ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 492, с. 104–107

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

МИНИМАКСНЫЕ СООТНОШЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ ВЕКТОРНОГО КРИТЕРИЯ

© 2020 г. Ю. А. Комаров[1,*], академик РАН А. Б. Куржанский[1,]**

Поступило 25.12.2019 г.
После доработки 06.04.2020 г.
Принято к публикации 06.04.2020 г.

Работа посвящена исследованию минимаксных соотношений для функционалов, принимающих значения в пространствах вещественнозначных векторов. В отличие от классических задач на минимакс с одномерным критерием, с повышением размерности некоторые привычные соотношения могут нарушаться, например, неравенство между минимаксом и максимином. Этот результат ведет к необходимости отыскания условий его справедливости или же нарушения. Вводятся определения векторных минимакса и максимина для многомерных критериев качества и получены необходимые и достаточные условия нарушения и выполнения аналога классического минимаксного неравенства для функционалов с сепарируемыми переменными, а также функционалов, билинейных по своим аргументам.

Ключевые слова: векторный минимакс, динамическое программирование, многокритериальная оптимизация, оптимальное управление, фронт Парето

DOI: 10.31857/S268695432003011X

Работа выполнена в рамках исследования задач управления динамическими системами с векторным критерием. Ранее в статьях [1, 2] был описан векторный гамильтонов формализм, позволяющий решать задачи оптимального управления с несколькими независимыми функционалами качества, приведенные здесь рассуждения затрагивают вопрос построения оценок для систем, содержащих ограниченную помеху в уравнении динамики и векторном критерии.

Исследование таких задач приводит к необходимости построения гарантированных оценок минимаксного типа. Для этого вводятся понятия векторных минимакса и максимина для векторного критерия и исследуются соотношения, связывающие эти понятия. Как будет показано далее, справедливое в одномерном случае неравенство между минимаксом и максимином при повышении размерности может нарушаться. Более того, подобный эффект является регулярным и может наблюдаться даже при исследовании функционалов самого простого вида.

В первой части работы вводятся основные используемые определения, в том числе понятия векторных минимума, максимума, минимакса и максимина. Вторая часть работы посвящена исследованию функционалов с сепарируемыми переменными, т.е. представимых в виде суммы двух векторных функционалов, зависящих от различных, быть может, векторзначных переменных. В заключительной части рассматриваются билинейные векторные функционалы в общем виде.

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: ykomarov94@gmail.com*
*** E-mail: kurzhans@mail.ru*

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Определим основные понятия, используемые в дальнейших рассуждениях. В качестве отношения порядка, используемого для сравнения векторов пространства $\mathbb{R}^p$, зафиксируем паретовский порядок.

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что вектор $z \in \mathbb{R}^p$ д о м и н и р у е т с я вектором $\hat{z} \in \mathbb{R}^p$ в смысле Парето, если они различны, а их компоненты связаны следующими неравенствами:

$$\hat{z}_i \leq z_i, \quad i = 1, \ldots, p.$$

Это соотношение будем обозначать $\hat{z} \leq z$.

О п р е д е л е н и е 2. Рассмотрим отображение $\mathbf{Z} : X \to \mathbb{R}^p$. В е к т о р н ы м минимумом множества его значений будем называть объединение всех недоминируемых по Парето точек его образа:

$$\mathbf{Min}\ \mathbf{Z}(X) = \{z_* \in \mathbf{Z}(X) \,\big|\, \text{не } \exists z \in \mathbf{Z}(X)\colon z \leq z_*\}.$$

Векторным максимумом $\mathbf{Z}(X)$ будем называть множество всех недоминирующих в смысле Парето значений:

$$\mathbf{Max}\ \mathbf{Z}(X) = \{z^* \in \mathbf{Z}(X) \,|\, \text{не } \exists z \in \mathbf{Z}(X)\colon z^* \le z\}.$$

Рассмотрим теперь отображение $\mathbf{F}\colon U \times V \to \to \mathbb{R}^p$. Будем предполагать, что все рассматриваемые далее векторные функционалы удовлетворяют следующим условиям регулярности:

1) $\mathbf{F}(U, v)$ замкнуты для всех $v \in V$;

2) $\mathbf{F}(u, V)$ замкнуты для всех $u \in U$;

3) существуют такие M_*, $M^* \in \mathbb{R}^p$, что $M_* \le \mathbf{F}(u, v) \le M^*$ сразу для всех $(u, v) \in U \times V$.

Эти условия гарантируют существование границы Парето для всех рассматриваемых далее образов. Отметим, что в отношении области определения $\mathbf{F}(u, v)$ никаких дополнительных предположений не производится, поскольку полученные результаты справедливы как для конечномерных U и V, так и для бесконечномерных.

Определение 3. Векторным минимаксом для значений $\mathbf{F}(u, v)$ на множестве $U \times V$ будем называть значение отображения

$$\mathbf{Min}_u\mathbf{Max}_v\mathbf{F}(u, v) = \mathbf{Min}\left(\bigcup_u \mathbf{Max}\ \mathbf{F}(u, V)\right).$$

Векторным максимином $\mathbf{F}(u, v)$ на $U \times V$ при этом будем называть, соответственно,

$$\mathbf{Max}_v\mathbf{Min}_u\mathbf{F}(u, v) = \mathbf{Max}\left\{\bigcup_v \mathbf{Min}\,\mathbf{F}(U, v)\right\}.$$

Таким образом, и векторный минимакс, и векторный максимин в общем случае представлены множествами. Поскольку дальнейшие рассуждения предполагают их сравнение, определим, в каком смысле мы будем понимать неравенство между двумя множествами.

Определение 4. Будем говорить, что множества $A, B \subset \mathbb{R}^p$ удовлетворяют неравенству $A \le B$, если

$$\forall b \in B \backslash A \Rightarrow \exists a \in A\colon a \le b.$$

Определение 5. Используя введенную нотацию, будем называть соотношение

$$\mathbf{Max}_v\mathbf{Min}_u\mathbf{F}(u, v) \le \mathbf{Min}_u\mathbf{Max}_v\mathbf{F}(u, v) \qquad (1)$$

основным минимаксным неравенством для паретовского порядка, под обратным же минимаксным неравенством будем понимать

$$\mathbf{Min}_u\mathbf{Max}_v\mathbf{F}(u, v) \le \mathbf{Max}_v\mathbf{Min}_u\mathbf{F}(u, v). \qquad (2)$$

При повышении размерности значений функционала происходит качественное изменение соотношений между минимаксом и максимином, и, в отличие от одномерного случая, обратное минимаксное неравенство не только достижимо, но и, вообще говоря, является регулярным случаем. Далее будут рассмотрены два различных векторных функционала в общем виде и для каждого из них будут приведены необходимые условия выполнения неравенств (1) и (2).

ФУНКЦИОНАЛ С СЕПАРИРУЕМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Рассмотрим функционал вида $\mathbf{S}(u, v) = \mathbf{\Phi}(u) + \mathbf{\Psi}(v)$. Покажем, что для таких функционалов либо векторные минимакс и максимин равны, либо выполняется обратное минимаксное неравенство (2). Действительно, воспользовавшись определением и леммой о внесении одного векторного минимума внутрь другого (подробнее см. [2]), получаем:

$$\begin{aligned}&\mathbf{Min}_u\mathbf{Max}_v\mathbf{S}(u, v) = \\ &= \mathbf{Min}\left\{\mathbf{\Phi}(\tilde{u}) + \mathbf{Max}\ \mathbf{\Psi}(V) \,\middle|\, \tilde{u} \in U\right\} = \\ &= \mathbf{Min}\left\{\mathbf{Min}\ \mathbf{\Phi}(U) + \mathbf{Max}\ \mathbf{\Psi}(V)\right\}.\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}&\mathbf{Max}_v\mathbf{Min}_u\mathbf{S}(u, v) = \\ &= \mathbf{Max}\left\{\mathbf{Min}\ \mathbf{\Phi}(U) + \mathbf{Max}\ \mathbf{\Psi}(V)\right\}.\end{aligned}$$

Таким образом, в предположении, что векторный минимакс и векторный максимин для $\mathbf{F}(u, v)$ существуют, получаем, что для функционалов указанного вида всегда выполняется обратное минимаксное неравенство (2).

При этом равенство достигается в тех случаях, когда множество

$$\mathbf{Min}\ \mathbf{\Phi}(U) + \mathbf{Max}\ \mathbf{\Psi}(V)$$

совпадает со своими векторным максимумом и минимумом. Это свойство может выполняться в том случае, если хотя бы одно из множеств $\mathbf{Min}\mathbf{\Phi}(U)$ и $\mathbf{Max}\mathbf{\Psi}(V)$ состоит из единственного элемента. Кроме того, в случае, когда оба слагаемых лежат в одной гиперплоскости, также достигается равенство.

Таким образом, обратное минимаксное неравенство (2) выполняется для достаточно широкого класса векторных функционалов; основное же неравенство (1) для них является достижимым только в случае равенства между соответствующими векторными минимаксом и максимином.

БИЛИНЕЙНЫЙ ВЕКТОРНЫЙ ФУНКЦИОНАЛ

Рассмотрим функционал вида

$$\mathbf{B}(u, v) = \begin{bmatrix}\langle u, A_1 v\rangle \\ \vdots \\ \langle u, A_p v\rangle\end{bmatrix},$$

где под $\langle x, y\rangle$ понимается скалярное произведение элементов x и y, A_i – вещественные матрицы. При этом предполагается, что $\langle u, A_i v\rangle$ определены для всех $u \in U$, $v \in V$, $i = 1, \ldots, p$.

В случае, когда $V \subset \mathbb{R}$ (или же $U \subset \mathbb{R}$), для векторных функционалов указанного вида всегда выполняется равенство между минимаксом и максимином. В случае же, когда ни одна из компонент не является одномерной, необходимо дополнительное исследование.

Для того чтобы определить условия, при которых для билинейного функционала $\mathbf{B}(u,v)$ будет выполняться основное минимаксное неравенство, сформулируем требования, необходимые для его нарушения, и потребуем, чтобы они никогда не выполнялись.

П р е д л о ж е н и е 1. *Пусть для векторного функционала* $\mathbf{F}(u,v)$: $U \times V \to \mathbb{R}^p$, *удовлетворяющего описанным ранее условиям регулярности, существуют такие точки* $f^* = \mathbf{F}(u^*, v^*) \in \mathbf{Min}_u\mathbf{Max}_v\mathbf{F}(u,v)$ *и* $f_* = \mathbf{F}(u_*, v_*) \in \mathbf{Max}_v\mathbf{Min}_u\mathbf{F}(u,v)$, *для которых нарушается основное минимаксное неравенство* (1):

$$f^* \leq f_*.$$

Тогда точка $\hat{f} = \mathbf{F}(u^*, v_*)$ *не сравнима (по порядку) ни с* f^*, *ни с* f_*.

З а м е ч а н и е 1. Последнее утверждение справедливо не только для порядка Парето. В случае же, когда в пространстве $\mathbb{R}^p$ значений функционала рассматривается паретовский порядок, можно получить более явный вид условия нарушения основного минимаксного неравенства.

С л е д с т в и е 1. *Пусть выполнены условия предложения* 1. *Тогда существуют* $i \neq j$, $k \neq l$, *где* $i, j, k, l = 1, \ldots, p$, *такие, что*

$$(F_i(u^*, v^*) - F_i(u^*, v_*))(F_j(u^*, v^*) - F_j(u^*, v_*)) < 0,$$
$$(F_k(u_*, v_*) - F_k(u^*, v_*))(F_l(u_*, v_*) - F_l(u^*, v_*)) < 0.$$

Используя этот результат, а также критерий Сильвестра для полуопределенных матриц (подробнее см. [4]), можно сформулировать следующее достаточное условие выполнения основного минимаксного неравенства для произвольного билинейного функционала $\mathbf{B}(u,v)$.

П р е д л о ж е н и е 2. *Пусть для всех* $i, j = 1, \ldots, p$ *все угловые миноры порядка* $k \leq 2$ *матриц*

$$B_{ij} = A_i v v' A_j' + A_j v v' A_i'$$

неотрицательно определены сразу для всех $v \in V - V$. *Тогда для билинейного функционала* $\mathbf{B}(u,v)$ *выполняется основное минимаксное неравенство* (1).

Если выписать диагональные элементы матриц B_{ij} в явном виде, можно получить следующее утверждение, позволяющее сделать предположение о том, выполнены ли условия утверждения.

С л е д с т в и е 2. *Пусть выполнены условия предложения* 2. *Тогда для всех* $i, j = 1, \ldots, p$ *компоненты матриц* A_i, A_j *удовлетворяют следующему условию*:

$$[A_i]_{kl}[A_j]_{kl} \geq 0,$$

где под $[A_i]_{kl}$ *понимается элемент матрицы* A_i, *расположенный в* k*-й строке и* l*-м столбце*.

Кроме того, воспользовавшись утверждением следствия 1, можно получить достаточное условие нарушения основного минимаксного неравенства для частного случая векторного функционала, состоящего лишь из двух критериев.

С л е д с т в и е 3. *Пусть* $\mathbf{B}(u,v) \in \mathbb{R}^2$ *и для всех* $u \in U - U$, $v \in V - V$ *верно*

$$A_1 u u' A_2' < 0,$$
$$A_1 v v' A_2' < 0.$$

Тогда для векторного функционала $\mathbf{B}(u,v)$ *выполнено обратное минимаксное неравенство* (2).

Таким образом, для случая $p = 2$ получено как необходимое, так и достаточное условия нарушения основного минимаксного неравенства.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе проделанной работы были введены понятия векторных минимакса и максимина для функционалов, принимающих значения в многомерных пространствах вещественных чисел. Были сформулированы основное и обратное минимаксные неравенства, связывающие эти понятия.

На примере векторного функционала с сепарируемыми переменными продемонстрировано, что обратное минимаксное неравенство может выполняться в том числе для целых классов критериев качества.

Получено необходимое условие нарушения основного минимаксного неравенства, а также исследованы необходимые и достаточные условия его выполнения для билинейных векторных функционалов.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов 16–29–04191 офи_м и 19–01–00613а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Комаров Ю.А., Куржанский А.Б.* Гамильтонов формализм для задачи управления движением с векторным критерием // ДАН. 2018. Т. 480. № 4. С. 408–412. https://doi.org/10.7868/S0869565218160053
2. *Комаров Ю.А.* Гамильтонов формализм для задачи оптимизации управляемого движения по векторному критерию // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 11. С. 1499–1509. https://doi.org/10.1134/S0374064119110062
3. *Sawaragi Y., Nakayama H., Tanino T.* Multiobjective Optimization. L.: Academic Press, 1985. 296 p.
4. *Horn R.A., Johnson C.R.* Matrix analysis. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. 562 p.

MINMAX-MAXMIN RELATIONS FOR THE PROBLEM OF VECTOR-VALUED CRITERIA OPTIMIZATION

Yu. A. Komarov[a] and Academician of the RAS A. B. Kurzhanski[a]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

This paper describes a research of minmax-maxmin relations for vector-valued functionals over the real field. The increase in dimentionality of criteria may result in violation of the very basic relations, for example, an inequality between maxmin and minmax that is always true for the classic problems. Thus, one needs to state the conditions for its correctness or violation. This paper introduces the definitions of set-valued minmax and maxmin for multidimentional criteria and an analogue on classic minmax inequality. Necessary and sufficient conditions for its correctness and violation are described for two particular types of vector-valued functionals: bilinear ones and ones with the separated variables.

Keywords: set-valued minmax, dynamic programming, multicriteria optimization, optimal control, Pareto front