ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 492, с. 11–14

МАТЕМАТИКА

УДК 517

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕПРЕРЫВНЫХ ПРОДОЛЖЕНИЙ ОТОБРАЖЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ОПЕРАТОРА НЕМЫЦКОГО

© 2020 г. **А. В. Арутюнов**[1,*], **С. Е. Жуковский**[1,**]

Представлено академиком РАН А.Т. Фоменко 23.01.2020 г.
Поступило 06.02.2020 г.
После доработки 06.02.2020 г.
Принято к публикации 15.02.2020 г.

Исследовано понятие устойчивости непрерывных продолжений отображений относительно суперпозиционного оператора Немыцкого. Получены достаточные условия такой устойчивости относительно оператора Немыцкого. Существенность соответствующих предположений проиллюстрирована примерами.

Ключевые слова: оператор Немыцкого, устойчивость, теоремы о продолжении непрерывных отображений

DOI: 10.31857/S2686954320030042

Пусть X – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_X$, (Y, ρ_Y) – метрическое пространство с метрикой ρ_Y, Σ – хаусдорфово паракомпактное топологическое пространство и задано непрерывное отображение $f: X \times \Sigma \to Y$. Пусть C – заданное непустое замкнутое подмножество Σ.

Для непрерывного отображения $\varphi: \Sigma \to X$ его сужение на C обозначим через φ_C. Определим оператор Немыцкого (оператор суперпозиции) $\mathcal{N}$, положив $\mathcal{N}(\varphi)(\sigma) = f(\varphi(\sigma), \sigma)$. Он ставит в соответствие непрерывному отображению $\varphi: \Sigma \to X$ непрерывное отображение $\mathcal{N}(\varphi): \Sigma \to Y$. Аналогично определяется оператор $\mathcal{N}$ для непрерывных отображений $\varphi: C \to X$.

Обычную норму в пространстве непрерывных ограниченных отображений $\varphi: \Sigma \to X$ обозначим через $\|\cdot\|$, и точно также через $\|\cdot\|$ обозначим норму для непрерывных ограниченных отображений, действующих из C в X. Обычную метрику в пространстве непрерывных ограниченных отображений, действующих из Σ в Y, будем обозначать через ρ, и точно также через ρ будем обозначать метрику для непрерывных ограниченных отображений, действующих из C в Y. Такое одинаковое обозначение нормы и метрики для отображений, определенных как на Σ, так и на C, к путанице не приведет.

В силу теоремы о непрерывном продолжении, вытекающей из теоремы Майкла (см. [1; 2, п. 1.4]) о непрерывном селекторе, произвольное непрерывное отображение, заданное на C, можно непрерывно продолжить на Σ. В связи с этим зададимся вопросом, существует ли такое продолжение, которое устойчиво относительно оператора Немыцкого. А именно, пусть дано непрерывное отображение $\varphi^0: \Sigma \to X$. Спрашивается, верно ли, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого непрерывного отображения $\varphi: C \to X$, для которого

$$\|\varphi - \varphi^0_C\| < \delta, \quad \rho(\mathcal{N}(\varphi), \mathcal{N}(\varphi^0_C)) < \delta, \tag{1}$$

существует такое его непрерывное продолжение $\hat{\varphi}$, что

$$\|\hat{\varphi} - \varphi^0\| < \varepsilon, \quad \rho(\mathcal{N}(\hat{\varphi}), \mathcal{N}(\varphi^0)) < \varepsilon. \tag{2}$$

Эта проблема имеет самостоятельный интерес, а также возникает в задаче о продолжении неявной функции, заданной на замкнутом подмножестве $C \subset \Sigma$. Поясним последнее сказанное.

Рассмотрим уравнение $f(x, \sigma) = 0$ относительно неизвестного $x \in X$ и параметра $\sigma \in \Sigma$. При каждом значении параметра σ надо решить это уравнение относительно x, т.е. найти такое непрерывное отображение $\varphi: \Sigma \to X$, что $f(\varphi(\sigma), \sigma) = 0$ $\forall \sigma \in \Sigma$. Отметим, что последнее означает, что $\mathcal{N}(\varphi) = 0$. При этом отображение φ называется неявной функцией. В предположении, что X, Y –

[1] *Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук, Москва, Россия*
**E-mail: arutyunov@cs.msu.ru*
***E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru*

гильбертовы пространства, отображение f удовлетворяет естественным предположениям гладкости по переменной x, и линейный оператор $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \sigma)$ сюръективен, причем равномерно по всем x, σ, доказательство существования неявной функции, удовлетворяющей некоторым априорным оценкам приведено в [3].

Задача о продолжении неявной функции состоит в следующем. Пусть задана неявная функция φ^0. Возьмем произвольное непрерывное отображение $\varphi: C \to X$, которое является неявной функцией на множестве C, т.е. $f(\varphi(\sigma), \sigma) = 0\ \forall \sigma \in C$. Надо найти условия, которые гарантируют следующее: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если для сужения φ^0 на C выполняется $\|\varphi - \varphi^0_C\| < \delta$, то у отображения φ существует такое непрерывное продолжение $\hat\varphi$, что $\hat\varphi$ также является неявной функцией и $\|\hat\varphi - \varphi^0\| < \varepsilon$.

При выводе этих условий как раз и возникает потребность ответить на поставленный выше вопрос, используя оценки, полученные в [3]. В общем случае, как показывает описанный ниже пример, ответ на этот вопрос отрицательный. В то же время справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 1. *Пусть дано непрерывное отображение $\varphi^0: \Sigma \to X$. Предположим, что для него выполнено следующее предположение о равномерной по σ непрерывности отображения $f(\cdot, \sigma)$ в точках графика отображения φ^0. А именно, для произвольного $\varepsilon > 0$ существуют такие* (*зависящие от* ε) *окрестность O множества C и число $\delta > 0$, что имеет место*

$$\begin{gathered} \rho_Y(f(x, \sigma), f(\varphi^0(\sigma), \sigma)) \le \varepsilon \\ \forall \sigma \in O \backslash C, \quad \forall x: \quad \|x - \varphi^0(\sigma)\|_X \le \delta. \end{gathered} \tag{3}$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого непрерывного отображения $\varphi: C \to X$, для которого выполняются условия (1)*, существует его непрерывное продолжение $\hat\varphi$, удовлетворяющее неравенствам* (2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Возьмем соответствующие ему окрестность O множества C и число $\delta > 0$ так, что $\delta < \varepsilon$ и для них имеет место (3). Возьмем произвольное непрерывное отображение $\varphi: C \to X$, для которого имеет место $\|\varphi^0_C - \varphi\| \le \delta$. Для отображения φ построим такое его непрерывное продолжение $\hat\varphi^1$ на Σ, что $\|\varphi^0 - \hat\varphi^1\| \le \delta$.

Действительно, для $\sigma \in C$ положим $\Delta(\sigma) = \varphi(\sigma) - \varphi^0(\sigma)$. Очевидно, отображение Δ непрерывно на C и $\|\Delta\| \le \delta$. Поэтому в силу теоремы о непрерывном продолжении, вытекающей из теоремы Майкла (см. [1; 2, п. 1.4]), у отображения Δ существует такое непрерывное продолжение $\hat\Delta$ на Σ, что $\|\hat\Delta\| \le \delta$. Положим $\hat\varphi^1 = \varphi^0 + \hat\Delta$. Очевидно, $\hat\varphi^1$ является искомым продолжением φ.

Положим $C_2 = \Sigma \backslash O$. Тогда множество C_2 замкнуто и $C \cap C_2 = \phi$. По теореме Дьедонне (см. [4]) хаусдорфово паракомпактное пространство Σ нормально. Поэтому в силу большой леммы Урысона на Σ существует такая непрерывная скалярная функция θ, что

$$\begin{gathered} \theta(\sigma) = 0 \Leftrightarrow \sigma \in C, \quad \theta(\sigma) = 1 \Leftrightarrow \sigma \in C_2, \\ 0 \le \theta(\sigma) \le 1 \quad \forall \sigma. \end{gathered}$$

Положим

$$\hat\varphi(\sigma) = \hat\varphi^1(\sigma)(1 - \theta(\sigma)) + \varphi^0(\sigma)\theta(\sigma), \quad \sigma \in \Sigma.$$

Тогда

$$\begin{gathered} \hat\varphi(\sigma) = \hat\varphi^1(\sigma) = \varphi(\sigma) \quad \forall \sigma \in C, \\ \hat\varphi(\sigma) = \varphi^0(\sigma) \quad \forall \sigma \in C_2 \end{gathered} \tag{4}$$

и, кроме того,

$$\begin{gathered} \|\hat\varphi(\sigma) - \varphi^0(\sigma)\|_X = \\ = (1 - \theta(\sigma))\|\hat\varphi^1(\sigma) - \varphi^0(\sigma)\|_X \le \delta \quad \forall \sigma \in \Sigma. \end{gathered}$$

Следовательно, имеет место

$$\|\hat\varphi - \varphi^0\| \le \delta. \tag{5}$$

Отсюда в силу (3) получаем, что

$$\rho_Y(f(\hat\varphi(\sigma), \sigma), f(\varphi^0(\sigma), \sigma)) \le \varepsilon \quad \forall \sigma \in O \backslash C.$$

В то же время в силу (4) имеем $f(\hat\varphi(\sigma), \sigma) = f(\varphi^0(\sigma), \sigma)\ \forall \sigma \in C \cup C_2$. Поэтому в результате получаем, что $\rho(f(\hat\varphi), f(\varphi^0)) \le \varepsilon$. Отсюда, учитывая (5) и то, что $\delta \le \varepsilon$, получаем, что построенное продолжение $\hat\varphi$ отображения φ является искомым.

В общем случае предположение о равномерной непрерывности (3) в теореме 1 существенно и его опустить нельзя. Это показывает следующий

П р и м е р 1. Пусть $X = Y = \Sigma = \mathbb{R}$, $C = \mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $f: X \times \Sigma \to Y$ – гладкая функция такая, что

$$f(0, \sigma) = f(2e^{-\sigma}, \sigma) = 0, \quad f(e^{-\sigma}, \sigma) \ge 1 \quad \forall \sigma \in \Sigma$$

(например, функция $f(x, \sigma) = e^{2\sigma}x(2e^{-\sigma} - x)$, $x \in X$, $\sigma \in \Sigma$, обладает такими свойствами). Возьмем $\varphi^0(\sigma) \equiv 0$, $\sigma \in \Sigma$.

Зафиксируем произвольное $\delta > 0$. Выберем $n \in \mathbb{N}$ такое, что $2e^{-n} < \delta$. Определим на C функцию φ, положив $\varphi(\sigma) := 0$ при $\sigma \in C$, $\sigma < n$, и

$\varphi(\sigma) := 2e^{-\sigma}$ при $\sigma \in C$, $\sigma \geq n$. Тогда по построению $\mathcal{N}(\varphi)(\sigma) \equiv 0$ и, значит,

$$\|\varphi - \varphi_0\| = 2e^{-n} < \delta, \quad \rho(\mathcal{N}(\varphi), \mathcal{N}(\varphi^0)) = 0.$$

Непосредственно проверяется, что для произвольной функции $\hat{\varphi} : \Sigma \to X$, являющейся непрерывным продолжением φ, имеет место $\rho(\mathcal{N}(\hat{\varphi}), \mathcal{N}(\varphi^0)) \geq 1$, и, значит, второе неравенство в (2) нарушается при $\varepsilon = 1$.

З а м е ч а н и е 1. Из приведенного доказательства вытекает, что для построенного в теореме продолжения $\hat{\varphi}$ также имеет место $\varphi(\sigma) = \varphi^0(\sigma)$ $\forall \sigma \notin O$.

З а м е ч а н и е 2. Предположение (3) выполняется, если существуют окрестность O множества C и число

$$r > r_0 = \sup\{\|\varphi^0(\sigma)\|_X, \sigma \in O \backslash C\}$$

такие, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, для которого

$$\|f(x_2, \sigma) - f(x_1, \sigma)\|_Y \leq \varepsilon$$
$$\forall x_1, x_2\colon \|x_1\|_X \leq r, \ \|x_2 - x_1\|_X \leq \delta, \ \forall \sigma \in O \backslash C.$$

Л е м м а 1. *Предположим, что множество C компактно. Пусть задан произвольный компакт $K \subset X$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие (зависящие от ε и K) окрестность O множества C и $\delta > 0$, что*

$$\rho_Y(f(\xi, \sigma), f(x, \sigma)) \leq \varepsilon$$
$$\forall x \in K, \quad \xi \in X\colon \|\xi - x\|_X \leq \delta \quad \forall \sigma \in O \backslash C.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть задан компакт $K \subset X$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Возьмем произвольные $x_0 \in K$, $\sigma_0 \in C$. Покажем, что для них существуют окрестность $O(x_0, \sigma_0)$ точки σ_0 и число $\delta(x_0, \sigma_0) > 0$ такие, что для любых $x \in K$, $\xi \in X$, $\sigma \in \Sigma$, для которых

$$\begin{gathered} \|\xi - x\|_X < \delta(x_0, \sigma_0), \\ \|x - x_0\|_X < \delta(x_0, \sigma_0), \quad \sigma \in O(x_0, \sigma_0), \end{gathered} \tag{6}$$

выполняется

$$\rho_Y(f(\xi, \sigma), f(x, \sigma)) < \varepsilon. \tag{7}$$

Действительно, в силу непрерывности отображения f в точке (x_0, σ_0) существуют такие окрестность $O(x_0, \sigma_0)$ точки σ_0 и число $\delta(x_0, \sigma_0) > 0$, что для любых ξ, σ, для которых

$$\|\xi - x_0\|_X < 2\delta(x_0, \sigma_0), \quad \sigma \in O(x_0, \sigma_0),$$

выполняется

$$\rho_Y(f(\xi, \sigma), f(x_0, \sigma_0)) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8}$$

Для ξ, x, σ, удовлетворяющих (6), очевидно, имеем $\|\xi - x_0\| \leq 2\delta(x_0, \sigma_0)$. Поэтому для указанных ξ, σ выполняется (8). Следовательно, в силу (8) имеет место

$$\rho_Y(f(\xi, \sigma), f(x, \sigma)) \leq$$
$$\leq \rho_Y(f(\xi, \sigma), f(x_0, \sigma_0)) + \rho_Y(f(x_0, \sigma_0), f(x, \sigma)) < \varepsilon.$$

Таким образом, (7) доказано.

По прежнему x_0 считаем фиксированным. Рассмотрим семейство множеств $\{O(x_0, \sigma), \sigma \in C\}$. Оно является открытым покрытием компакта C. Выбирая из этого открытого покрытия конечное подпокрытие, будем считать, что

$$O(x_0) = \bigcup_{i=1}^{m} O(x_0, \sigma_i) \supset C$$
$$\text{для некоторых} \quad \sigma_i \in C, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Положим $\delta(x_0) = \min\{\delta(x_0, \sigma_i), i = 1, 2, \ \ldots, \ m\}$. Для построенных открытого множества $O(x_0) \supset C$ и $\delta(x_0) > 0$ получаем, что (7) выполняется для всех $\sigma \in O(x_0)$ и $x \in K$, $\xi \in X$ таких, что $\|\xi - x\|_X < \delta(x_0)$, $\|x - x_0\|_X < \delta(x_0)$.

В X рассмотрим открытый шар

$$O_X(x, \delta) = \{\xi \in X\colon \|\xi - x\| < \delta\}.$$

Семейство множеств $\{O_X(x, \ \delta(x)), x \in K\}$ является открытым покрытием компакта K. Выбирая из этого открытого покрытия конечное подпокрытие, будем считать, что $W = \bigcup_{i=1}^{l} O_X(x_i, \delta(x_i)) \supset K$ для некоторых $x_i \in K$, $i = 1$, 2, ..., l. Положим $\delta = \min\{\delta(x_i), i = 1, 2, \ \ldots, \ l\}$, $O = \bigcap_{i=1}^{l} O(x_i)$.

Очевидно, множество O открыто, $O \supset C$, $\delta > 0$ и в силу проведенных построений и (7) имеет место

$$\rho_Y(f(\xi, \sigma), f(x, \sigma)) < \varepsilon \quad \forall \xi \in X,$$
$$\forall x \in K\colon \|\xi - x\|_X < \delta, \quad \forall \sigma \in O.$$

Таким образом, построенные O и $\delta > 0$ являются искомыми.

С л е д с т в и е 1. *Пусть множество C компактно. Тогда для любого непрерывного отображения φ^0: $\Sigma \to X$ предположение о равномерной непрерывности* (3) *выполняется.*

Действительно, пусть дано непрерывное отображение φ^0: $\Sigma \to X$. Положим $K = \varphi^0(C)$. Тогда K – компакт как образ компакта при непрерывном отображении. Поэтому предположение о равномерной непрерывности (3) вытекает из леммы 1.

Из леммы 1 и теоремы 1 вытекает следующее

С л е д с т в и е 2. *Предположим, что множество C компактно. Пусть $K \subset X$ — компакт. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta > 0$, *что для любых непрерывных отображений* $\varphi_1, \varphi_2 \colon C \to X$, *для которых либо* $\varphi_1(C) \subset K$ *либо* $\varphi_2(C) \subset K$ *и имеет место*

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\| \le \delta, \quad \rho(\mathcal{N}(\varphi_1), \mathcal{N}(\varphi_2)) \le \delta,$$

существуют такие их непрерывные продолжения $\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2$, *что*

$$\|\hat{\varphi}_1 - \hat{\varphi}_2\| < \varepsilon, \quad \rho(\mathcal{N}(\hat{\varphi}_1), \mathcal{N}(\hat{\varphi}_2)) < \varepsilon.$$

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18–01–00106). Теорема 1 и пример 1 получены при поддержке Российского научного фонда (проект № 20–11–20131).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Michael E.* Continuous selections. I // Annals of Mathematics. 1956. V. 63. № 2. P. 361–382.
2. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М.: КомКнига, 2005.
3. *Арутюнов А.В., Жуковский С.Е.* Применение методов обыкновенных дифференциальных уравнений для глобальных теорем об обратной функции // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 4. С. 452–463.
4. *Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А.* Общая топология. М.: Высшая школа, 1979.

ON STABILITY OF CONTINUOUS EXTENSIONS OF MAPPINGS WITH RESPECT TO NEMYTSKII OPERATOR

A. V. Arutyunov[a] and S. E. Zhukovskiy[a]

[a] *V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academicain of the RAS A.T. Fomenko

The concept of stability of continuous extension of mappings with respect to a Nemytskii superposition operator is studied. Sufficient conditions of such stability with respect to a Nemytskii superposition operator are obtained. The essentiality of the corresponding assumptions is illustrated by examples.

Keywords: Nemytskii operator, stability, theorems on continuous extensions