ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 492, с. 54–57

МАТЕМАТИКА

УДК 519.17

АНТИПОДАЛЬНЫЕ ГРАФЫ КРЕЙНА И БЛИЗКИЕ К НИМ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫЕ ГРАФЫ

 Член-корреспондент РАН А. А. Махнев[1,*]

Поступило 23.03.2020 г.
После доработки 23.03.2020 г.
Принято к публикации 26.03.2020 г.

Антиподальный недвудольный дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 имеет массив пересечений $\{k,(r-1)c_2, 1; 1, c_2, k\}$ $(c_2 < k-1)$ и собственные значения k, n, -1, $-m$, где n, $-m$ – корни квадратного уравнения $x^2 - (a_1 - c_2)x - k = 0$. Граница Крейна $q_{33}^3 \geq 0$ влечет $m \leq n^2$, если $r \neq 2$. В случае $m = n^2$, следуя Годсилу, назовем Γ антиподальным графом Крейна. Точечному графу Σ обобщенного четырехугольника $GQ(q, q^2)$, имеющего спред, отвечает антиподальный граф Крейна с $r = q + 1$. Если Σ имеет автоморфизм σ порядка f, фиксирующий каждую компоненту спреда, то граф $\bar{\Sigma} = \Sigma/\langle\sigma\rangle$, вершинами которого являются σ-орбиты на множестве точек, и две орбиты смежны, если некоторая вершина одной из них смежна с вершиной другой, является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{q^3, ((q+1)/f-1)(q^2-1)f, 1; 1, (q^2-1)f, q^3\}$, в котором окрестность Δ любой вершины является псевдогеометрическим графом для $pG_{f-1}(q-1, (q+1)(f-1))$. При $f = 2$ получим псевдогеометрический граф для $GQ(q-1, q+1)$. Отсюда следует, что локально псевдо $GQ(4, 6)$-граф с массивом пересечений $\{125, 96, 1; 1, 48, 125\}$ и локально псевдо $GQ(4, 8)$-граф с массивом пересечений $\{343, 288, 1; 1, 96, 343\}$ существуют.

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, антиподальный граф Крейна

DOI: 10.31857/S2686954320030133

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, т.е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется регулярным степени k, если степень любой вершины из Γ равна k. Граф Γ назовем реберно регулярным с параметрами (v, k, λ), если он содержит v вершин, регулярен степени k и каждое его ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ – вполне регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ), если он реберно регулярен с соответствующими параметрами, и $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин для любых двух вершин a, b, находящихся на расстоянии 2 в Γ. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется сильно регулярным графом. Максимальные клики графа называются прямыми. Разбиение реберно регулярного графа с параметрами (v, k, λ) кликами порядка $\lambda + 2$ называется спредом.

Система инцидентности с множеством точек P и множеством прямых L называется α-частичной геометрией порядка (s, t), если каждая прямая содержит ровно $s + 1$ точку, каждая точка лежит ровно на $t + 1$ прямой, любые две точки лежат не более чем на одной прямой, и для любого антифлага $(a, l) \in (P, L)$ найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекаюших l (обозначение $pG_\alpha(s, t)$). В случае $\alpha = 1$ геометрия называется обобщенным четырехугольником и обозначается $GQ(s, t)$. Точечный граф геометрии определяется на множестве точек P и две точки смежны,

[1] *Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург, Россия*
**E-mail: makhnev@imm.uran.ru*

если они лежат на прямой. Точечный граф геометрии $pG_\alpha(s, t)$ сильно регулярен с $v = (s+1)(1 + st/\alpha)$, $k = s(t+1)$, $\lambda = s - 1 + t(\alpha - 1)$, $\mu = \alpha(t+1)$. Сильно регулярный граф с такими параметрами для некоторых натуральных чисел α, s, t называется псевдогеометрическим графом для $pG_\alpha(s, t)$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, \ldots, d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Далее, через $p^l_{ij}(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются p^l_{ij} и называются числами пересечений графа Γ.

Если Γ – граф диаметра d, $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$, то граф Γ_i имеет то же самое множество вершин, что и Γ, и вершины u, w смежны в Γ_i, если $d_\Gamma(u, w) = i$.

Пусть Γ – антиподальный недвудольный дистанционно регулярный граф диаметра 3. Тогда Γ имеет массив пересечений $\{k, (r-1)c_2, 1; 1, c_2, k\}$ ($c_2 < k - 1$) и спектр k^1, n^f, -1^k, $-m^g$, где n, $-m$ – корни квадратного уравнения $x^2 - (a_1 - c_2)x - k = 0$, $f = m(r-1)(k+1)/(m+n)$, $g = n(r-1)(k+1)/(m+n)$. Если $r = 2$, то Γ называется графом Тейлора. Если $a_1 \neq c_2$, то числа m, n целые и параметры Γ можно выразить через r, m, n: $k = mn$, $c_2 = (m-1)(n+1)/r$, $a_1 = c_2 + n - m$. Условие целочисленности кратностей f, g дает делимость $(r-1)m(m^2-1)$ на $m + n$. Наконец, граница Крейна $q^3_{33} \geq 0$ влечет $m \leq n^2$, если $r \neq 2$ (см. [1, с. 431]). В случае $m = n^2$, следуя Годсилу, назовем Γ антиподальным графом Крейна. Годсил [2] доказал

П р е д л о ж е н и е 1. *Пусть Γ – антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра 3 с собственными значениями k, n, -1, $-m$. Если $m = n^2$, то выполняются следующие утверждения*:

1) *r делит $n+1$, $n-1$ делит a_1 и n^2-1 делит c_2;*

2) *для любой вершины $u \in \Gamma$ граф $\Delta = [u]$ сильно регулярен с собственными значениями $a_1 = k(\Delta) = (n-1)\left(\dfrac{(n+1)^2}{r-1}\right)$, $\eta_1 = n - \dfrac{(n+1)}{r}$ и $\eta_2 = n - \dfrac{(n+1)^2}{r}$.*

Напомним предложение 12.5.2 из [1].

П р е д л о ж е н и е 2. *Пусть Γ – точечный граф обобщенного четырехугольника $GQ(s,t)$, имеющего спред S. Удаляя из Γ ребра, лежащие на прямых из S, получим антиподальный граф с массивом пересечений*

$$\{st, s(t-1), 1; 1, t-1, st\}.$$

Из предложений 1, 2 следует, что точечному графу обобщенного четырехугольника $GQ(q, q^2)$, имеющего спред, отвечает антиподальный граф Крейна с $r = q + 1$.

Если точечный граф Σ для $GQ(q, q^2)$ имеет автоморфизм σ порядка f, фиксирующий каждую компоненту спреда, то граф $\bar{\Sigma} = \Sigma/\langle\sigma\rangle$, вершинами которого являются σ-орбиты на множестве точек, и две орбиты смежны, если некоторая вершина одной из них смежна с вершиной другой, является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{q^3, ((q+1)/f - 1)(q^2-1)f, 1; 1, (q^2-1)f, q^3\}$. Теперь из предложения 1 и леммы 6.1 [2] следует

Т е о р е м а 1. *Пусть q – степень простого числа и f – нетривиальный делитель $q + 1$. Тогда существует дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{q^3, ((q+1)/f - 1)(q^2-1)f, 1; 1, (q^2-1)f, q^3\}$, в котором окрестность Δ любой вершины является псевдогеометрическим графом для $pG_{f-1}(q-1, (q+1)(f-1))$. При $f = 2$ получим псевдогеометрический граф для $GQ(q-1, q+1)$, а при $f = 3$ получим псевдогеометрический граф для $pG_2(q-1, 2q+2)$.*

В случае $f = 4$ получим псевдогеометрический граф для $pG_3(q-1, 3q+3)$, 4 делит $q + 1$. Если $q - 4 \leq 5$, то $q = 7$ и существует граф Тейлора с массивом пересечений $\{7^3, 192, 1; 1, 192, 7^3\}$, в котором окрестности вершин являются псевдогеометрическими графами для $pG_3(6, 24)$ (см. следствие 2 из [3]).

В лемме 5.3 из [2] параметр $\lambda(\Delta)$ вычислен неверно. Ввиду теоремы 1 имеем $\lambda(\Delta) = q - 2 + (f-2)(f-1)(q+1)$. Интересно, что в случае $r = (q+1)/2$ (равносильно $f = 2$) параметр $\lambda(\Delta)$ из леммы 5.3 [2] совпадает с $q - 2 + (f-2)(f-1)(q+1)$ и Δ является псевдогеометрическим графом для $GQ(q-1, q+1)$.

Следствие 1. *Пусть q — степень нечетного простого числа. Тогда существует антиподальный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{q^3, (q-1)(q^2-1), 1; 1, 2(q^2-1), q^3\}$, *в котором окрестности вершин являются псевдогеометрическими графами для* $GQ(q-1, q+1)$.

Дистанционно регулярные графы, в которых окрестности вершин являются псевдогеометрическими графами для $GQ(q-1, q+1)$, классифицированы в [4] для $q = 3$, в [5] для $q = 4$, в [6] для $q = 5$ и в [7] для $q = 7$. Однако существование графов с массивами пересечений {125, 96, 1; 1; 48, 125} в [6] и {343, 288, 1; 1, 96, 343} в [7] (обнаруженное в следствии 1) оставалось неизвестным.

Пусть Γ — граф диаметра d и e — натуральное число. Подмножество C вершин графа Γ называется e-кодом, если минимальное расстояние между двумя вершинами из C не меньше $2e+1$. Для e-кода в дистанционно регулярном графе диаметра $d = 2e+1$ выполняется граница $|C| \le p^d_{dd} + 2$. В случае равенства код называется максимальным. Для максимального e-кода в дистанционно регулярном графе диаметра $d = 2e+1$ выполняется граница $c_d \ge a_d p^d_{dd}$. В случае равенства код называется локально регулярным. Наконец, для e-кода в дистанционно регулярном графе диаметра $d = 2e+1$ выполняется граница $|C| \le k_d \Big/ \sum_{i=0}^{e} p^d_{id} + 1$. В случае равенства код называется совершенным относительно последней окрестности.

Если дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 содержит максимальный 1-код, являющийся локально регулярным и совершенным относительно последней окрестности, то по предложению 5 из [8] Γ имеет массив пересечений $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$ или $\{a(p+1), (a+1)p, c; 1, c, ap\}$, где $a = a_3$, $c = c_2$, $p = p^3_{33}$.

В случае, когда Γ имеет массив пересечений $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$, граф Γ_3 является псевдогеометрическим для $GQ(p+1, a)$, а максимальному 1-коду отвечает овоид графа Γ. Если $a = c+1$, то граф Γ_2 является псевдогеометрическим для $pG_2(p+1, 2a)$, а Γ имеет массив пересечений $\{(c+1)(p+1), cp, c+2; 1, c, (c+1)p\}$. Существование дистанционно регулярных графов Γ диаметра 3, для которых графы Γ_2 и Γ_3 сильно регулярны, не известно.

Граф Γ является Q-полиномиальным, если $p^2 = 2(a+1)$ и Γ_3 — псевдогеометрический граф для $GQ(p+1, p^2/2-1)$. В случае $p = 4$ граф Γ_3 — псевдогеометрический для $GQ(5, 7)$ и Γ имеет массив пересечений {35, 24, 8; 1, 6, 28}. В случае $p = 6$ граф Γ_3 — псевдогеометрический для $GQ(7, 17)$ и Γ имеет массив пересечений {119, 96, 18; 1, 16, 102}. В указанной серии Q-полиномиальных графов по теореме 3 из [8] графов нет.

Юришич и Видали в [8] рассмотрели дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений $\{q^2-1, q(q-2), q+2; 1, q, (q-2)(q+1)\}$ ($c = q$, $p = q-2$). Этот граф имеет спектр $(q^2-1)^1$, $(2q-1)^{q(q^2-1)/6}$, $-1^{(q+1)(q^2+q-2)/2}$, $-(q+1)^{q(q-1)(q-2)/3}$, граф Γ_3 является псевдогеометрическим для $GQ(q-1, q+1)$ и $\bar{\Gamma}_2$ — псевдогеометрический граф для $pG_2(q-1, 2q+2)$.

Можно ли так модифицировать окрестности вершин в локальном графе из заключения следствия 1, что получится дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений $\{q^2-1, q(q-2), q+2; 1, q, (q-2)(q+1)\}$?

Гипотеза. *Пусть q — степень нечетного простого числа, $q > 5$. Тогда существует дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{q^2-1, q(q-2), q+2; 1, q, (q-2)(q+1)\}$.

Наименьший возможный граф имеет массив пересечений {48, 35, 9; 1, 7, 40}.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований — ГФЕН Китая (проект 20–51–53013).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.* Distance-Regular Graphs. B.; Heidelberg; N.Y.: Springer-Verlag, 1989.
2. *Godsil C.* // Australasian J. Comb. 1992. V. 6. P. 245–255.
3. *Гутнова А.К., Махнев А.А.* // ДАН. 2015. Т. 461. № 6. С. 629–632.
4. *Махнев А.А.* // Матем. сборник. 2000. Т. 191. № 7. С. 89–104.
5. *Гутнова А.К., Махнев А.А.* // ДАН. 2011. Т. 438. № 5. С. 595–598.
6. *Гутнова А.К., Махнев А.А.* // ДАН. 2015. Т. 462. № 6. С. 637–641.
7. *Гутнова А.К., Махнев А.А.* // Владик. матем. журнал. 2016. Т. 18. № 3. С. 35–42.
8. *Jurishich A., Vidali J.* // Des. Codes Cryptogr. 2012. V. 65. P. 29–47.

ANTIPODAL KREIN GRAPHS AND NEAR DISTANCE-REGULAR GRAPHS

Corresponfing Member of the RAS A. A. Makhnev[a]

[a] Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation

Antipodal distance-regular graph Γ of diameter 3 has intersection array $\{k, (r-1)c_2, 1; 1, c_2, k\}$ $(c_2 < k-1)$ and eigenvalues k, n, -1, $-m$, where n, $-m$ – roots of equation $x^2 - (a_1 - c_2)x - k = 0$. Krein bound $q_{33}^3 \geq 0$ gives $m \leq n^2$, if $r \neq 2$. In the case $m = n^2$ we call Γ antipodal Krein graph (Godsil). Point graph Σ of $GQ(q, q^2)$, having spread, gives antipodal Krein graph with $r = q+1$. If Σ has an automorphism σ of order f, fixed every component of spread then graph $\bar{\Sigma} = \Sigma/\langle\sigma\rangle$, with vertices as σ-orbits on point set, and two orbits are adjacent if some vertex of one orbit is adjacent to some vertex of other orbit, is distance-regular with intersection array $\{q^3, ((q+1)/f-1)(q^2-1)f, 1; 1, (q^2-1)f, q^3\}$, and every local subgraph $\Delta(u)$ is pseudo-geometric for $pG_{f-1}(q-1, (q+1)(f-1))$. If $f = 2$ then we have pseudo-geometric graph for $GQ(q-1, q+1)$. Hence locally pseudo $GQ(4, 6)$ graph with intersection array $\{125, 96, 1; 1, 48, 125\}$ and locally pseudo $GQ(6, 8)$ graph with intersection array $\{343, 288, 1; 1, 96, 343\}$ exist.

Keywords: distance-regular graph, antipodal Krein graph