Control Syst. 2002. V. 8. № 4. P. 573–597.
10. *Rizzi L., Serres U.* On the cut locus of free, step two Carnot groups // Proc. Amer. Math. Soc. 2017. V. 145. P. 5341–5357.
11. *Le Donne E., Speight G.* Lusin approximation for horizontal curves in step 2 Carnot groups // G. Calc. Var. 2016. V. 55. P. 111.
12. *Busemann H.* The isoperimetric problem in the Minkowski plane // AJM. 1947. V. 69. P. 863–871.
13. *Kirillov A.A.* Lectures on the Orbit Method. AMS. 2004.
14. *Rockafellar R.T.* Convex Analysis. Princeton University Press, 1970.

PERIODIC TIME-OPTIMAL CONTROLS ON TWO-STEP FREE-NILPOTENT LIE GROUPS

Yu. L. Sachkov[a,b]

[a] *Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation*

[b] *Ailamazyan Program Systems Institute of the Russian Academy of Sciences, Pereslavl-Zalessky, Yaroslavl Region, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS R.V. Gamkrelidze

For two-step free nilpotent Lie algebras we describe symplectic foliations and Casimir functions. We consider a left-invariant time-optimal problem with the set of admissible controls given by a strictly convex compactum in the first layer of the Lie algebra containing the origin in its interior. We describe integrals for the vertical subsystem of the Hamiltonian system of Pontryagin maximum principle. We describe properties of solutions to this system for low ranks of Poisson bivector.

Keywords: symplectic foliations, Casimir functions, time-optimal problem, Pontryagin maximum principle, periodic controls