ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 492, с. 62–64

МАТЕМАТИКА

УДК 515.16

ОТОБРАЖЕНИЯ С ЗАДАННЫМИ БОРДМАНОВСКИМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

© 2020 г. А. Д. Рябичев[1,*]

Представлено академиком РАН В.А. Васильевым 12.03.2020 г.
Поступило 12.03.2020 г.
После доработки 12.03.2020 г.
Принято к публикации 23.03.2020 г.

Мы обобщаем теорему Я.М. Элиашберга об особенностях типа складки на произвольные бордмановские особенности. А именно, формулируем необходимое и достаточное условие, при котором отображение многообразий одинаковой размерности гомотопно общему отображению с заданными бордмановскими особенностями Σ^I в каждой точке. В размерностях 2 и 3 мы переформулируем это условие в терминах гомологических классов множеств особых точек и характеристических классов многообразий.

Ключевые слова: бордмановские особенности, складки, сборки, *h*-принцип

DOI: 10.31857/S2686954320030170

1. БОРДМАНОВСКИЕ ОСОБЕННОСТИ И ОБЩИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Все рассматриваемые многообразия по умолчанию считаются бесконечно гладкими и без края. Отображения между многообразиями предполагаются бесконечно гладкими, если не оговорено противное. Мы фиксируем пару многообразий M, N размерности $n > 1$. В разделе 5 мы предполагаем $n = 2$, а в разделе 6 – $n = 3$.

Мы будем использовать бордмановскую классификацию особенностей (см., например, [1, гл. 1, § 2]). Возьмем отображение $f: M \to N$. Для последовательности целых чисел $I = i_1, i_2, \ldots, i_k$, такой что $n \geq i_1 \geq i_2 \geq \ldots \geq i_k \geq 0$, в множестве критических точек отображения f определяется подмножество $\Sigma^I(f)$. Его можно определить как прообраз некоторого подмногообразия $\Sigma^I \subset J^k(M, N)$ в пространстве k-струй. Поскольку особенности типа Σ^I для $k > n$ мы рассматривать не будем, положим $k = n$.

Многообразия Бордмана Σ^I для всевозможных последовательностей индексов образуют разбиение множества $\Sigma \subset J^k(M, N)$ всех критических струй. Это разбиение не является стратификацией [2, с. 48]. Однако поскольку $\Sigma^I \subset J^k(M, N)$ суть полуалгебраические подмножества, можно выбрать стратификацию Σ, которая будет подразбиением бордмановского разбиения (см. [3]). Отображения $f: M \to N$, струйные расширения которых трансверсальны выбранной стратификации Σ, мы будем называть общими.

Для общего отображения f множество его критических точек $\Sigma(f) = j^r(f)^{-1}(\Sigma)$ является стратифицированным подмножеством в M. Любой страт $C \subset \Sigma(f)$ целиком лежит в некотором $\Sigma^I(f)$, причем из соображений размерности последовательность I должна иметь ноль на конце. Поэтому ограничение $f|_C$ является иммерсией $C \to N$.

2. СОГЛАСОВАННЫЕ СИСТЕМЫ РОСТКОВ

Мы собираемся изучать отображения с заданными особенностями в фиксированном замкнутом подмножестве $S \subset M$.

Пусть имеется набор открытых множеств $U_i \subset M$, такой что $S \subset \bigcup U_i$, и набор n-мерных многообразий V_i (где $i = 1, 2, \ldots$ пробегает фиксированный, возможно, бесконечный набор индексов). Пусть задан набор общих отображений φ_i: $U_i \to V_i$, для которых $\bigcup \Sigma(\varphi_i) = S$.

Набор $\{\varphi_i\}$ называется локально согласованным, если для любых i, j ростки φ_i и φ_j в каждой точке $x \in U_i \cap U_j$ L-эквивалентны (это означает, что для некоторых окрестностей $U \ni x$ и $V \ni \varphi_i(U)$, таких

[1] *Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Москва, Россия*
**E-mail: ryabichev@179.ru*

что $U \subset (U_i \cap U_j)$ и $V \subset V_i$, найдется вложение β: $V \to V_j$, для которого $\beta \circ \varphi_i|_U = \varphi_j|_U$).

Поскольку отображения φ_i общие, на S определена стратификация, т.е. оно обязательно является стратифицированным подмножеством в M.

3. СКРУЧЕННОЕ КАСАТЕЛЬНОЕ РАССЛОЕНИЕ

Для локально согласованного набора $\{\varphi_i\}$ мы строим следующее векторное расслоение $E \to M$ ранга n. Сперва положим $U_0 = V_0 = M \setminus S$ и $\varphi_0 = \mathrm{Id} : U_0 \to V_0$. Если мы дополним набор $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ отображением φ_0, он останется локально согласованным.

Для каждого $i = 0, 1, \ldots$ возьмем векторное расслоение $E_i \to U_i$, равное $\varphi_i^*(TV_i)$. Поскольку набор $\{\varphi_i\}$ локально согласован, для любых i, j и точки $x \in U_i \cap U_j$ имеется изоморфизм слоев $d\beta : E_i|_x \to E_j|_x$, где β – отображение, устанавливающее L-эквивалентность ростков φ_i и φ_j в x. Этот изоморфизм слоев не зависит от выбора E, и, следовательно, задан глобальный изоморфизм $\Psi_{i,j} : E_i|_{U_i \cap U_j} \to E_j|_{U_i \cap U_j}$. Расслоение E получается склейкой расслоений E_i при помощи $\Psi_{i,j}$, $i, j = 0, 1, \ldots$

4. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Пусть S, $\{\varphi_i\}$ и E определены как выше. Будем говорить, что отображение $f' : M \to N$ имеет заданные особенности, если $\Sigma(f') = S$ и для любого i ростки f' и φ_i в любой точке $x \in U_i$ будут L-эквивалентны.

Следующая теорема обобщает h-принцип Я.М. Элиашберга для отображений со складками [4].

Т е о р е м а 1. *Непрерывное отображение $f: M \to N$ гомотопно общему отображению f', имеющему заданные особенности, если и только если расслоения E и $f^*(TN)$ изоморфны.*

Доказательство теоремы 1 см. в [5, § 4.3]. Для доказательства существенно, что S – стратифицированное подмножество в M и для любого страта $C \subset S$ и любого i ограничение $\varphi_i|_{C \cap U_i}$ является иммерсией. Также мы используем теорему Я.М. Элиашберга, поэтому существенно, что подмножество S, в котором φ_i имеют складки, непусто.

5. ПРИЛОЖЕНИЯ В РАЗМЕРНОСТИ 2

Пусть M, N – связные замкнутые поверхности. Ниже мы сформулируем обобщение теоремы, доказанной Я.М. Элиашбергом в случае ориентируемого N, см. [4]. Мы выводим это обобщение из теоремы 1, вычисляя характеристические классы расслоения E.

Особенности общих отображений $M \to N$ суть складки и сборки. Пусть $C \subset M$ – замкнутое 1-подмногообразие, $P \subset C$ – дискретное подмножество. Для каждой точки $p \in P$ выберем вектор единичной нормали к C, называемый характеристическим вектором. Выбор характеристического вектора определяет общий p-росток, имеющий сборку в p и складки в C рядом с p, с точностью до эквивалентности (образ характеристического вектора будет направлен “наружу” сборки).

Если $[C] = 0$, то C ограничивает два двумерных подмногообразия с краем $M_+, M_- \subset M$. Обозначим через n_+, соответственно n_-, число точек P, характеристический вектор которых направлен наружу M_+, соответственно наружу M_-.

Т е о р е м а 2. *Отображение $f: M \to N$ гомотопно отображению с множеством складок $C \setminus P$ и множеством сборок P с заданными характеристическими векторами, если и только если выполнены следующие условия*:

1) $[C] = w_1(M) + f^*w_1(N)$,

2) $[P] = w_2(M) + f^*w_2(N)$,

3) *если* $[C] = 0$, *то*

$$|\chi(M_+) - \chi(M_-) - n_+ + n_-| = |\deg f \cdot \chi(N)|.$$

Здесь $\deg f$ – степень отображения (возможно, неориентируемых) многообразий. Она определяется как степень индуцированного отображения в старших когомологиях с коэффициентами в ориентирующем пучке. Последнее отображение определено, если $f^*w_1(N) = w_1(M)$. Поэтому если $[C] = 0$, то степень $\deg f$ определена, поскольку выполнено условие $[C] = w_1(M) + f^*w_1(N)$.

Из теоремы 2 мы получаем следующее утверждение.

Т е о р е м а 3. *Отображение $M \to N$ с множеством складок $C \setminus P$ и множеством сборок P с заданными характеристическими векторами существует, если и только если выполнены следующие условия*:

1) $[P] = [C]^2$;

2) *если* $w_1(N) = 0$, *то* $[C] = w_1(M)$;

3) *если* $[C] = 0$, *то найдется* $d \in Z$, *такое что* $|\chi(M_+) - \chi(M_-) - n_+ + n_-| = |d \cdot \chi(N)|$ *и* $\chi(M) \le |d| \cdot \chi(N)$; *при этом, если M ориентируемо и N неориентируемо, то d должно быть четным*;

4) *если* $[C] \ne 0$, $w_1(M) \ne 0$ *и* $[C]^2 \ne w_2(M)$, *то* $w_2(N) \ne 0$ *и* $\chi(N) > \chi(M)$.

Доказательство теорем 2 и 3 изложено в [6].

6. ПРИЛОЖЕНИЯ В РАЗМЕРНОСТИ 3

Пусть теперь M, N — замкнутые трехмерные многообразия. Тогда аналог теоремы 2 будет выглядеть даже проще, поскольку векторные расслоения ранга 3 над M классифицируются своими классами Штифеля—Уитни.

Особенности общих отображений $M \to N$ суть складки, сборки и ласточкины хвосты. Возьмем произвольное замкнутое 2-подмногообразие $S \subset M$, замкнутое 1-подмногообразие $C \subset S$ и дискретное подмножество $P \subset C$.

Теорема 4. *Непрерывное отображение* $f: M \to N$ *гомотопно общему отображению* f', *такому что* $\Sigma^1(f') = S$, $\Sigma^{1,1}(f') = C$ *и* $\Sigma^{1,1,1}(f') = P$, *если и только если выполнены следующие условия*:

1) $[S] = w_1(M) + f^*w_1(N)$,

2) $[C] = w_2(M) + f^*w_1(N) \cdot [S] + f^*w_2(N)$,

3) *для каждой компоненты* $C' \subset C$ *мы имеем* $[C'] \cdot [S] \equiv |P \cap C'| \bmod 2$.

Последнее условие нужно, чтобы на $C \backslash P$ существовало поле характеристических векторов (образы которых будут направлены "наружу" сборок). Более точно, если это условие выполнено, то таких полей существует ровно два — и общее отображение f' строится для каждого из них. Доказательство теоремы 4 см. в [5, § 5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М.* Особенности дифференцируемых отображений. Т. 1. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. М.: Наука, 1982. 304 с.
2. *Boardman J.M.* Singularities of differentiable maps // IHES Publ. Math. 1967. V. 33. P. 21–57.
3. *Whitney H.* Tangents to an Analytic Variety // Ann. Math. 1965. V. 81. № 3. P. 496–549.
4. *Элиашберг Я.М.* Об особенностях типа складки // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1970. Т. 34. № 5. С. 1110–1126.
5. *Ryabichev A.* Maps of manifolds of the same dimension with prescribed Thom–Boardman singularities. https://arxiv.org/abs/1810.10990arXiv:1810.10990
6. *Ryabichev A.* Eliashberg's h-principle and generic maps of surfaces with prescribed singular locus // Topology and its Applications. 2020 V. 276. In press. https://doi.org/10.1016/j.topol.2020.107168

MAPS WITH PRESCRIBED BOARDMAN SINGULARITIES

A. D. Ryabichev[a]

[a] *National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V. A. Vasilyev

In this paper we extend Y. Eliashberg's theorem on the maps with fold type singularities to arbitrary Thom-Boardman singularities. Namely, we state a necessary and sufficient condition for a continuous map of smooth manifolds of the same dimension to be homotopic to a generic map with a prescribed Thom–Boardman singularity at each point. In dimensions 2 and 3 we rephrase these conditions in terms of the homology classes of the given singular loci and the characteristic classes of the manifolds.

Keywords: Thom–Boardman singularities, folds, cusps, h-principle