ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 492, с. 97–100

ИНФОРМАТИКА

УДК 517.956.35

О СУЩЕСТВОВАНИИ ГЛОБАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

© 2020 г. О. С. Розанова[1], Е. В. Чижонков[1,*]

Представлено академиком РАН Е.Е. Тыртышниковым 15.09.2019 г.
Поступило 15.09.2019 г.
После доработки 11.03.2020 г.
Принято к публикации 23.03.2020 г.

Рассматривается квазилинейная система гиперболических уравнений, описывающих плоские одномерные релятивистские колебания электронов в холодной плазме. Для некоторой упрощенной постановки получен критерий существования глобального по времени гладкого решения. Для исходной системы найдено достаточное условие потери гладкости решением, а также достаточное условие гладкости решения в течение нерелятивистского периода колебаний. Кроме того, показано, что сколь угодно малые возмущения тривиального решения за конечное время приводят к образованию особенностей. Результаты могут быть использованы для конструирования и обоснования численных алгоритмов при моделировании эффекта опрокидывания плазменных колебаний.

Ключевые слова: квазилинейные гиперболические уравнения, плазменные колебания, потеря гладкости, эффект опрокидывания

DOI: 10.31857/S2686954320030169

При математическом моделировании процессов в бесстолкновительной холодной плазме наиболее часто используются два подхода – Лагранжа и Эйлера: метод частиц, позволяющий отслеживать их индивидуальные траектории, и гидродинамическое описание на базе уравнений с частными производными (см., например, [1, 2]). В рамках обоих подходов давно и хорошо известен [3] эффект опрокидывания колебаний. В первом случае критерием опрокидывания является пересечение электронных траекторий, а во втором – обращение в бесконечность функции, описывающей плотность электронов. В монографии [4] имеется строгое физическое обоснование появления сингулярности плотности среды при пересечении траекторий частиц. В этом случае происходит формирование разрыва у решения, что требует принципиального изменения рабочей модели.

Описанная ситуация качественно отличается от моделирования в газовой динамике, где разрывные решения физически естественны. Следствием этой естественности является факт, что точное или приближенное решение классической задачи Римана (задачи Коши с кусочно постоянными начальными данными) является основой большинства современных алгоритмов численного решения для соответствующих постановок задач [5]. В задачах же, связанных с плазменными колебаниями, постановка классической задачи Римана не имеет никакого физического смысла, так как начальная разрывная функция электрического поля уже означает бесконечную концентрацию заряда в точках разрыва.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ПЛАЗМЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ

Будем считать ионы, в силу многократного превышения электронов по массе, неподвижными, тогда система уравнений, описывающих плоские одномерные релятивистские колебания электронов в холодной плазме, в безразмерной форме имеет следующий вид [6]:

$$\begin{gathered}\frac{\partial P}{\partial \theta} + V\frac{\partial P}{\partial \rho} + E = 0,\\ \frac{\partial E}{\partial \theta} + V\frac{\partial E}{\partial \rho} - V = 0, \quad V = \frac{P}{\sqrt{1+P^2}}.\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь ρ и θ – обезразмеренные координаты по пространству и времени соответственно. Переменные P и V описывают импульс и скорость электронов, E – электрическое поле. Подобные по смыслу постановки ранее рассматривались только в физической литературе (см., например, [7] и цитированную там литературу), где методы исследования и

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: chizhonk@mech.math.msu.su*

формулировки результатов существенно отличаются от наших. Рассмотрим в полуплоскости $\{(\rho,\theta)\colon \rho\in\mathbb{R},\ \theta>0\}$ задачу Коши для (1) с начальными условиями при $\theta=0$:

$$P(\rho,0)=P_0(\rho),\quad E(\rho,0)=E_0(\rho),\quad \rho\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Также можно рассмотреть уравнение (1) в упрощенном (нерелятивистском) приближении: в предположении малости скорости электронов V имеет место представление $P=V+\frac{V^3}{2}+O(V^5)$, $V\to 0$, поэтому, с точностью до кубически малых слагаемых можем считать, что $P=V$. Это предположение позволяет записать (1)

$$\frac{\partial V}{\partial\theta}+V\frac{\partial V}{\partial\rho}+E=0,\quad \frac{\partial E}{\partial\theta}+V\frac{\partial E}{\partial\rho}-V=0, \tag{3}$$

при этом начальные условия примут вид

$$V(\rho,0)=V_0(\rho),\quad E(\rho,0)=E_0(\rho),\quad \rho\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Системы (1) и (3) относятся к гиперболическому типу. Хорошо известно, что для таких систем существует локально по времени единственное решение задачи Коши того же класса, что и начальные данные, в нашем случае это C^1. Также известно, что для таких систем потеря решением гладкости происходит по одному из следующих сценариев: либо сами компоненты решения в течение конечного времени обращаются в бесконечность, либо они остаются ограниченными, но в бесконечность обращаются их производные [8]. Последняя возможность реализуется, например, для однородных законов сохранения, к которым относятся уравнения газовой динамики, где возникновение особенности соответствует образованию ударной волны.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Анализ нерелятивистской постановки основан на явном представлении характеристик решения:

Т е о р е м а 1. *Пусть начальные данные* (4) *принадлежат классу* $C^2(\mathbb{R})$. *Для существования и единственности непрерывно дифференцируемого по обеим переменным* 2π-*периодического по времени при всех* $\theta>0$ *решения* $V(\theta,\rho)$, $E(\theta,\rho)$ *задачи* (3), (4) *необходимо и достаточно*, *чтобы в каждой точке* $\rho\in\mathbb{R}$ *было выполнено неравенство*

$$(V_0'(\rho))^2+2E_0'(\rho)-1<0. \tag{5}$$

Если существует хотя бы одна точка ρ, *для которой выполняется неравенство*, *противоположное* (5), *то в течение конечного времени*, *не превышающего* 2π, *производные решения обращаются в бесконечность.*

Несложно проверить, что функции вида $V=W(\theta)\rho+W_0(\theta)$, $E=D(\theta)\rho+D_0(\theta)$ являются решениями уравнения (3) в случае, если $W(\theta)$ и $D(\theta)$ подчиняются продолженной системе для уравнений характеристик. Для полученных в [6] коэффициентов

$$W(\theta)=\frac{s\cos(\theta+\theta_0)}{1+s\sin(\theta+\theta_0)},\quad D(\theta)=\frac{s\sin(\theta+\theta_0)}{1+s\sin(\theta+\theta_0)},$$

где

$$s=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{1-\alpha},\quad \cos\theta_0=\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$
$$\sin\theta_0=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},\quad \alpha=D(0),\quad \beta=W(0),$$

свойство (5) выполнено, поэтому формулы применимы для решения обобщенной задачи Римана (с кусочно линейными начальными условиями (4)).

Рассмотрим систему (1). Определим из уравнений для ее характеристик величину

$$2\sqrt{1+P^2}+E^2=$$
$$=2\sqrt{1+P^2(\rho_0)}+E^2(\rho_0)=C_1(\rho_0)\ge 2$$

вдоль характеристики, стартующей из точки ρ_0. Отсюда следует, что само решение остается ограниченным, как и в предыдущем случае. Период $T(\rho_0)$ может быть вычислен как

$$\frac{T}{2}=\int\limits_{P_-}^{P_+}\frac{dP}{\sqrt{C_1-2\sqrt{1+P^2}}},\quad P_\pm=\pm\frac{\sqrt{C_1^2-4}}{2},$$

аргумент ρ_0 здесь и далее для краткости опускаем. Период стремится к 2π при $C_1\to 2$, но с ростом C_1 увеличивается. В отличие от нерелятивистского случая, когда вдоль каждой характеристики период одинаков и равен 2π, в релятивистском случае период на каждой характеристике свой, поэтому решение не обязано быть периодическим.

Свойства решения существенно зависят от выполнения для начальных данных условия

$$C_1(\rho_0)\ne\text{const}. \tag{I}$$

Т е о р е м а 2. *Пусть начальные данные* (2) *принадлежат классу* $C^2(\mathbb{R})$ *и* (I) *выполнено. Если существует хотя бы одна точка* ρ_0, *для которой выполняется неравенство*

$$K_-(P_0'(\rho_0))^2+2E_0'(\rho_0)-1\ge 0,$$
$$K_-=\frac{8}{\left(2\sqrt{1+P^2(\rho_0)}+E^2(\rho_0)\right)^3},$$

то производные решения задачи (1), (2) *в течение конечного времени, не превышающего период колебания* $T(\rho_0)$, *обращаются в бесконечность.*

Выполнение для всех ρ *условия*

$$(P_0'(\rho))^2 + 2E_0'(\rho) - 1 < 0$$

обеспечивает сохранение гладкости решения по крайней мере в течение одного периода** $T(\rho)$ **на каждой характеристике, т.е. до момента времени $t_* = \min\limits_{\rho\in\mathbb{R}} T(\rho)$, $t_* \geq 2\pi$.

Справедлива теорема, которая связывает проблему возникновения особенности задачи (1), (2) с теорией линейных уравнений с периодическими коэффициентами.

Теорема 3. *Пусть начальные данные* (2) *принадлежат классу* $C^2(\mathbb{R})$ *и* (I) *выполнено. Обозначим*

$$\frac{E_0'(\rho_0)}{P_0'(\rho_0)} = u_0, \ \frac{(1 - E_0'(\rho_0))}{P_0'(\rho_0)} = \lambda_0$$

в предположении, что $P_0'(\rho_0) \neq 0$. *Пусть* $z(\theta)$ *— решение задачи Коши для уравнения Хилла*

$$\frac{d^2z}{d\theta^2} + (1 + P(\theta))^{-3/2} z = 0,$$
$$z(0) = 1, \quad z'(0) = -u_0.$$

Если хотя бы для одной точки ρ_0 *существует момент времени* $\theta_* > 0$ *такой, что* $z'(\theta_*) = \lambda_0$, *то производные решения задачи* (1), (2) *в течение конечного времени обращаются в бесконечность.*

В противном случае решение остается гладким при всех $\theta > 0$.

Для использования теоремы 3 требуется явный вид P. Сделав предположение о малости колебаний, установим

Следствие. *При выполнении условия* (I) *у любого решения задачи Коши* (1), (2), *являющегося сколь угодно малым гладким отклонением от положения равновесия* $P = E = 0$, *производные решения в течение конечного времени обращаются в бесконечность.*

Если условие (I) не выполнено, в терминах начальных данных может быть получен критерий образования особенностей за конечное время и существуют решения типа бегущей с постоянной скоростью волны [9]. Такие решения могут быть сколь угодно малыми отклонениями от положения равновесия.

Наглядной иллюстрацией условия (I) является выбор начальных функций (2), имитирующих возмущения электрического поля, которые порождаются в плазме коротким мощным лазерным импульсом:

$$E_0(\rho) = \left(\frac{a_*}{\rho_*}\right)^2 \rho \exp\left\{-2\frac{\rho^2}{\rho_*^2}\right\}, \quad P_0(\rho) = 0.$$

За счет подбора параметров a_* и ρ_* с помощью численного моделирования можно получить сингулярность электронной плотности, т.е. градиентную катастрофу решения (1), в достаточно произвольный момент времени [6].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Отметим приложения полученных результатов. Теорема Гаусса [3, 7], связывающая плотность электронов с электрическим полем, в используемых обозначениях имеет вид

$$\frac{\partial E(\rho,\theta)}{\partial \rho} = 1 - N(\rho,\theta).$$

Из теоремы 1 и уравнений для характеристик системы (3) следует, что для глобального по времени решения условие (5) сохраняется, следовательно, для произвольного $\theta > 0$ справедлива оценка снизу для плотности электронов $N(\rho,\theta) > \frac{1}{2}$. В переменных Эйлера оценка получена впервые.

Условие (5) позволяет сформулировать обобщенную задачу Римана для уравнений (3), решение которой не будет обладать сингулярностью производных. Практическая польза от решения обобщенной задачи Римана состоит в конструировании схем типа Годунова второго порядка точности по времени и пространству для рассмотренных здесь задач Коши [5].

Наконец, из теорем 2 и 3 следует, что приближенные методы для задачи (1), (2) обязаны учитывать возможность эффекта опрокидывания колебаний в качестве завершения вычислений.

Суммируем вышесказанное: результаты настоящей работы имеют важное значение для развития теории вычислительных методов и практических расчетов задач о колебательных движениях холодной плазмы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Birdsall C.K., Langdon A.B.* Plasma physics via computer simulation. N.Y.: McGraw-Hill Inc., 1985. 504 p.
2. *Днестровский Ю.Н., Костомаров Д.П.* Математическое моделирование плазмы. М.: Наука, 1982. 320 с.
3. *Dawson J.M.* Nonlinear electron oscillations in a cold plasma // Phys. Review. 1959. V. 113. № 2. P. 383–387.
4. *Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д.* Элементы математической физики. М.: Наука, 1973. 351 с.
5. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. 2-е изд. М.: Физматлит, 2012. 656 с.
6. *Чижонков Е.В.* Математические аспекты моделирования колебаний и кильватерных волн в плазме. М.: Физматлит, 2018. 256 с.
7. *Davidson R.C.* Methods in nonlinear plasma theory. N.Y.: Academic Press, 1972. 376 p.

8. *Dafermos C.M.* Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics. The 4th Ed. B.; Heidelberg: Springer, 2016. 852 p.

9. *Ахиезер А.И., Половин Р.В.* К теории волновых движений электронной плазмы // ЖЭТФ. 1956. Т. 30. № 5. С. 915–928.

ON THE EXISTENCE OF GLOBAL SOLUTION OF A HYPERBOLIC PROBLEM

O. S. Rozanova[a] and E. V. Chizhonkov[a]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS E.E. Tyrtyshnikov

A quasilinear system of hyperbolic equations describing plane one-dimensional relativistic oscillations of electrons in a cold plasma is considered. For some simplified formulation, a criterion for the existence of a global in time smooth solution is obtained. For the original system, a sufficient condition for the singularity formation was found, as well as a sufficient condition for the smoothness of solution within the nonrelativistic period of oscillations. In addition, it is shown that arbitrarily small perturbations of the trivial solution lead to the formation of singularities in a finite time. The results can be used to construct and substantiate numerical algorithms in modeling the breaking of plasma oscillations.

Keywords: loss of smoothness, quasilinear hyperbolic equations, plasma oscillations, breaking effect