

УДК 519.63

КОМБИНИРОВАННАЯ МОНОТОННАЯ БИКОМПАКТНАЯ СХЕМА, ИМЕЮЩАЯ ПОВЫШЕННУЮ ТОЧНОСТЬ В ОБЛАСТЯХ ВЛИЯНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УДАРНЫХ ВОЛН

© 2020 г. М. Д. Брагин^{1,2,*}, Б. В. Рогов^{1,**}

Представлено академиком РАН Б.Н. Четверушкиным 11.02.2020 г.

Поступило 12.02.2020 г.

После доработки 12.02.2020 г.

Принято к публикации 26.02.2020 г.

Предложен новый метод построения комбинированной схемы сквозного счета, которая монотонно локализует фронты ударных волн и одновременно имеет повышенную точность в областях гладкости рассчитываемых обобщенных решений. В этом методе решение комбинированной схемы строится на основе монотонных решений бикомпактной схемы первого порядка аппроксимации по времени и четвертого порядка аппроксимации по пространству, полученных для разных временных шагов во всей расчетной области. Такой метод построения является существенно более простым по сравнению с ранее предложенным методом. Приведены тестовые расчеты, демонстрирующие преимущества новой схемы по сравнению со схемой WENO5 пятого порядка по пространству и третьего порядка по времени.

Ключевые слова: бикомпактная схема, WENO-схема, комбинированная схема, ударная волна, локальная точность

DOI: 10.31857/S2686954320020071

1. В работах [1, 2] было показано, что NFC (Nonlinear Flux Correction) схемы сквозного счета, к которым относятся MUSCL-схемы, TVD-схемы, WENO-схемы, DG-схемы, CABARET-схемы (ссылки на эти схемы см., например, в [2]), имеют не более чем первый порядок локальной сходимости в областях влияния ударных волн. Как указано в [1–4], причина падения порядка сходимости до первого связана с тем, что в NFC-схемах коррекция численных потоков приводит к снижению их гладкости и, как следствие, к снижению порядка аппроксимации ε -условий Гюго-ни на фронтах ударных волн [1].

В работе [3] был предложен метод построения комбинированных схем сквозного счета, которые монотонно локализируют фронты ударных волн и одновременно имеют повышенную точность в областях гладкости рассчитываемых обобщенных

решений. Решение в комбинированной схеме строится путем коррекции решения базисной немонотонной схемы, которое находится во всей расчетной области и имеет повышенный порядок сходимости в областях влияния ударных волн, где решение является гладким. В областях больших градиентов, где решение базисной схемы имеет нефизические осцилляции, оно корректируется путем численного решения внутренних начально-краевых задач по одной из NFC-схем. Комбинированная схема [3] состояла из разнородных схем: в качестве базисной использовалась неявная симметричная компактная схема третьего порядка слабой аппроксимации, а в качестве внутренней NFC-схемы – монотонизированный вариант явной схемы CABARET второго порядка точности на гладких решениях. Недостаток, связанный с указанной разнородностью схем, был устранен в работе [4], где базисная и внутренняя схемы были немонотонными и монотонизированными вариантами разрывного метода Галёркина. В работах [3, 4] свойства комбинированных схем демонстрировались на расчете модельной одномерной задачи Коши, в которой решение содержит одну изолированную ударную волну. Применение комбинированной схемы [3] к случаю взаимодействующих одномерных ударных волн показывает [5], что реализация комбинирован-

¹ Федеральный исследовательский центр
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша
Российской академии наук, Москва, Россия

² Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева
Сибирского отделения Российской академии наук,
Новосибирск, Россия

*E-mail: michael@bragin.cc

**E-mail: rogov.boris@gmail.com

ной схемы этого типа значительно усложняется по сравнению со случаем одной ударной волны из-за слияния и разъединения расчетных областей для внутренних начально-краевых задач. Сложность реализации комбинированной схемы [3] увеличивается в случае многомерных задач. Поэтому в настоящей работе предлагается принципиально новый метод построения комбинированной схемы сквозного счета с вышеуказанными свойствами. В этом методе построения не требуется решать внутренние начально-краевые задачи, поэтому он является существенно более простым по сравнению с методом построения комбинированных схем в работах [3–5].

2. Для квазилинейной гиперболической системы законов сохранения

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) = 0 \quad (1)$$

рассмотрим задачу Коши на временном интервале $(0, T]$ с периодическими начальными условиями

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{v}(x), \quad \mathbf{v}(x) = \mathbf{v}(x + X), \quad (2)$$

где символ $\partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}$; $\mathbf{u}(x, t)$ — искомая, а $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ — заданная вектор-функция из m компонент; $X > 0$ — период.

Полудискретная бикомпактная схема четвертого порядка аппроксимации для системы уравнений (1) имеет вид (см. [6])

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(A_0^x \mathbf{u}_{j+1/2}) + \Lambda_1^x \mathbf{f}_{j+1/2} &= 0, \\ \frac{d}{dt}(\Lambda_1^x \mathbf{u}_{j+1/2}) + \Lambda_2^x \mathbf{f}_{j+1/2} &= 0, \quad j = 0, 1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (3)$$

где N — число ячеек на отрезке оси Ox с длиной X . Далее будем рассматривать отрезок $[0, X]$. Разностные операторы A_0^x , Λ_1^x , Λ_2^x определяются для произвольной сеточной функции U так:

$$\begin{aligned} A_0^x U_{j+1/2} &= \frac{U_j + 4U_{j+1/2} + U_{j+1}}{6}, \\ \Lambda_1^x U_{j+1/2} &= \frac{U_{j+1} - U_j}{h_{x,j+1/2}}, \\ \Lambda_2^x U_{j+1/2} &= \frac{4(U_j - 2U_{j+1/2} + U_{j+1})}{h_{x,j+1/2}^2}, \end{aligned}$$

где $h_{x,j+1/2} = x_{j+1} - x_j$ — в общем случае переменный шаг сетки по x , обозначаемый далее как h . Система двух обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) (3) решается относительно двух сеточных функций $\mathbf{u}_j(t)$ и $\mathbf{u}_{j+1/2}(t)$, определенных

в целых x_j и полуцелых $x_{j+1/2} = \frac{x_j + x_{j+1}}{2}$ узлах.

Начальные условия (2) для функций $\mathbf{u}_j(t)$ и $\mathbf{u}_{j+1/2}(t)$ будут следующими:

$$\mathbf{u}_j(0) = \mathbf{v}(x_j), \quad \mathbf{u}_{j+1/2}(0) = \mathbf{v}(x_{j+1/2}).$$

Граничное условие периодичности для сеточной функции $\mathbf{u}_j(t)$ имеет вид

$$\mathbf{u}_0(t) = \mathbf{u}_N(t).$$

Дисперсионные свойства бездиссипативной полудискретной схемы (3) в линейном приближении исследованы в работах [7], где показано, что эта схема имеет улучшенные дисперсионные свойства по сравнению с известными компактными схемами того же порядка аппроксимации.

3. Полностью дискретные бикомпактные схемы получаются путем применения какого-либо устойчивого численного метода интегрирования по времени к системе ОДУ (3). В данной работе рассмотрены две такие схемы.

Первая из схем, далее обозначаемая как DIRK1B4, получается путем интегрирования уравнений (3) по неявному методу Эйлера. Она имеет погрешность аппроксимации $O(\tau, h^4)$, является абсолютно устойчивой и консервативной [8]. В работе [8] исследованы дисперсионные и диссипативные свойства, а также свойства монотонности схемы DIRK1B4. Аналитически показано, что эта схема для линейного скалярного уравнения переноса является монотонной по Годунову при числе Куранта $\kappa \geq 0.25$. Отметим, что коэффициент схемной вязкости у данной схемы пропорционален κ и положителен при $\kappa > 0$. Численный эксперимент [8] показал, что схема DIRK1B4 для квазилинейного уравнения Хопфа монотонна, если локальное число Куранта $\kappa \geq 0.15$.

Численные решения второй схемы, обозначаемой как Rich2B4, получаются уточнением разностных решений схемы DIRK1B4 со вторым порядком точности по времени методом экстраполяции Ричардсона. Для этого проводятся два выполнения во всей расчетной области по схеме DIRK1B4 на сетках с временными шагами τ и $\frac{\tau}{2}$. При сгущении пространственно-временной сетки поддерживается постоянство величины отношения шагов $r = \frac{\tau}{h}$. Решение экстраполяционной бикомпактной схемы Rich2B4 в момент времени $t_n = n\tau$ рассчитывается по формуле

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k^n(\text{Rich2B4}; \tau) &= 2\mathbf{u}_k^n\left(\text{DIRK1B4}; \frac{\tau}{2}\right) - \\ &- \mathbf{u}_k^n(\text{DIRK1B4}; \tau), \quad k = j, j + \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (4)$$

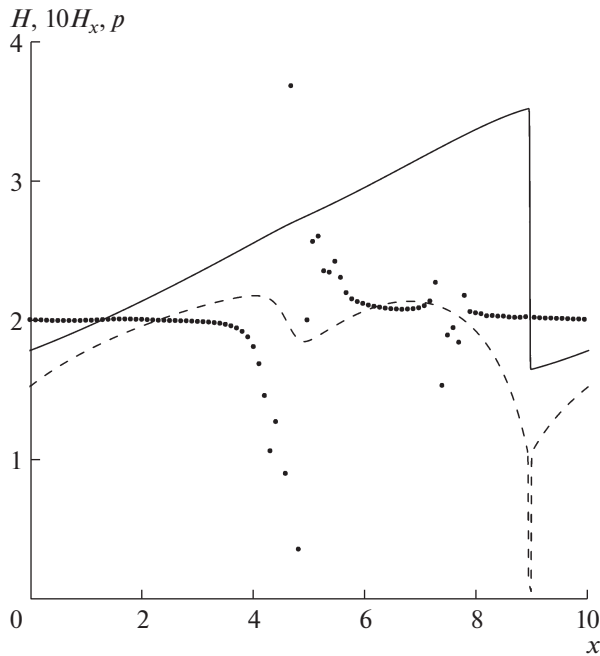


Рис. 1. Профили глубины H (сплошная линия) и ее первой разностной производной H_x (штриховая линия), полученные по схеме DIRK1B4 на сетке с $N = 2000$. Точками изображены порядки локальной сходимости схемы Rich2B4, найденные по формуле (8) при $N = 2000$.

где первый параметр сеточной функции $\mathbf{u}_k^n$ указывает на схему, а второй — на временной шаг сетки, на которой определялось решение.

4. В качестве конкретной гиперболической системы (1) возьмем систему уравнений первого приближения теории мелкой воды в случае прямоугольного русла без учета донного трения, для которой

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} H \\ Q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{H} + \frac{gH^2}{2} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где H , Q и $v = \frac{Q}{H}$ — глубина, расход и горизонтальная скорость жидкости, g — ускорение свободного падения (в расчетах полагалось, что $g = 10$). Периодические начальные условия (2) для системы (1), (5) задаются так:

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= a \sin\left(\frac{2\pi x}{X} + \frac{\pi}{4}\right), \\ H(x, 0) &= \frac{1}{4g} \left[a \sin\left(\frac{2\pi x}{X} + \frac{\pi}{4}\right) + b \right]^2, \end{aligned} \quad (6)$$

где $a = 2$, $b = 10$, $X = 10$.

Результаты расчета задачи Коши (1), (5), (6) для момента времени $T = 1$ представлены на

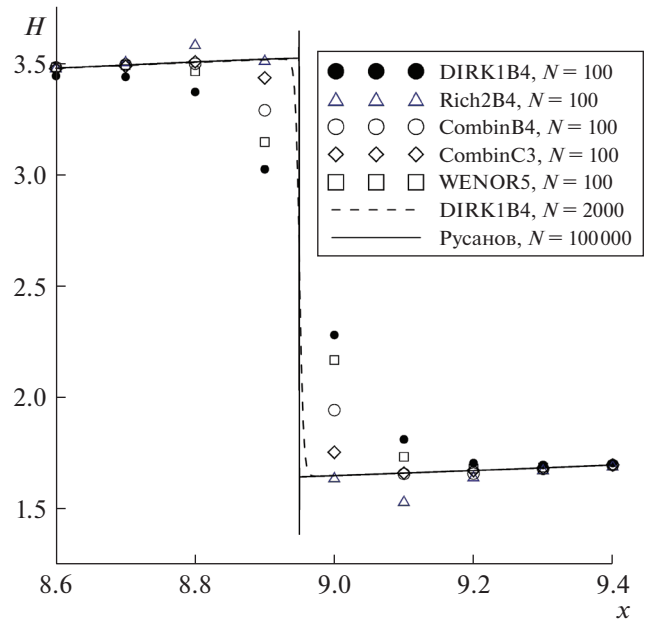


Рис. 2. Профили глубины H вблизи ударной волны.

рис. 1, 3, 4 (на отрезке $[0, X]$) и на рис. 2 (в окрестности фронта ударной волны).

На рис. 1 приведены профили глубины H и величины $(H_x)_k = 2 \frac{H_{k+1/2} - H_k}{h}$ как в целых $k = j$,

так и полуцелых $k = j + \frac{1}{2}$ узлах на отрезке $[0, X]$.

Эти профили получены по схеме DIRK1B4 на мелкой сетке с $N = 2000$. Значения величины H , рассчитанной по той же схеме на сетках с $N = 2000$ и $N = 100$, а также по схеме Rich2B4 на сетке с $N = 100$, показаны в окрестности ударной волны на рис. 2. Укажем на то, схема DIRK1B4 выдает профили H и H_x , свободные от нефизических осцилляций, в отличие от схемы Rich2B4, порождающей осцилляции вблизи ударной волны.

Рассмотрим вопрос о поведении погрешности решения схемы Rich2B4 при сгущении сетки. В силу неизвестности аналитического решения вместо него для вычисления погрешностей берется решение, рассчитанное по схеме Русанова [9] третьего порядка аппроксимации на очень мелкой сетке с $h = 10^{-4}$ и $r = 0.05$. Решение этой схемы при $T = 1$ содержит нефизические осцилляции, локализованные в малой окрестности ударной волны, что демонстрирует рис. 2. Однако этот дефект решения схемы Русанова приемлем для оценки погрешности решений Rich2B4, рассчитанных на сетках с шагом $h > 10^{-3}$. На рис. 3 показаны распределения абсолютных погрешностей $err(H)$ глубины H , полученные по схеме Rich2B4 на последовательности сгущающихся сеток с $N = 500$, 1000, 2000 и 4000 при отношении шагов $r = 0.05$.

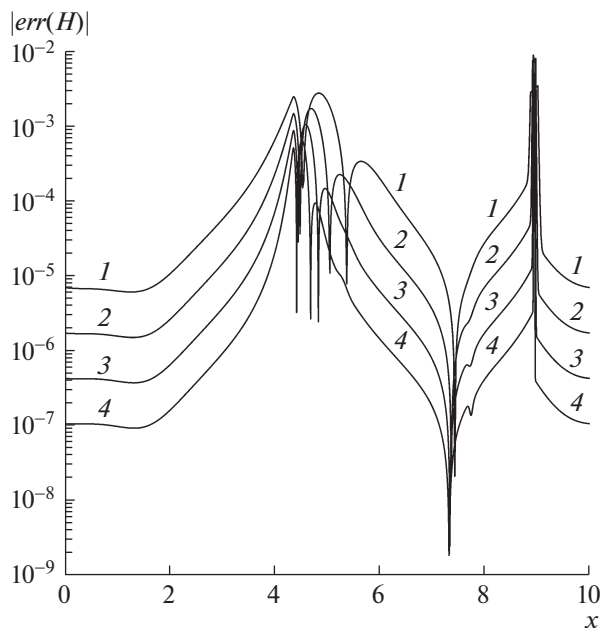


Рис. 3. Абсолютные погрешности глубины H для схемы Rich2B4. Кривые: 1 – $N = 500$, 2 – 1000, 3 – 2000, 4 – 4000.

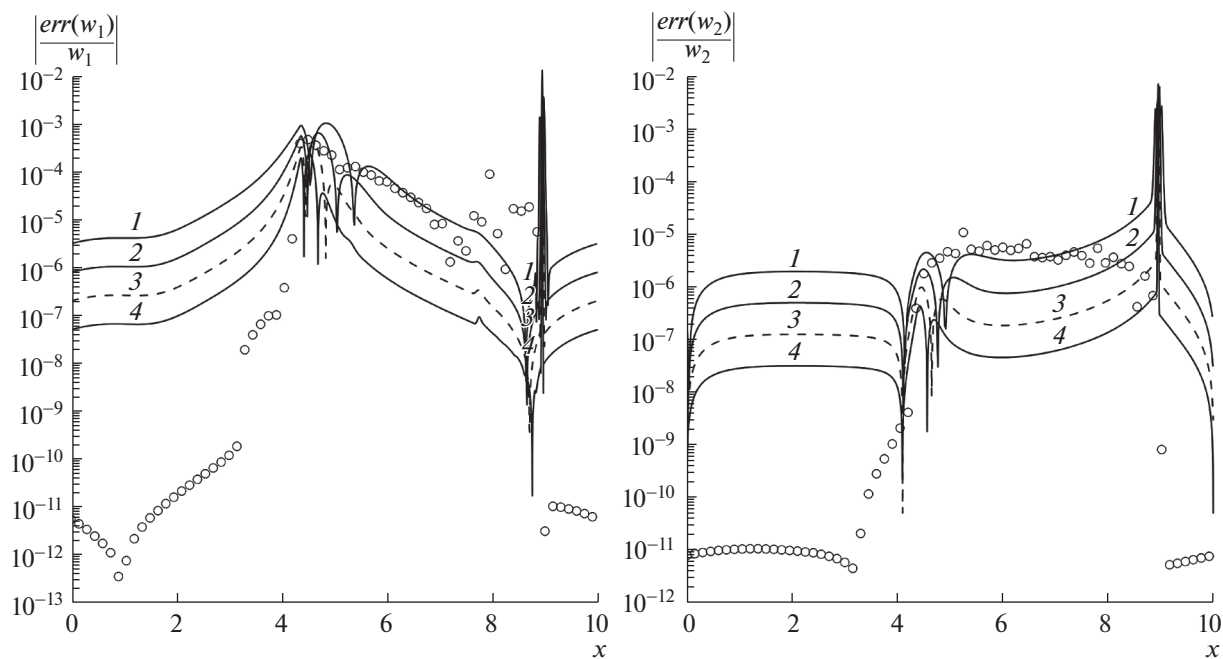


Рис. 4. Относительные погрешности инвариантов $w_{1,2}$ для схемы CombinB4. Кривые: 1 – $N = 500$, 2 – 1000, 3 – 2000, 4 – 4000. Точками показаны результаты для схемы WENO5 на сетке с $N = 2000$.

Кроме того, по $err(H)$ были оценены порядки p локальной сходимости глубины H :

$$p(2N) = \log_2 \left(\frac{err(H(N))}{err(H(2N))} \right).$$

На рис. 1 точками в каждом двадцатом целом узле показано распределение p для $N = 2000$. Из данных на рис. 1 и 3 следует, что при сгущении сетки локальные абсолютные погрешности H убывают со вторым порядком всюду за исключением тех областей, где ошибка резко возрастает или убывает.

ет. Очевидно, резкое возрастание имеет место в окрестности ударной волны. Из рис. 1 видно, что резкое убывание происходит в окрестностях точек экстремума H_x , т.е. там, где H ведет себя как линейная функция x . Такое поведение ошибки характерно для схем второго порядка точности и выше.

5. Построим из рассмотренных выше бикомпактных схем комбинированную схему, монотонно локализирующую фронты ударных волн и имеющую повышенную точность в областях гладкости рассчитываемых обобщенных решений. При этом будем следовать концепции [3], в которой базисная схема повышенного порядка сходимости корректируется в окрестности ударных волн с помощью монотонной внутренней схемы.

Решение комбинированной схемы CombinB4 зададим по формулам:

$$u_s(\text{CombinB4}; \tau) = u_s^B + \alpha_s D_s, \quad D_s = u_s^A - u_s^B, \quad (7)$$

$$u_s^A = u_s(\text{DIRK1B4}; 0.5\tau), \quad u_s^B = u_s(\text{Rich2B4}; \tau),$$

$$\alpha_s = \begin{cases} 0 & \text{при } |D_s| \leq CN_s, \\ 1 - \frac{CN_s}{|D_s|} & \text{иначе,} \end{cases} \quad (8)$$

$$N_s = \max_{x \in \Omega_N} u_s^A - \min_{x \in \Omega_N} u_s^A,$$

где u_s — s -я компонента искомой вектор-функции $\mathbf{u}$, $C > 0$ — задаваемый параметр комбинированной схемы, Ω_N — пространственная сетка на отрезке длины периода X , состоящая из N ячеек. В формулах (7), (8) u_s , u_s^A , u_s^B — это сеточные функции, у которых опущен нижний индекс $k = j$, $j + \frac{1}{2}$ и верхний индекс n , поскольку эти формулы задают локальные в пространстве и во времени связи между указанными сеточными функциями. Согласно формулам (7), (8) базисной схемой в предложенной комбинированной схеме является бикомпактная схема Rich2B4, а решение внутренней схемы, область определения которой расположена в окрестности фронта ударной волны и задается неравенством $|D_s| > CN_s$, является нелинейной комбинацией решений бикомпактных схем DIRK1B4 и Rich2B4.

На рис. 2 вблизи фронта ударной волны показаны профили глубины H , посчитанные по комбинированной бикомпактной схеме CombinB4, по схеме WENO5 и по комбинированной схеме CombinC3 [3] на сетке с $N = 100$. У схемы CombinB4 параметр $C = 10^{-2}$. Схема WENO5 имеет пятый порядок аппроксимации по пространству и третий по времени. У комбинированной схемы CombinC3 [3] базисной схемой является компактная схема третьего порядка классической и сла-

бой аппроксимации, а внутренней схемой — монотонизированная версия CABARET-схемы второго порядка классической аппроксимации. Из данных на рис. 2, во-первых, видно, что решение схемы CombinB4 не имеет осцилляций. Во-вторых, схема CombinB4 размазывает фронт ударной волны больше, чем схема CombinC3, но меньше, чем схема WENO5. Другими словами, уровень диссипации схемы CombinB4 находится между уровнями диссипации схем WENO5 и CombinC3.

На рис. 4 показаны распределения относительных погрешностей инвариантов Римана $w_{1,2} = v \mp 2c$ для схемы CombinB4 на последовательности сгущающихся сеток. Величина $c = \sqrt{gH}$ есть скорость распространения малых возмущений. Из данных на этом рисунке следует, что локальные относительные погрешности инвариантов w_1 , w_2 убывают при сгущении сетки со вторым порядком подобно локальным абсолютным погрешностям H , см. рис. 3. На рис. 4 дается сравнение погрешностей $w_{1,2}$, полученных по схемам CombinB4 (штриховые линии) и WENO5 (точки) на сетке с $N = 2000$. Видно, что в области влияния нестационарной ударной волны (в следе волны [3]), т.е. на отрезке $x \in [4, 9]$, погрешность схемы CombinB4 в 10–15 раз меньше, чем у схемы WENO5. Отметим, что благодаря простоте построения комбинированной бикомпактной схемы ее можно использовать для расчетов многомерных задач с взаимодействующими ударными волнами без принципиальных затруднений.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Пункты 4 и 5 работы выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 16–11–10033).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Остапенко В.В. // ЖВМиМФ. 2000. Т. 40. № 12. С. 1857–1874.
2. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Остапенко В.В., Тишкин В.Ф. // ЖВМиМФ. 2018. Т. 58. № 8. С. 148–156.
3. Ковыркина О.А., Остапенко В.В. // ДАН. 2018. Т. 478. № 5. С. 517–522.
4. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Остапенко В.В., Тишкин В.Ф. // ДАН. 2019. Т. 489. № 2. С. 119–124.
5. Остапенко В.В., Хандеева Н.А. // ДАН. 2019. Т. 485. № 6. С. 691–696.
6. Rogov B.B. // ДАН. 2012. Т. 445. № 6. С. 631–635.
7. Rogov B.B., Брагин М.Д. // ДАН. 2017. Т. 475. № 2. С. 140–144.
8. Михайловская М.Н., Rogov B.B. // ЖВМиМФ. 2012. Т. 52. № 4. С. 672–695.
9. Русанов В.В. // ДАН СССР. 1968. Т. 180. № 6. С. 1303–1305.

COMBINED MONOTONE BICOMPACT SCHEME WITH HIGHER ORDER ACCURACY IN DOMAINS OF INFLUENCE OF NONSTATIONARY SHOCK WAVES

M. D. Bragin^{a,b} and B. V. Rogov^a

^a *Institute for Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

^b *Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS B.N. Chetverushkin

A new method is proposed for constructing a combined shock-capturing scheme that monotonically localizes shock wave fronts and at the same time has increased accuracy in the smoothness regions of the calculated generalized solutions. In this method, the solution of the combined scheme is constructed on the basis of monotonic solutions of a bcompact scheme of the first order of approximation in time and fourth order of approximation in space, obtained for different time steps in the entire calculation domain. This method of construction is much simpler compared to the previously proposed method. Test calculations are presented that demonstrate the advantages of the new scheme compared to the WENO5 scheme of the fifth order of approximation in space and the third order of approximation in time.

Keywords: bcompact scheme, WENO scheme, combined scheme, shock wave, local accuracy