ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 492, с. 5–10

## МАТЕМАТИКА

УДК 517.946.9

# О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СУПЕРРЕФЛЕКСИВНЫХ ПРОСТРАНСТВ БЕСОВА

**© 2020 г. А. Н. Агаджанов[1,*]**

Представлено академиком РАН С.Н. Васильевым 21.02.2020 г.
Поступило 24.02.2020 г.
После доработки 26.02.2020 г.
Принято к публикации 19.03.2020 г.

В сообщении приводятся результаты, посвященные суперрефлексивным пространствам Бесова $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. А именно, определяются выражения для модулей выпуклости и модулей гладкости относительно "канонических" норм, рассматриваются свойства, связанные с финитной представимостью банаховых пространств и линейных компактных операторов в $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. В работе также приводятся неравенства типа Пруса–Смарзевского для произвольных эквивалентных норм и неравенства типа Джеймса–Гурария. Последние позволяют получать двусторонние оценки для норм элементов в $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ через коэффициенты разложений этих элементов по безусловным нормированным базисам Шаудера.

*Ключевые слова:* суперрефлексивность, финитная представимость, пространства Бесова, модули выпуклости, модули гладкости

**DOI:** 10.31857/S2686954320030030

Теория банаховых пространств – один из фундаментов современной математики и ее приложений [1, 2]. В частности, велика ее роль при построении итерационных алгоритмов решения нелинейных операторных уравнений, вариационных неравенств, минимизации функционалов, приближения функций и т.д. [3].

Значительна роль теории банаховых пространств и в задачах управления динамическими системами, поведение которых описывается дифференциальными или интегро-дифференциальными уравнениями дробного порядка [4, 5].

В настоящем сообщении представлены конструктивные результаты, посвященные суперрефлексивным пространствам Бесова [6–8]. Фундаментальную значимость класса суперрефлексивных банаховых пространств подчеркивает хотя бы тот факт, что все гильбертовы пространства являются суперрефлексивными.

Начало теории суперрефлексивных банаховых пространств восходит к работе [9]. Современное состояние теории суперрефлексивных пространств представлено в монографии [10]. Центральными результатами этой теории являются, с одной стороны, факты, связанные с финитной представимостью рефлексивных банаховых пространств в исходном пространстве, а с другой – теорема Энфло, утверждающая, что банахово пространство $X$ суперрефлексивно тогда и только тогда, когда среди эквивалентных норм на $X$ имеется равномерно выпуклая и равномерно гладкая норма.

В работе получены явные представления для модулей выпуклости и модулей гладкости пространств Бесова $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ при всех возможных комбинациях параметров $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$ и произвольных $-\infty < s < +\infty$ для "канонических" норм.

В сообщении приведены свойства линейных компактных операторов, действующих между суперрефлексивными пространствами Бесова, вне всякой связи с теоремами вложения для таких пространств. Отметим, что последовательности аппроксимационных чисел, которые соответствуют этим операторам, оказываются эквивалентными наперед заданным положительным монотонно убывающим нуль-последовательностям.

В работе приводится теорема о финитной представимости в пространствах Бесова рефлексивных пространств $l^\omega$ $(1 < \omega < \infty)$ суммируемых последовательностей. Эта теорема дает количественную оценку порядков равномерной дифференцируемости по Фреше норм элементов, от-

[1] *Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук, Москва, Россия*
**E-mail: ashot_ran@mail.ru*

личных от нулевых, в тех банаховых пространствах, которые финитно представимы в $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

В работе представлены неравенства типа Пруса–Смарзевского для произвольных эквивалентных норм на $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ [11], а также неравенства типа Джеймса–Гурария [9, 13], позволяющие получать двухсторонние оценки для “канонических” норм элементов суперрефлексивных пространств Бесова через коэффициенты разложений этих элементов по безусловным нормированным базисам Шаудера в этих пространствах.

## 1. СУПЕРРЕФЛЕКСИВНЫЕ БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Определения, приведенные ниже, являются фундаментальными в теории суперрефлексивных банаховых пространств [10].

Определение 1. Пусть $\varepsilon > 0$. Нормированное пространство $Y$ называют $\varepsilon$-финитно представимым в нормированном пространстве $X$, если для каждого конечномерного подпространства $Y_n \subset Y$ найдется подпространство той же размерности $X_n \subset X$ такое, что $d(X_n, Y_n) \le 1 + \varepsilon$.

Здесь $d(X_n, Y_n) = \inf\{\|T\| \cdot \|T^{-1}\|\}$ — дистанция Банаха–Мазура, где нижняя граница берется по всем изоморфизмам между $X_n$ и $Y_n$.

Определение 2. Пространство $Y$ называется финитно представимым в пространстве $X$, если оно $\varepsilon$-финитно представимо при любом $\varepsilon > 0$.

Определение 3. Банахово пространство $X$ называется суперрефлексивным, если любое банахово пространство $Y$, финитно представимое в $X$, является рефлексивным.

## 2. О СУПЕРРЕФЛЕКСИВНОСТИ ПРОСТРАНСТВ БЕСОВА $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$

Определение 4 [6, 7]. Пространством Бесова $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ относительно “канонической” нормы назовем банахово пространство вида

$$(B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n), \|u\|_{p,q,s}) =$$
$$= \left\{ u \in S'(\mathbb{R}^n) \colon \|u\|_{p,q,s} = \left( \sum_{j=0}^{\infty} 2^{jqs} \|u * \varphi_j\|^q_{L_p(\mathbb{R}^n)} \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty \right\},$$

где $-\infty < s < +\infty$, $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty} \in$ $\in S(\mathbb{R}^n)$ — специальная система функций на множестве комплекснозначных быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций, определенных на $\mathbb{R}^n$, $S'(\mathbb{R}^n)$ — пространство медленно растущих обобщенных функций, сопряженное к $S(\mathbb{R}^n)$.

Имеет место следующая

Теорема 1. *Пространства Бесова* $(B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{p,q,s})$ *являются равномерно выпуклыми и равномерно гладкими банаховыми пространствами. В этих пространствах выполняются неравенства типа Кларксона, а для модулей выпуклости* $\delta_{p,q,s}(\varepsilon)$ *и гладкости* $\rho_{p,q,s}(\tau)$ *имеют место представления*:

а) $\left(\|u+v\|^q_{p,q,s} + \|u-v\|^q_{p,q,s}\right)^{\frac{1}{q}} \le 2^{\frac{1}{q}}\left(\|u\|^{q'}_{p,q,s} + \|v\|^{q'}_{p,q,s}\right)^{\frac{1}{q'}}$;

$$\delta_{p,q,s}(\varepsilon) = 1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\rho_{p,q,s}(\tau) = (1 + \tau^{q'})^{\frac{1}{q'}} - 1,$$

*где* $1 < p \le 2$, $p' \le q < +\infty$;

б) $\left(\|u+v\|^{p'}_{p,q,s} + \|u-v\|^{p'}_{p,q,s}\right)^{\frac{1}{p'}} \le 2^{\frac{1}{p'}}\left(\|u\|^{p}_{p,q,s} + \|v\|^{p}_{p,q,s}\right)^{\frac{1}{p}}$;

$$\delta_{p,q,s}(\varepsilon) = 1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$\rho_{p,q,s}(\tau) = (1 + \tau^{p})^{\frac{1}{p}} - 1,$$

*где* $1 < p \le 2$, $p \le q \le p'$;

в) $\left(\|u+v\|^{q'}_{p,q,s} + \|u-v\|^{q'}_{p,q,s}\right)^{\frac{1}{q'}} \le 2^{\frac{1}{q}}\left(\|u\|^{q}_{p,q,s} + \|v\|^{q}_{p,q,s}\right)^{\frac{1}{q}}$;

$$\delta_{p,q,s}(\varepsilon) = 1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}},$$

$$\rho_{p,q,s}(\tau) = (1 + \tau^{q})^{\frac{1}{q}} - 1,$$

*где* $1 < p \le 2$, $1 < q \le p$;

г) $\left(\|u+v\|^{q}_{p,q,s} + \|u-v\|^{q}_{p,q,s}\right)^{\frac{1}{q}} \le 2^{\frac{1}{q}}\left(\|u\|^{q'}_{p,q,s} + \|v\|^{q'}_{p,q,s}\right)^{\frac{1}{q'}}$;

$$\delta_{p,q,s}(\varepsilon) = 1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\rho_{p,q,s}(\tau) = (1 + \tau^{q'})^{\frac{1}{q'}} - 1,$$

*где* $2 \le p < +\infty$, $p \le q < +\infty$;

д) $\left(\|u+v\|^{p}_{p,q,s}+\|u-v\|^{p}_{p,q,s}\right)^{\frac{1}{p}} \le 2^{\frac{1}{p}}\left(\|u\|^{p'}_{p,q,s}+\|v\|^{p'}_{p,q,s}\right)^{\frac{1}{p'}}$;

$$\delta_{p,q,s}(\varepsilon) = 1-\left(1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\rho_{p,q,s}(\tau) = (1+\tau^{p'})^{\frac{1}{p'}} - 1,$$

*где* $2 \le p < +\infty$, $p' \le q \le p$;

е) $\left(\|u+v\|^{q'}_{p,q,s}+\|u-v\|^{q'}_{p,q,s}\right)^{\frac{1}{q'}} \le 2^{\frac{1}{q'}}\left(\|u\|^{q}_{p,q,s}+\|v\|^{q}_{p,q,s}\right)^{\frac{1}{q}}$;

$$\delta_{p,q,s}(\varepsilon) = 1-\left(1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}},$$

$$\rho_{p,q,s}(\tau) = (1+\tau^{q})^{\frac{1}{q}} - 1,$$

*где* $2 \le p < +\infty$, $1 < q \le p'$.

Из теоремы 1 вытекают следствия.

С л е д с т в и е 1. *Пространства Бесова* $(B^{-s}_{p',q'}(\mathbb{R}^n)$, $\|\cdot\|_{p',q',-s})$, *сопряженные к пространствам* $(B^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, $\|\cdot\|_{p,q,s})$, *также являются равномерно выпуклыми и равномерно гладкими банаховыми пространствами относительно норм* $\|\cdot\|_{p',q',-s}$ *— дуальных “каноническим” нормам.*

С л е д с т в и е 2. *Пространства Бесова* $B^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *и* $B^{-s}_{p',q'}(\mathbb{R}^n)$ *являются суперрефлексивными при* $-\infty < s < \infty$, $1 < p < +\infty$, $1 < q < +\infty$.

## 3. КОМПАКТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ БЕСОВА

В пространствах $B^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ существует бесконечное множество норм, эквивалентных “каноническим”. Многочисленные примеры таких норм приведены в [6, 8].

Справедлива следующая

Т е о р е м а 2. *Пусть задана пара пространств Бесова* $\left(B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n), |\cdot|_{p_1,q_1,s_1}\right)$ *и* $\left(B^{s_2}_{p_2,q_2}(\mathbb{R}^k), |\!|\!|\cdot|\!|\!|_{p_2,q_2,s_2}\right)$, *где* $|\cdot|_{p_1,q_1,s_1}$ *и* $|\!|\!|\cdot|\!|\!|_{p_2,q_2,s_2}$ *— произвольные нормы, эквивалентные “каноническим” нормам с соответствующими параметрами,* $n$, $k$ *— любые натуральные числа.*

*Существует множество мощности континуума, состоящее из линейных компактных операторов* $A$: $B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n) \to B^{s_2}_{p_2,q_2}(\mathbb{R}^k)$, *у которых последовательности аппроксимационных чисел* $\{\alpha_m(A)\}$ *эквивалентны наперед заданным монотонным положительным нуль-последовательностям* $\{\lambda_m\}$.

*Операторы A представляются в виде*

$$Au = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \cdot f_m(u) \cdot g_m,$$

*где u — произвольный элемент из* $B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n)$, $f_m(u) \in (B^{-s_1}_{p_1',q_1'}(\mathbb{R}^n))$, $g_m$ *— фиксированная последовательность элементов из* $B^{s_2}_{p_2,q_2}(\mathbb{R}^k)$.

Таким образом, среди компактных операторов, действующих между произвольными парами суперрефлексивных пространств Бесова, имеются такие, которые не являются ни ядерными, ни $p$-абсолютно суммирующими (при произвольном $p > 0$), и, напротив, имеются такие, у которых последовательности аппроксимационных чисел $\alpha_m$, поперечников Колмогорова $d_m$ и Гельфанда $g_m$ являются быстро убывающими числовыми последовательностями [6].

С л е д с т в и е 3. *Не существует таких линейных компактных операторов между* $B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n)$ *и* $B^{s_2}_{p_2,q_2}(\mathbb{R}^k)$, *у которых последовательности аппроксимационных чисел* $\alpha_m(A)$ *не стремятся к нулю.*

*Вместе с тем, существует множество мощности континуума, состоящее из линейных компактных операторов* $A$: $B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n) \to B^{s_2}_{p_2,q_2}(\mathbb{R}^k)$, *у которых последовательности аппроксимационных чисел* $\alpha_m$, *поперечников Колмогорова* $d_m$ *и Гельфанда* $g_m$ *стремятся к нулю сколь угодно медленно.*

## 4. О ФИНИТНОЙ ПРЕДСТАВИМОСТИ ЛЕБЕГОВЫХ ПРОСТРАНСТВ $l^{\omega}$ В ПРОСТРАНСТВАХ БЕСОВА $B^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$

Приведем теорему о финитной представимости рефлексивных лебеговых пространств $l^{\omega}$ $(1 < \omega < \infty)$, суммируемых числовых последовательностей в пространствах Бесова. Факт финитной представимости банахова пространства $X$ в $B^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ будем обозначать $X \lll B^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

Т е о р е м а 3. *В пространствах Бесова* $(B^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, $\|\cdot\|_{p,q,s})$ *финитно представимыми являются следующие* $l^{\omega}$*-пространства*:

а) $1 < p \le 2$, $p' \le q < +\infty$, $l^{\omega} \lll B^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, *при* $\omega \in [q', 2] \cup \{q\}$;

б) $1 < p \le 2$, $p \le q \le p'$, $l^{\omega} \lll B^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, *при* $\omega \in [p, 2] \cup \{p'\}$;

в) $1 < p \le 2$, $1 < q \le p'$, $l^{\omega} \lessdot B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, *при* $\omega \in [q, 2] \cup \{q'\}$;

г) $2 \le p < +\infty$, $p \le q < +\infty$, $l^{\omega} \lessdot B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, *при* $\omega \in [q', 2] \cup \{q\}$;

д) $2 \le p < +\infty$, $p' \le q \le p$, $l^{\omega} \lessdot B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, *при* $\omega \in [p', 2] \cup \{p\}$;

е) $2 \le p < +\infty$, $1 < q \le p'$, $l^{\omega} \lessdot B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, *при* $\omega \in [p, 2] \cup \{q'\}$.

Прежде чем сформулировать результат о финитной представимости банаховых пространств применительно, например, к пункту а) теоремы 3, приведем

Определение 5 [14]. Норма ненулевого элемента некоторого банахова пространства $X$ называется $F^k$-гладкой ($k \ge 1$ – натуральное), если она равномерно дифференцируема по Фреше $k$ раз, но не $(k + 1)$ раз. Если норма является $F^k$-гладкой при всех натуральных $k$, то она равномерно дифференцируема по Фреше бесконечное число раз.

Утверждение 1. *Пусть* $1 < p \le 2$, $p' \le q < \infty$, *$X$ – некоторое рефлексивное банахово пространство, финитно представимое в* $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

*Если* $2 < q < \infty$, $1 < p < 2$, *то нормы произвольных ненулевых элементов из $X$ и $X^*$ являются $F^{(1)}$-гладкими.*

*Если* $q = 2$, $1 < p < 2$, *то нормы произвольных ненулевых элементов из $X$ и $X^*$ являются соответственно $F^{(k)}$- ($k = 1, 2, \ldots$) и $F^{(1)}$-гладкими.*

*Если* $q = 2$, $p = 2$, *то нормы произвольных ненулевых элементов из $X$ и $X^*$ являются $F^{(k)}$-гладкими при всех натуральных $k$.*

## 5. НЕКОТОРЫЕ НЕРАВЕНСТВА В СУПЕРРЕФЛЕКСИВНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ БЕСОВА

Приведем результат, справедливый для произвольных норм, эквивалентных “каноническим” нормам на пространствах Бесова $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Отметим, что эти нормы не обязаны быть равномерно выпуклыми, равномерно гладкими, строго выпуклыми.

Теорема 4. *Пусть $\Delta$ – сколь угодно малое положительное число. В пространствах $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ относительно произвольных норм $|\cdot|_{p,q,s}$, эквивалентным “каноническим” выполняются неравенства типа Пруса–Смарзевского* [11]:

а) $1 < p \le 2$, $p' \le q < +\infty$,

$$\left|t \cdot u + (1-t)v\right|^{q+\Delta}_{p,q,s} + M_1 \cdot \omega_q(t,\Delta) \cdot \left|u - v\right|^{q+\Delta}_{p,q,s} \le$$

$$\le (1+\Delta)^{q+\Delta}\left(t\left|u\right|^{q+\Delta}_{p,q,s} + (1-t)\left|v\right|^{q+\Delta}_{p,q,s}\right);$$

б) $1 < p \le 2$, $p \le q \le p'$,

$$\left|t \cdot u + (1-t)v\right|^{p'+\Delta}_{p,q,s} + M_2 \cdot \omega_{p'}(t,\Delta) \cdot \left|u - v\right|^{p'+\Delta}_{p,q,s} \le$$

$$\le (1+\Delta)^{p'+\Delta}\left(t\left|u\right|^{p'+\Delta}_{p,q,s} + (1-t)\left|v\right|^{p'+\Delta}_{p,q,s}\right);$$

в) $1 < p \le 2$, $1 < q \le p$,

$$\left|t \cdot u + (1-t)v\right|^{q'+\Delta}_{p,q,s} + M_3 \cdot \omega_{q'}(t,\Delta) \cdot \left|u - v\right|^{q'+\Delta}_{p,q,s} \le$$

$$\le (1+\Delta)^{q'+\Delta}\left(t\left|u\right|^{q'+\Delta}_{p,q,s} + (1-t)\left|v\right|^{q'+\Delta}_{p,q,s}\right);$$

г) $2 \le p < +\infty$, $p \le q < +\infty$,

$$\left|t \cdot u + (1-t)v\right|^{q+\Delta}_{p,q,s} + M_4 \cdot \omega_q(t,\Delta) \cdot \left|u - v\right|^{q+\Delta}_{p,q,s} \le$$

$$\le (1+\Delta)^{q+\Delta}\left(t\left|u\right|^{q+\Delta}_{p,q,s} + (1-t)\left|v\right|^{q+\Delta}_{p,q,s}\right);$$

д) $2 \le p < +\infty$, $p' \le q < p$,

$$\left|t \cdot u + (1-t)v\right|^{p+\Delta}_{p,q,s} + M_5 \cdot \omega_p(t,\Delta) \cdot \left|u - v\right|^{p+\Delta}_{p,q,s} \le$$

$$\le (1+\Delta)^{p+\Delta}\left(t\left|u\right|^{p+\Delta}_{p,q,s} + (1-t)\left|v\right|^{p+\Delta}_{p,q,s}\right);$$

е) $2 \le p < +\infty$, $1 < q \le p'$,

$$\left|t \cdot u + (1-t)v\right|^{q'+\Delta}_{p,q,s} + M_6 \cdot \omega_{q'}(t,\Delta) \cdot \left|u - v\right|^{q'+\Delta}_{p,q,s} \le$$

$$\le (1+\Delta)^{q'+\Delta}\left(t\left|u\right|^{q'+\Delta}_{p,q,s} + (1-t)\left|v\right|^{q'+\Delta}_{p,q,s}\right).$$

*Здесь $u$, $v$ – произвольные элементы из $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, $M_i$ – константы, зависящие от параметров пространства и выбора $\Delta$, но не зависящие от $u$, $v$,* $\omega_k(t, \Delta) = t(1-t)^{k+\Delta} + t^{k+\Delta} \cdot (1-t)$, $t \in (0, 1)$.

Как известно, свойство суперрефлексивности банаховых пространств допускает характеризацию и в терминах базисов Шаудера [12, 13].

Теорема 5. *В каждом из суперрефлексивных пространств $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ и $B^{-s}_{p',q'}(\mathbb{R}^n)$ существуют множества мощности континуума как попарно неэквивалентных условных, так и безусловных нормированных базисов Шаудера.*

Пусть $\{\varphi_i\}$ и $\{\psi_i\}$ – безусловные нормированные базисы Шаудера в $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ и $B^{-s}_{p',q'}(\mathbb{R}^n)$ соответственно, причем $\{\psi_i\}$ – сопряженная система к $\{\varphi_i\}$ [7]. Известно, что каждому базису соответствует некоторая положительная постоянная – константа Гринблюма [13]. В пространствах Бесова $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ эти константы, вообще говоря, зависят от параметров $s, p, q, n$ и, конечно, от самого базиса. Обозначим их соответственно через $D_\varphi$ и $d_\psi$.

Пусть $a_m$ – последовательность коэффициентов разложения произвольного элемента $u \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ по базису $\{\varphi_i\}$.

Т е о р е м а 6. *В пространствах Бесова* $(B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{p,q,s})$ *выполняются неравенства типа Джеймса–Гурария*:

$$L_\psi\left(\sum_{m=1}^{\infty}|a_m|^{\frac{t}{t-1}}\right)^{\frac{t-1}{t}} \le \left\|\sum_{m=1}^{\infty}a_m\varphi_m\right\|_{p,q,s} \le K_\varphi\left(\sum_{m=1}^{\infty}|a_m|^l\right)^{\frac{1}{l}}, \quad (1)$$

*где* $K_\varphi$, $L_\psi$ *– некоторые константы*, $l \in (1, \log_\lambda 2)$, $t \in (1, \log_\mu 2)$, *а параметры* $\lambda$ *и* $\mu$ *определяются так*:

а) $1 < p \le 2,\ p' \le q < +\infty$,

$$\lambda = 2\left(1-\left(\frac{D_\varphi}{2}\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}},\ \mu = 2\left(1-\left(\frac{d_\psi}{2}\right)^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}};$$

б) $1 < p \le 2,\ p \le q \le p'$,

$$\lambda = 2\left(1-\left(\frac{D_\varphi}{2}\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}},\ \mu = 2\left(1-\left(\frac{d_\psi}{2}\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}};$$

в) $1 < p \le 2,\ 1 < q \le p$,

$$\lambda = 2\left(1-\left(\frac{D_\varphi}{2}\right)^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}},\ \mu = 2\left(1-\left(\frac{d_\psi}{2}\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}};$$

г) $2 \le p < +\infty,\ p \le q < +\infty$,

$$\lambda = 2\left(1-\left(\frac{D_\varphi}{2}\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}},\ \mu = 2\left(1-\left(\frac{d_\psi}{2}\right)^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}};$$

д) $2 \le p < +\infty,\ p' \le q < p$,

$$\lambda = 2\left(1-\left(\frac{D_\varphi}{2}\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}},\ \mu = 2\left(1-\left(\frac{d_\psi}{2}\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}};$$

е) $2 \le p < +\infty,\ 1 < q \le p'$,

$$\lambda = 2\left(1-\left(\frac{D_\varphi}{2}\right)^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}},\ \mu = 2\left(1-\left(\frac{d_\psi}{2}\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Другие неравенства для норм, справедливые в произвольных суперрефлексивных банаховых пространствах, были рассмотрены в [15].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Pietsch A.* History of Banach spaces and linear operators. Boston: Birkhauser, 2007.
2. *Barbu V., Precupanu T.* Convexity and optimization in Banach spaces. Springer, 2012.
3. *Schuster T., Kaltenbacher B., Hofmann B., Kazimierski K.S.* Regularization methods in Banach spaces. B.; Boston, 2012.
4. *Balachandran K., Karthikeyan S.* // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 2012. V. 22. № 3. P. 523–531.
5. *Hern'andez E., O'Regan D.* // J. Franklin Institute. 2009. V. 346. P. 95–101.
6. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
7. *Трибель Х.* Теория функциональных пространств. М.: Мир, 1986.
8. *Sawano Y.* Theory of Besov spaces. Springer, 2018.
9. *James R.* // Can. J. Math. 1972. V. XXIV. № 5. P. 896–904.
10. *Pisier G.* Martingale in Banach spaces. Cambridge: Cambridge University Press, 2016.
11. *Prus. B., Smarzewski R.* // J. Math. Anal. Appl. 1987. V. 121. P. 10–21.
12. *James R.* // Pacif. J. Math. 1972. V. 41. № 2. P. 409–419.
13. *Гурарий В.И., Гурарий Н.И.* // Изв. АН СССР. Серия мат. 1971.
14. *Chivukula R. Rao, Sundaresan K.* // J. Math. Anal. Appl. 1979. V. 72. P. 435–445.
15. *Агаджанов А.Н.* // ДАН. 2008. Т. 421. № 3. С. 295–298.

# ON SOME PROPERTIES OF SUPERREFLEXIVE BESOV SPACES

**A. N. Agadzhanov**[a]

[a] *Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS S.N. Vassilyev

The report contains results that are devoted to Besov's superreflective spaces $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Namely, expressions for convexity moduli and smoothness moduli with respect to the "canonical" norms are defined, properties related to the finite representability of Banach spaces and linear compact operators in $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. The paper also presents inequalities of the Prus–Smarzewski type for arbitrary equivalent norms and inequalities of the James–Gurariy type. The latter allow one toobtain two-sided estimates for the norms of elements in $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ using the expansion coefficients of these elements in unconditional normalized Schauder bases.

*Keywords:* superreflexivity, finite representability, Besov spaces, convexity moduli, smoothness moduli