ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 492, с. 27–30

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

О СТАЦИОНАРНЫХ НЕРАВНОВЕСНЫХ МЕРАХ ДЛЯ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2020 г. Т. В. Дудникова[1,*]

Представлено академиком РАН Б.Н. Четверушкиным 05.03.2020 г.
Поступило 05.03.2020 г.
После доработки 05.03.2020 г.
Принято к публикации 23.03.2020 г.

В работе рассматривается задача Коши для волновых уравнений с постоянными и переменными коэффициентами. Предполагается, что начальные данные являются случайной функцией с конечной средней плотностью энергии, и изучается сходимость распределений решений к некоторой предельной гауссовой мере при больших временах. Получены формулы для предельной плотности потока энергии (в среднем), и найден новый класс стационарных неравновесных состояний для изучаемой модели.

Ключевые слова: волновые уравнения, случайные начальные данные, условие перемешивания, слабая сходимость мер, гауссовские и гиббсовские меры, плотность потока энергии, неравновесные состояния

DOI: 10.31857/S2686954320030078

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматриваются волновые уравнения в $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 3$ и нечетно) с постоянными или переменными коэффициентами вида

$$\ddot{u}(x,t) = \sum_{i,j=1}^{d} \partial_i (a_{ij}(x) \partial_j u(x,t)) - a_0(x) u(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

и с начальными условиями (при $t = 0$)

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \dot{u}(x,0) = v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{2}$$

Здесь $\partial_j \equiv \dfrac{\partial}{\partial x_j}$, $u(x,t) \in \mathbb{R}$. Предполагается, что коэффициенты уравнения достаточно гладкие, причем при $|x| > R_0$ уравнение (1) имеет вид $\ddot{u}(x,t) = \Delta u(x,t)$; $a_0(x) \geq 0$, и матрица $(a_{ij}(x))$ положительно определена при всех $x \in \mathbb{R}^d$. Кроме того, требуется выполнение так называемого условия неловушечности (см. условие D в [1, с. 234]), заключающегося в уходе на бесконечность при $t \to \infty$ всех лучей уравнения (1).

[1] *Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия*

**E-mail: tdudnikov@mail.ru*

Предполагается, что начальные данные $Y_0(x) = (u_0(x), v_0(x))$ являются измеримой случайной функцией с распределением μ_0. Мы полагаем, что корреляционные функции начальной меры μ_0

$$Q_0^{ij}(x,y) = \int (Y_0^i(x) Y_0^j(y)) \mu_0(dY_0), \quad i,j = 0,1, \quad x,y \in \mathbb{R}^d,$$

имеют вид $Q_0^{ij}(x,y) = q_0^{ij}(\bar{x}, \bar{y}, \tilde{x} - \tilde{y})$, где $\bar{x} = (x_1, ..., x_k)$, $\tilde{x} = (x_{k+1}, \ldots, x_d)$, $x = (\bar{x}, \tilde{x})$, $y = (\bar{y}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^d$ с некоторым $k \in \{1, \ldots, d\}$. Кроме того,

$$Q_0^{ij}(x,y) = q_{\mathbf{n}}^{ij}(x - y), \quad \text{если} \quad x, y \in D_{\mathbf{n}}, \tag{3}$$

где области $D_{\mathbf{n}}$ определяются следующим образом:

$$D_{\mathbf{n}} = \{x \in \mathbb{R}^d \colon (-1)^{n_1} x_1 > a, \ldots, (-1)^{n_k} x_k > a\}, \quad \mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_k) \in \mathcal{N}^k. \tag{4}$$

Здесь $\mathcal{N}^k = \{\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_k) \colon n_j \in \{1; 2\}, \forall j\}$, a – некоторое фиксированное число, $a > 0$. Другими словами, условие (3) означает, что случайная функция $Y_0(x)$ в случае, когда $(-1)^{n_j} x_j > a$ для всех $j = 1, \ldots, k$, равна, вообще говоря, различным трансляционно-инвариантным случайным процессам $Y_{\mathbf{n}}(x)$ с распределениями $\mu_{\mathbf{n}}$. Наконец, предполагается, что мера μ_0 обладает конечной средней плотностью энергии,

$$\int |Y_0(x)|^2 \mu_0(dY) = \\ = Q_0^{00}(x,x) + Q_0^{11}(x,x) \le C < \infty. \quad (5)$$

Через μ_t, $t \in \mathbb{R}$, обозначим распределение решений

$$Y(t) \equiv Y(\cdot,t) = (u(\cdot,t), \dot{u}(\cdot,t)).$$

Главная цель работы – доказать слабую сходимость мер μ_t:

$$\mu_t \to \mu_\infty \quad \text{при} \quad t \to \infty. \quad (6)$$

Аналогичная сходимость справедлива при $t \to -\infty$, так как рассматриваемая система обратима по времени. В работе эти результаты применяются в частном случае, когда волновые уравнения имеют постоянные коэффициенты, а распределения $\mu_\mathbf{n}$ являются гиббсовскими мерами с температурами $T_\mathbf{n} > 0$. Однако гиббсовские меры имеют сингулярные корреляционные функции и не удовлетворяют условию (5). Поэтому вводятся гауссовские случайные процессы $Y_\mathbf{n}$, соответствующие мерам $\mu_\mathbf{n}$, и рассматриваются “сглаженные” меры $\mu_\mathbf{n}^\theta$ как распределения свёрток $Y_\mathbf{n} * \theta$, где $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Меры $\mu_\mathbf{n}^\theta$ удовлетворяют условию (5). Обозначим через μ_t^θ распределение свёртки $Y(t) * \theta$. Тогда слабая сходимость мер $\mu_t^\theta \to \mu_\infty^\theta$ при $t \to \infty$ вытекает из сходимости (6). Отсюда следует сходимость $\mu_t \to \mu_\infty$ при $t \to \infty$ в силу произвольности функции θ. В случае волновых уравнений с постоянными коэффициентами получены явные формулы для ковариации предельной меры μ_∞. Это позволяет вычислить координаты предельной плотности потока энергии $\mathbf{J}_\infty = (J_\infty^1, \dots, J_\infty^d)$ и получить, что $J_\infty^l = 0$, если $l = k+1, \dots, d$, и

$$J_\infty^l = -c_l \cdot 2^{-k} \Sigma(T_\mathbf{n}|_{n_l=2} - T_\mathbf{n}|_{n_l=1}), \\ \text{если} \quad l = 1, 2, \dots, k. \quad (7)$$

Здесь суммирование берется по всем $n_j \in \{1,2\}$ с $j \ne l$, а числа $c_l = +\infty$. Эта бесконечность связана с “ультрафиолетовой расходимостью”. В случае сглаженных мер μ_∞^θ поток энергии $\mathbf{J}_\infty$ имеет конечное значение. Кроме того, все числа $c_l > 0$, если функция $\theta(x)$ – осесимметрична относительно всех координатных осей и не равна тождественно нулю.

В настоящее время существует большое количество работ, посвященных изучению сходимости к неравновесным состояниям для различных дискретных и непрерывных систем, см. обзорные статьи [2, 3]. Например, для бесконечной одномерной цепочки гармонических осцилляторов результаты, аналогичные (6), были получены в работе [4]. Для многомерных гармонических кристаллов сходимость (6) и формула (7) были доказаны в работах [5, 6]. Для непрерывных систем, описываемых волновыми уравнениями, результаты (6) и (7) были доказаны в [7] в частном случае, когда $k = 1$ (см. условие (3)). Таким образом, в данной работе построен более общий по сравнению с [7] класс неравновесных стационарных состояний μ_∞, при которых в изучаемой модели имеется ненулевой поток тепла. Перейдем к более подробному описанию результатов.

2. ГЛАВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

На уравнение (1) накладываются следующие условия **A1–A3**.

A1. $a_{ij}(x) = \delta_{ij} + b_{ij}(x)$,

где $b_{ij}(x) \in D \equiv C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, δ_{ij} – символ Кронекера.

A2. $a_0(x) \in D$, $a_0(x) \ge 0$ и выполнено условие гиперболичности, т.е. существует $\alpha > 0$ такое, что

$$H(x,\xi) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \ge \alpha |\xi|^2, \ \ x, \xi \in \mathbb{R}^d.$$

A3. Условие неловушечности: для $(x(0), \xi(0)) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ с $\xi(0) \ne 0$ справедлива сходимость $|x| \to \infty$ при $t \to \infty$, где $(x(t), \xi(t))$ – решение гамильтоновой системы $\dot{x}(t) = \nabla_\xi H(x(t), \xi(t))$, $\dot{\xi}(t) = -\nabla_x H(x(t), \xi(t))$.

В частности, условие **A3** выполнено в случае постоянных коэффициентов, т.е. когда $a_{ij}(x) \equiv \delta_{ij}$ и $a_0(x) \equiv 0$, так как в этом случае $\dot{\xi}(t) \equiv 0$ и $x(t) = \xi(0)t + x(0)$.

Начальные данные $Y_0 = (Y_0^0, Y_0^1) \equiv (u_0, v_0)$ задачи (1) принадлежат фазовому пространству $\mathcal{H}$. По определению, $\mathcal{H} = H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d) \oplus H^0_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ – пространство Фреше пар $Y_0 = (u_0(x), v_0(x))$ действительных функций $u_0(x)$ и $v_0(x)$ с локальными энергетическими полунормами

$$\|Y\|_R^2 = \int_{|x|<R} (|u_0(x)|^2 + |\nabla u_0(x)|^2 + |v_0(x)|^2) dx < \infty, \\ \forall R > 0.$$

Утверждение. *Пусть выполнены условия* **A1–A3**. *Тогда для любых начальных данных $Y_0 \in \mathcal{H}$ существует, и притом единственное, решение $Y(t) \in C(\mathbb{R}; \mathcal{H})$ задачи Коши* (1), (2). *Оператор $U(t)$: $Y_0 \to Y(t)$ непрерывен на $\mathcal{H}$ для любых $t \in \mathbb{R}$.*

Выберем функцию $\zeta(x) \in D$ с $\zeta(0) \ne 0$. Обозначим через $H^s_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, $s \in \mathbb{R}$, локальные пространства Соболева, т.е. пространства Фреше распределений $u \in D'(\mathbb{R}^d)$ с локальными полунормами

$$\|u\|_{s,R} = \|\Lambda^s(\zeta(x/R))\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

где $\Lambda^s v = F^{-1}_{\xi\to x}(\langle\xi\rangle^s \hat{v}(\xi))$, $\langle\xi\rangle = \sqrt{|\xi|^2+1}$ и $\hat{v} = Fv$ — преобразование Фурье обобщенной функции медленного роста v. Если $\psi \in D$, то $F\psi(x) = \int e^{i\xi\cdot x}\psi(x)dx$. По определению, $\mathcal{H}^s = H^{1+s}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d) \oplus H^s_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, $s \in \mathbb{R}$.

Обозначим через μ_0 вероятностную борелевскую меру на $\mathcal{H}$, которая является распределением функции Y_0, через $\mathbb{E}$ — интеграл по мере μ_0, а через $Q_0(x,y) = (Q_0^{ij}(x,y))$ — ее корреляционную матрицу. Предполагается, что $\mathbb{E}(Y_0(x)) = 0$, $\mathbb{E}(|Y_0(x)|^2) \le C < \infty$, корреляционные функции $Q_0^{ij}(x, y)$ удовлетворяют условию (3), где через $q_{\mathbf{n}}(x-y) = (q_{\mathbf{n}}^{ij}(x-y))$ обозначаются корреляционные матрицы некоторых трансляционно-инвариантных мер $\mu_{\mathbf{n}}$ с нулевым средним на пространстве $\mathcal{H}$. Наконец, мера μ_0 удовлетворяет условию равномерно сильного перемешивания типа Ибрагимова, см. условие S4 в [7]. Это условие означает, вообще говоря, что $Y_0(x)$ и $Y_0(y)$ слабо зависимы, когда $|x-y| \to \infty$.

Определение. μ_t, $t \in \mathbb{R}$, — борелевская вероятностная мера на $\mathcal{H}$, которая является распределением решения $Y(t)$, т.е. $\mu_t(B) = \mu_0(U(-t)B)$, $\forall B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, где через $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ обозначается борелевская σ-алгебра в $\mathcal{H}$.

Теорема. *Пусть выполнены условия* **A1–A3**, *а также все условия, наложенные на меру* μ_0. *Тогда*:

1) *корреляционные функции мер* μ_t *сходятся к пределу при* $t \to \infty$;

2) *для любого* $\varepsilon > 0$ *имеет место сходимость* (6) *на пространстве* $\mathcal{H}^{-\varepsilon}$, *т.е. для любого непрерывного ограниченного функционала* $f(Y)$ *на пространстве* $\mathcal{H}^{-\varepsilon}$ *справедлива сходимость*

$$\int f(Y)\mu_t(dY) \to \int f(Y)\mu_\infty(dY) \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

При этом предельная мера μ_∞ *является гауссовской мерой, сосредоточенной на пространстве* $\mathcal{H}$.

Доказательство теоремы основано на технике работы [5], где аналогичные результаты доказаны для дискретных моделей, так называемых гармонических кристаллов, а также на методе работы [7], где теорема доказана в частном случае, когда $k = 1$.

Пусть теперь $u(x, t)$ — случайное решение задачи (1) с постоянными коэффициентами, т.е. когда $a_{ij}(x) \equiv \delta_{ij}$ и $a_0(x) \equiv 0$. Тогда средняя плотность потока энергии равна $\mathbf{J}(x, t) = -\mathbb{E}(\dot{u}(x,t)\nabla u(x,t))$. В пределе при $t \to \infty$ получаем $\mathbf{J}(x, t) \to \mathbf{J}_\infty = \nabla q_\infty^{10}(0)$, где $q_\infty(x) = (q_\infty^{ij}(x))$ — корреляционная матрица меры μ_∞. Применим полученные результаты к частному случаю, когда $\mu_{\mathbf{n}}$ являются гиббсовскими мерами, соответствующими различным температурам $T_{\mathbf{n}} > 0$. Для изучаемой модели гиббсовскую меру g_T можно определить как гауссовскую меру с нулевым средним и корреляционной матрицей вида

$$\begin{pmatrix} -T\mathcal{E}(x-y) & 0 \\ 0 & T\delta(x-y) \end{pmatrix},$$

где через T обозначается температура, $T > 0$, $\mathcal{E}(x)$ — фундаментальное решение оператора Лапласа, т.е. $\Delta\mathcal{E}(x) = \delta(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, $\delta(x)$ — δ-функция Дирака. В случае, когда $\mu_{\mathbf{n}} \equiv g_{T_{\mathbf{n}}}$ — гиббсовские меры с температурами $T_{\mathbf{n}}$, $\mathbf{n} \in \mathcal{N}^k$, справедлива формула (7), где (формально) $c_l = (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\xi_l|}{|\xi|} d\xi$, $l = 1, 2, \ldots, k$. Таким образом, доказано, что существуют неравновесные состояния (или вероятностные предельные меры μ_∞), при которых в изучаемой модели имеется ненулевой поток тепла.

Рассмотрим частный случай формулы (7). Пусть $k = 1$ и $\mu_n = g_{T_n}$, $n = 1; 2$. Тогда модель (1) можно представить как “систему + два резервуара”, где резервуары состоят из “точек модели” (т.е. решений $Y(x, t)$) с координатами $x \in D_1 = \{x \in \mathbb{R}^d : x_1 < -a\}$ и $x \in D_2 = \{x_1 > a\}$. В начальный момент времени резервуары имеют гиббсовские распределения с температурами T_n. Из формулы (7) вытекает, что в этом случае предельная плотность потока энергии равна $\mathbf{J}_\infty = -(c_1(T_2 - T_1), 0, \ldots, 0)$, где $c_1 = +\infty$. В случае сглаженных предельных мер μ_∞^θ значение c_1 конечно и положительно, что соответствует Второму закону термодинамики, т.е. тепло передается от “горячего” резервуара к “холодному”.

В заключение отметим, что все результаты остаются верны для волновых уравнений в $\mathbb{R}^d$ с четным $d \ge 4$, что является обобщением работы [8] на более общий класс начальных мер.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вайнберг Б.Р.* Асимптотические методы в уравнениях математической физики. М.: Изд-во Московского ун-та, 1982. 296 с.
2. *Bonetto F., Lebowitz J.L., Rey-Bellet L.* In: Mathematical Physics. 2000. A. Fokas, A. Grigoryan, T. Kibble, B. Zegarlinski (Eds). Imperial College Press, 2000. P. 128–150.

3. *Lepri S., Livi R., Politi A.* // Physics Reports. 2003. V. 377. P. 1–80.
4. *Boldrighini C., Pellegrinotti A., Triolo L.* // J. Stat. Phys. 1983. V. 30. P. 123–155.
5. *Dudnikova T.V.* // Rus. J. Math. Phys. 2019. V. 26. № 4. P. 429–453.
6. *Дудникова Т.В.* // ДАН. 2019. Т. 487. № 3. С. 7–9.
7. *Dudnikova T.V., Komech A.I., Spohn H.* // Markov Processes and Related Fields. 2002. V. 8. № 1. P. 43–80.
8. *Дудникова Т.В.* // Препр. ИПМ им. М.В. Келдыша. 2005. № 80. 14 с.

ON THE STATIONARY NON-EQUILIBRIUM MEASURES FOR WAVE EQUATIONS

T. V. Dudnikova[a]

[a] *Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS B.N. Chetverushkin

In the paper, the Cauchy problem for wave equations with constant and variable coefficients is considered. We assume that the initial data are a random function with finite mean energy density and study the convergence of the distributions of the solutions to a limiting Gaussian measure for large times. We derive the formulas for the limiting energy current density (in mean) and find a new class of stationary non-equilibrium states for the studied model.

Keywords: wave equations, random initial data, mixing condition, weak convergence of measures, Gaussian and Gibbs measures, energy current density, non-equilibrium states