ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 492, с. 38–42

МАТЕМАТИКА

УДК 517.518.182+517.518.114+514.7

ПРОСТРАНСТВЕННОПОДОБИЕ КЛАССОВ ПОВЕРХНОСТЕЙ УРОВНЯ НА ГРУППАХ КАРНО И ИХ МЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

 М. Б. Карманова[1,*]

Представлено академиком РАН Ю.Г. Решетняком 20.02.2020 г.
Поступило 20.02.2020 г.
После доработки 20.02.2020 г.
Принято к публикации 10.04.2020 г.

Мы исследуем вектор-функции класса C^1, определенные на группах Карно произвольной глубины, устанавливаем условие пространственноподобия поверхностей уровня и описываем их метрические свойства с точки зрения сублоренцевой геометрии. Мы выводим формулу коплощади как выражение меры подмножества группы Карно через сублоренцевы меры его пересечения со множествами уровня вектор-функции.

Ключевые слова: группа Карно, сублоренцева структура, вектор-функция, множество уровня, сублоренцева мера, формула коплощади

DOI: 10.31857/S2686954320030108

Известно, что формула коплощади является криволинейным аналогом теоремы Фубини, согласно которой меру множества можно вычислить через меры пересечения этого множества с плоскостями меньшей размерности. В классическом анализе формула коплощади активно применяется для решения задач о свойствах экстремальных поверхностей, в теории потоков, алгебраической геометрии, геометрической теории меры и др. В недавней работе [1] она была впервые установлена для базового случая, когда мера подмножества группы Карно глубины два выражалась (с учетом коэффициента коплощади) через сублоренцевы меры его пересечения со множествами уровня C^1-гладкой функции. Кроме того, в [1] установлено условие пространственноподобия поверхностей уровня в терминах горизонтального градиента. В настоящей работе рассмотрены вектор-функции, определенные на группах Карно произвольной глубины и принимающие значения в $\mathbb{R}^{\tilde{n}}$, $\tilde{n} \geq 1$. Кроме того, при рассмотрении множеств уровня сублоренцева структура вводится в многомерном виде: если субриманов дифференциал отображения невырожден на $\tilde{n}$ горизонтальных полях, то квадрат длины вдоль n^- из них отрицателен, где $1 \leq n^- \leq \tilde{n}$. В связи с усложнением структуры прообраза и образа потребовалось установить некоторые новые свойства субриманова дифференциала отображения, кроме того, при $n^- > 1$ обнаружена новая характеристика, не возникающая в базовом случае. Напомним, что сублоренцевы структуры являются неголономным обобщением геометрии Минковского (см., например, [2]), они и их приложения в физике стали исследоваться недавно [3–6]. Вопрос о формуле коплощади данного типа на таких структурах до настоящего времени оставался открытым.

Приведем необходимые определения.

Определение 1 (см., например, [7]). *Группой Карно* называется связная односвязная стратифицированная группа Ли $\mathbb{G}$, алгебра Ли V которой градуирована, т. е., представляется в виде $V = \bigoplus\limits_{k=1}^{M} V_k$, $[V_1, V_k] = V_{k+1}$, $k = 1, \ldots, M-1$, $[V_1, V_M] = \{0\}$. Если базисное поле X_l принадлежит V_k, то его *степень* $\deg X_l$ равна k, $l = 1, \ldots, N$, $k = 1, \ldots, M$. Число M называется *глубиной* группы $\mathbb{G}$.

Обозначение 1. Обозначим топологическую размерность группы $\mathbb{G}$ символом N, а базисные векторные поля – $X_1, \ldots, X_N$.

Групповая операция определяется формулой Бейкера–Кэмпбелла–Хаусдорфа.

Опишем субриманов аналог расстояния между точками.

[1] *Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия*
**E-mail: maryka@math.nsc.ru*

Определение 2 (см. также [8]). Пусть

$$w = \exp\left(\sum_{i=1}^{N} w_i X_i\right)(v),\ v, w \in \mathbb{G}.$$

Зададим величину $d_2(v, w)$ следующим образом:

$$d_2(v, w) = \max_{k=1,\dots,M} \left\{ \left(\sum_{j:\deg X_j = k} w_j^2 \right)^{\frac{1}{2k}} \right\}.$$

Множество $\{w \in \mathbb{G}: d_2(v, w) < r\}$ называется шаром относительно d_2 радиуса $r > 0$ с центром в точке v и обозначается символом $\mathrm{Box}_2(v, r)$.

Хаусдорфова размерность $\mathbb{G}$ относительно d_2 равна $\sum_{k=1}^{M} k \dim V_k$, и обозначается символом ν.

Определение 3. Значение субримановой меры для $A \subset \mathbb{G}$ равно

$$\mathcal{H}^{\nu}(A) = \omega_N \cdot \lim_{\delta \to 0} \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} r_i^{\nu} : \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{Box}_2(x_i, r_i) \supset A, x_i \in A, r_i < \delta \right\},$$

где точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества A.

Определение 4 ([9, 10]). Отображение $\varphi: U \to \tilde{\mathbb{G}}$, $U \subset \mathbb{G}$, где $\mathbb{G}$ и $\tilde{\mathbb{G}}$ – произвольные группы Карно, *hc*-дифференцируемо в точке $x \in U$, если существует горизонтальный гомоморфизм $\mathcal{L}_x: \mathbb{G} \to \tilde{\mathbb{G}}$ такой, что

$$d_2(\varphi(w), \mathcal{L}_x\langle w \rangle) = o(d_2(x, w)),\ U \ni w \to x.$$

Теорема 1 [9, 10]. *Если φ – вектор-функция класса C^1, определенная на группе Карно, то она непрерывно hc-дифференцируема всюду. Ее hc-дифференциал $D_H\varphi$ равен* $(X_1\varphi, \dots, X_{\dim V_1}\varphi, 0, \dots, 0)$.

Предположение 1. Будем рассматривать отображение $\varphi: \Omega \to \mathbb{R}^{\tilde{n}}$ класса C^1, где $\Omega \subset \mathbb{G}$ – открытое множество, $\tilde{n} < \dim V_1$, и $\mathrm{rank} D_H\varphi(x) = \tilde{n}$ в каждой точке x.

Для описания сублоренцевой структуры на $\mathbb{G}$ введем квадрат сублоренцева расстояния между точками. Так как для определения меры нам нужна система шаров, то определять само расстояние нет необходимости.

Определение 5 (см. общий случай в [11]). Пусть $w = \exp\left(\sum_{i=1}^{N} w_i X_i\right)(v)$, $v, w \in \mathbb{G}$. Пусть еще $n^- \in [1, \tilde{n}]$. Зададим величину $\mathfrak{d}_2^2(v, w)$ следующим образом:

$$\mathfrak{d}_2^2(v, w) = \max\left\{ \sum_{j=n^-+1}^{\dim V_1} w_j^2 - \sum_{j=1}^{n^-} w_j^2, \left(\sum_{j:\deg X_j = 2} w_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \dots, \left(\sum_{j:\deg X_j = M} w_j^2 \right)^{\frac{1}{M}} \right\}.$$

Множество $\{w \in \mathbb{G}: \mathfrak{d}_2^2(v, w) < r^2\}$ называется шаром относительно $\mathfrak{d}_2^2$ радиуса $r > 0$ с центром в точке v и обозначается символом $\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(v, r)$.

Квадрат сублоренцевой длины вектора $\sum_{i=1}^{N} w_i X_i(x)$, $x \in \mathbb{G}$, определяется аналогично.

Определение 6 [2]. Если квадрат длины вектора положителен, то он называется пространственноподобным, если отрицателен, то времениподобным, а если нулевой, то светоподобным. Если все касательные векторы поверхности пространственноподобны, то такая поверхность называется пространственноподобной.

Следующее понятие обобщает соответствующее классическое.

Определение 7 [11]. Пусть $v \in \mathbb{G}$. Множество

$$\left\{ \exp\left(\sum_{j=1}^{N} w_j X_j \right)(v) : \sum_{j=1}^{n^-} w_j^2 = \sum_{j=n^-+1}^{\dim V_1} w_j^2 \left(\sum_{j:\deg X_j = 2} w_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \dots, \left(\sum_{j:\deg X_j = M} w_j^2 \right)^{\frac{1}{M}} \right\}$$

называется световым конусом с центром в точке v.

Заметим, что для C^1-гладких поверхностей S классическое понятие пространственноподобия можно заменить на следующее свойство: если $v \in S$, то эта поверхность локально лежит вне светового конуса с центром в этой точке, за исключением v. Чтобы корректно ввести понятие сублоренцевой меры Хаусдорфа на множествах уровня вектор-функции φ с выбранной системой шаров, нужно, чтобы пересечение шара с поверхностью было ограниченным, а пространственноподобие поверхности гарантирует это свойство. С учетом результата, аналогичного [12, свойство 2.17], для корректной постановки задачи о формуле коплощади вектор-функция φ должна удовлетворять следующим требованиям.

Предположение 2. Будем изучать отображения $\varphi: \Omega \to \mathbb{R}^{\tilde{n}}$ класса C^1, где $\Omega \subset \mathbb{G}$ – открытое множество, такие, что всюду на Ω длины строк $(D_H^{\tilde{n}}\varphi)^{-1}(D_H \setminus D_H^{\tilde{n}}\varphi)$ не превосходят $\frac{1}{\tilde{n}} - c$, $c > 0$. Здесь

$D_H^{\tilde n}\varphi(x)$ – часть матрицы $D_H\varphi(x)$, состоящая из первых $\tilde n$ столбцов, $x \in \Omega$. В этом предположении нам важно, чтобы $D_H^{\tilde n}\varphi(x)$ содержала n^- столбцов, соответствующих отрицательному квадрату расстояния.

Из [12] вытекает

$$\det(D_H^{\tilde n}\varphi(D_H^{\tilde n}\varphi)^* - \\ - (D_H \setminus D_H^{\tilde n}\varphi)(D_H \setminus D_H^{\tilde n}\varphi)^*) \geq \hat c,\ \hat c > 0.$$

О п р е д е л е н и е 8. Фиксируем $x \in \mathbb{G}$. Отображение $\theta_x\colon (w_1, \ldots, w_N) \mapsto \exp\left(\sum_{j=1}^{N} w_j X_j\right)(x)$, где $(w_1, \ldots, w_N) \in \mathbb{R}^N$, называется *к о о р д и н а т а м и п е р в о г о р о д а о т н о с и т е л ь н о* x.

С помощью перехода в координаты первого рода относительно x и применений рассуждений, аналогичных использованным при доказательстве [12, Свойство 2.17, Теорема 2.25] и [1], выводим следующее утверждение.

Т е о р е м а 2. *Поверхности уровня вектор-функции* φ, *удовлетворяющей условиям предположений* 1 *и* 2, *пространственноподобны.*

Введем понятие сублоренцевой меры для подмножеств поверхностей уровня.

О п р е д е л е н и е 9. Пусть $z \in \mathbb{R}^{\tilde n}$. Значение сублоренцевой меры для $A \subset \varphi^{-1}(z)$ равно

$$\mathcal{H}_{\mathfrak{d}}^{\nu-\tilde n}(A) = \omega_{\dim V_1 - \tilde n}\prod_{k=2}^{M}\omega_{\dim V_k} \times \\ \times \liminf_{\delta\to 0}\left\{\sum_{i\in\mathbb{N}} r_i^{\nu-\tilde n} \colon \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(x_i, r_i) \supset A, x_i \in A, r_i < \delta\right\},$$

где точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества A.

Ключевым вопросом при выводе сублоренцевой формулы коплощади является анализ метрических свойств множеств уровня. Опишем основные идеи и специфику доказательства. Фиксируем точку x, проходящее через нее множество уровня $\varphi^{-1}(\varphi(x))$ и сублоренцев шар $\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(x, r)$ с центром в этой точке, и вычислим $\mathcal{H}^{N-\tilde n}$-меру пересечения шара и множества. Из результатов [13], а также [12], следует, что она с точностью до множителя $1 + o(1)$ выражается через меру пересечения касательной плоскости и шара, которая равна

$$\mathcal{H}^{N-\tilde n}(\ker D_H\varphi(x) \cap \mathrm{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(x, r)) \times \\ \times \frac{\det(D\varphi(x)D\varphi(x)^*)^{1/2}}{\det(D_H\varphi(x)D_H\varphi(x)^*)^{1/2}} \cdot (1 + o(1)),$$

где $o(1) \to 0$ при $r \to 0$. Из непосредственных вычислений вытекает, что

$$\det(D_H\varphi(x)D_H\varphi(x)^*) = \det(D_H^{\tilde n}\varphi(x)D_H^{\tilde n}\varphi(x)^*) + \\ + \det((D_H \setminus D_H^{\tilde n}\varphi(x))(D_H \setminus D_H^{\tilde n}\varphi(x))^*),$$

где $(D_H \setminus D_H^{\tilde n}\varphi(x))$ – матрица, состоящая из $\dim V_1 - \tilde n$ столбцов, начиная с $(\tilde n + 1)$-го. В силу предположения 2, по теореме о неявной функции для $\sum_{j=1}^{\dim V_1} w_j X_j(x) \in \ker D_H\varphi(x)$ имеем

$$(w_1, \ldots, w_{\tilde n})^T = \\ = (D_H^{\tilde n}\varphi(x))^{-1}(D_H \setminus D_H^{\tilde n}\varphi(x))(w_{\tilde n+1}, \ldots, w_N)^T.$$

Из результатов для пересечений отображений-графиков с сублоренцевыми шарами (см., например, [12]) следует, что

$$\mathcal{H}^{N-\tilde n}(\ker D_H\varphi(x) \cap \mathrm{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(x, r)) = \\ = \frac{\det(E_{\dim V_1-\tilde n} + (D_H \setminus D_H^{\tilde n}\varphi(x))^*((D_H^{\tilde n}\varphi(x))^{-1})^*(D_H^{\tilde n}\varphi(x))^{-1}(D_H \setminus D_H^{\tilde n}\varphi(x)))^{1/2}}{\det(E_{\dim V_1-\tilde n} + (D_H \setminus D_H^{\tilde n}\varphi(x))^*((D_H^{\tilde n}\varphi(x))^{-1})^*(D_H^{SL}\varphi(x))^{-1}(D_H \setminus D_H^{\tilde n}\varphi(x)))^{1/2}} \times \\ \times \omega_{\dim V_1-\tilde n}\prod_{k=2}^{M}\omega_{\dim V_k} r^{\nu-\tilde n}|g|_{\ker D_H\varphi(x)}(x)|(1 + o(1)), \tag{1}$$

где g – риманов тензор, и $o(1) \to 0$ при $r \to 0$, а матрица $(D_H^{SL}\varphi(x))^{-1}$ равна $E_{n^-}^- \cdot (D_H^{\tilde n}\varphi(x))^{-1}$, где E_n^- – диагональная матрица, первые n элементов которой равны -1, а остальные равны $+1$, $n \in [0, \tilde n]$. Остается сравнить определители матриц вида $E_p + B^*A^*\hat A B$ и $E_q + \hat A B B^* A^*$, где $p = \dim V_1 - \tilde n$ и $q = \tilde n$ – размерности единичных матриц, а $\hat A = E_n^- A$. Пусть $p > q$. Тогда для B^*A^* существует ортогональная матрица O такая, что OB^*A^* представимо, как объединение матрицы ранга $q' \leq q$ и $p - q'$ строк, состоящих из нулей. Кроме того, существует ортогональная матрица O' такая, что только первые q' строк OB^*A^*O' ненулевые. Заметим, что $\hat A B O^*$ совпадает с объединением матрицы ранга q'

и столбцов, состоящих из нулей. Следовательно, полагая под знаком эквивалентности ~ равенство определителей, получаем $E_p + B^*A^*\hat{A}B \sim E_p + OB^*A^*O'(O')^*\hat{A}BO^*$, где последняя – диагональная матрица, состоящая из блока вида $E_{q'} + A_1A_2$ размерности q' и единичного, а $E_q + \hat{A}BB^*A^* \sim E_q + (O')^*\hat{A}BO^*OB^*A^*O'$, где последняя – блочно-нижнетреугольная квадратная матрица, диагональный блок размерности q' которого совпадает с $E_{q'} + A_2A_1$, а второй диагональный блок также единичный. Здесь A_1 и A_2 – матрицы размерности q', причем A_1 обратима. Так как

$$\det(E_{q'} + A_1A_2) = \det(A_1)\det(A_1^{-1} + A_2) = \\ = \det(A_1^{-1} + A_2)\det(A_1) = \det(E_{q'} + A_2A_1),$$

можем заменить основной множитель в правой части (1) на величину

$$\frac{\det(E_{\tilde n} + (D_H^{\tilde n}\varphi(x))^{-1}(D_H\setminus D_H^{\tilde n}\varphi(x))(D_H\setminus D_H^{\tilde n}\varphi(x))^*((D_H^{\tilde n}\varphi(x))^{-1})^*)^{1/2}}{\det(E_{\tilde n} + (D_H^{SL}\varphi(x))^{-1}(D_H\setminus D_H^{\tilde n}\varphi(x))(D_H\setminus D_H^{\tilde n}\varphi(x))^*((D_H^{\tilde n}\varphi(x))^{-1})^*)^{1/2}}. \quad (2)$$

Домножая числитель и знаменатель на $(\det(D_H^{\tilde n}\varphi(x)(D_H^{\tilde n}\varphi(x))^*))^{1/2}$, выводим равенство (2) соотношению

$$\frac{\det(D_H\varphi(x)D_H\varphi(x)^*)^{1/2}}{\det(D_H^{\tilde n}\varphi(x)D_H^{\tilde n}\varphi(x)^* + (D_H^{\tilde n}\varphi(x))E_{n^-}^-(D_H^{\tilde n}\varphi(x))^{-1}(D_H\setminus D_H^{\tilde n}\varphi(x))(D_H\setminus D_H^{\tilde n}\varphi(x))^*)^{1/2}},$$

и поэтому

$$\mathcal{H}^{N-\tilde n}(\varphi^{-1}(\varphi(x)) \cap \mathrm{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(x,r)) = \\ = \frac{\det(D\varphi(x)D\varphi(x)^*)^{1/2}}{\det(D_H^{\tilde n}\varphi(x)D_H^{\tilde n}\varphi(x)^* + (D_H^{\tilde n}\varphi(x))E_{n^-}^-(D_H^{\tilde n}\varphi(x))^{-1}(D_H\setminus D_H^{\tilde n}\varphi(x))(D_H\setminus D_H^{\tilde n}\varphi(x))^*)^{1/2}} \times \\ \times \omega_{\dim V_1 - \tilde n}\prod_{k=2}^{M}\omega_{\dim V_k} r^{\nu-\tilde n}|g|_{\ker D\varphi(x)}(x)|(1 + o(1)),$$

где $o(1) \to 0$ при $r \to 0$ равномерно по точкам из окрестности $x \in \Omega$.

Т е о р е м а 3. *Для отображения* $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^{\tilde n})$, *определенного на открытом множестве* $\Omega \subset \mathbb{G}$ *группы Карно* $\mathbb{G}$ *такого, что всюду на* Ω *длины строк* $(D_H^{\tilde n}\varphi)^{-1}(D_H\setminus D_H^{\tilde n}\varphi)$ *не превосходят* $\frac{1}{\tilde n} - c$, $c > 0$, *справедлива формула коплощади*

$$\int_\Omega \det(D_H^{\tilde n}\varphi(D_H^{\tilde n}\varphi)^* + (D_H^{\tilde n}\varphi)E_{n^-}^-(D_H^{\tilde n}\varphi)^{-1} \times \\ \times (D_H\setminus D_H^{\tilde n}\varphi)(D_H\setminus D_H^{\tilde n}\varphi)^*)^{1/2} d\mathcal{H}^\nu = \\ = \int_{\mathbb{R}^{\tilde n}} d\mathcal{H}^{\tilde n}(z) \int_{\varphi^{-1}(z)} d\mathcal{H}_{\mathfrak{d}}^{\nu-\tilde n}(y).$$

С л е д с т в и е 1. *Если* $n^- = \tilde n$, *то формула коплощади имеет вид*

$$\int_\Omega \det(D_H^{\tilde n}\varphi(D_H^{\tilde n}\varphi)^* - (D_H\setminus D_H^{\tilde n}\varphi)(D_H\setminus D_H^{\tilde n}\varphi)^*)^{1/2} d\mathcal{H}^\nu = \\ = \int_{R^{\tilde n}} d\mathcal{H}^{\tilde n}(z) \int_{\varphi^{-1}(z)} d\mathcal{H}_{\mathfrak{d}}^{\nu-\tilde n}(y).$$

С л е д с т в и е 2. *Утверждения теоремы* 3 *и следствия* 1 *справедливы и для вектор-функций, определенных на классах пространств Карно–Каратеодори* (*см. определение, например, в* [14, 15]). *Определения* 2–9 *повторяются почти дословно с очевидными изменениями*; *результаты о субримановой дифференцируемости установлены в* [10].

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2019-1613.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карманова М.Б.* Формула коплощади для функций на 2-ступенчатых группах Карно с сублоренцевой структурой // ДАН. 2020. Т. 490. С. 42–46.
2. *Миклюков В.М., Клячин А.А., Клячин В.А.* Максимальные поверхности в пространстве-времени Минковского [Электронный ресурс] // Режим доступа: http://www.uchimsya.info/maxsurf.pdf.
3. *Берестовский В.Н., Гичев В.М.* // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11. Вып. 4. С. 1–34.
4. *Grochowski M.* // J. Dyn. Control Syst. 2006. V. 12. № 2. P. 145–160.
5. *Korolko A., Markina I.* // Complex Anal. Oper. Theory. 2010. V. 4. № 3. P. 589–618.
6. *Крым В.Р., Петров Н.Н.* // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2008. Вып. 3. С. 68–80.

7. *Folland G.B., Stein, E.M.* Hardy spaces on homogeneous groups // Princeton: Princeton Univ. Press, 1982.
8. *Карманова М.Б.* // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58. № 2. С. 232–254.
9. *Pansu P.* // Ann. Math. 1989. V. 129. P. 1–60.
10. *Vodopyanov S.* // Contemporary Mathematics. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2007. V. 424. P. 247–301.
11. *Карманова М.Б.* // ДАН. 2017. Т. 474. № 2. С. 151–154.
12. *Карманова М.Б.* // Изв. РАН. Сер. мат. 2020. Т. 84. № 1. С. 60–104.
13. *Karmanova M., Vodopyanov S.* Acta Applicandae Mathematicae. 2013. V. 128. № 1. P. 67–111.
14. *Gromov M.* // In: Sub-Riemannian Geometry. Basel: Birkhäuser Verlag, 1996. P. 79–318.
15. *Basalaev S.G., Vodopyanov S.K.* // Euras. Math. J. 2013. V. 4. № 2. P. 10–48.

SPACE-LIKENESS OF CLASSES OF LEVEL SURFACES ON CARNOT GROUPS AND THEIR METRIC PROPERTIES

M. B. Karmanova[a]

[a] *Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS Yu.G. Reshetnyak

We consider C^1-smooth vector functions defined on Carnot groups of arbitrary depth, deduce conditions for space-likeness of their level surfaces and describe their metric properties from the sub-Lorentzian geometry viewpoint. We prove the coarea formula as the expression of the measure of a subset of a Carnot group via sub-Lorentzian measure of its intersections with level sets of a vector-function.

Keywords: Carnot group, sub-Lorentzian structure, vector function, level set, sub-Lorentzian measure, coarea formula