ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 491, с. 57–60

МАТЕМАТИКА

УДК 517.958

АТТРАКТОРЫ АВТОНОМНОЙ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

© 2020 г. В. Г. Звягин[1,*], М. В. Казначеев[1,]**

Представлено академиком РАН Е.И. Моисеевым 27.06.2019 г.
Поступило 27.06.2019 г.
После доработки 27.06.2019 г.
Принято к публикации 24.01.2020 г.

В работе изучается предельное поведение слабых решений автономной модели движения нелинейно-вязкой жидкости, в ситуации, когда время стремится к бесконечности. А именно для решений рассматриваемой модели устанавливается существование слабых решений на положительной полуоси, определяется траекторное пространство, соответствующее решениям этой модели, и на основе теории траекторных пространств доказывается существование вначале минимального траекторного аттрактора, а затем и глобального аттрактора в фазовом пространстве. Таким образом, оказывается, что каково бы ни было начальное состояние системы, описывающей рассматриваемую модель, с течением времени оно “забывается” и неограниченно приближается к глобальному аттрактору.

Ключевые слова: аттракторы, траекторное пространство, нелинейно-вязкая жидкость, слабое решение

DOI: 10.31857/S2686954320020277

1. Эволюционные уравнения математической физики, и в частности гидродинамики, можно истолковывать как законы эволюции некоторых систем. Математическое описание системы включает в себя некоторое множество, называемое фазовым пространством, элементы которого отождествляются с состояниями системы, и закон эволюции, который показывает, как состояние меняется со временем.

При изучении динамики систем особый интерес представляет их предельное поведение, когда время стремится к бесконечности. На практике часто встречаются системы со следующим свойством: “на бесконечности” их динамика сосредотачивается на небольшой части фазового пространства, называемой глобальным аттрактором. Каким бы ни было начальное состояние системы, со временем оно “забывается”, и состояние системы неограниченно приближается к глобальному аттрактору. В случае таких систем естественно изучать динамику вблизи глобальных аттракторов, поскольку иные состояния заведомо “преходящи”. Это причина того, что изучение существования и свойств глобальных аттракторов актуально для математических проблем современного естествознания и, в частности, для гидродинамики.

Для доказательства существования аттракторов уравнений в частных производных М.И. Вишиком и В.В. Чепыжовым и независимо Дж. Селлом [1, 2] был предложен подход, основанный на рассмотрении траекторных пространств и траекторных аттракторов. Основная идея этого подхода состоит в том, чтобы рассматривать траекторное пространство — некоторое множество $\mathcal{H}^+$, содержащееся в пространстве функций времени со значениями в банаховом пространстве и состоящее из решений рассматриваемой системы. На этом множестве рассматривается полугруппа трансляций $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, действующих по правилу $T(t)g(s) = g(s+t)$. Ясно, что полугруппа трансляций может действовать на траекторном пространстве $\mathcal{H}^+$, если оно трансляционно инвариантно, т.е. $T(t)\mathcal{H}^+ \subset \mathcal{H}^+$ при $t \geq 0$. В таком случае к полугруппе $\{T(t)\}$ можно применять аналоги методов теории динамических систем. С помощью такого подхода удалось изучить аттракторы трехмерной системы Навье—Стокса (см. [3]). Однако в некоторых задачах гидродинамики условие трансляционной инвариантности пространства траекторий оказалось ограничительным. В связи с этим появилась необходимость развития теории аттракторов траекторных пространств для случая трансляционной неинвариантности пространства траекторий, что и удалось сделать в [4] для автономного случая, в [5] для

[1]*Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия*
**E-mail: zvg_vsu@mail.ru*
***E-mail: m.v.kaznacheev@yandex.ru*

случая равномерных аттракторов. В настоящей работе рассматривается автономная модель движения нелинейно-вязкой жидкости и для нее, на основе трансляционно неинвариантных траекторных пространств, устанавливается существование минимального траекторного и глобального аттракторов.

2. Вначале опишем основные понятия аттракторов неинвариантных траекторных пространств (более подробно см. [6, 7]). Рассмотрим два банаховых пространства E, E_0, будем предполагать, что E рефлексивно и непрерывно вложено в E_0.

Пространство $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ состоит из непрерывных функций, определенных на $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ и принимающих значения в пространстве E_0. Данное пространство является метрическим. Метрика в $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ обозначается символом

$$\rho(u, v) = \|u - v\|_{C(\mathbb{R}_+; E_0)}.$$

Пространство $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ состоит из функций u, определенных почти всюду на $\mathbb{R}_+$ и принимающих значения в E, для которых найдется число $\alpha(u)$ такое, что $\|u\|_E \leq \alpha(u)$ при почти всех $t \in \mathbb{R}_+$. Данное $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ является полным и нормированным. Норма в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ определяется равенством

$$\|u\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+; E)} = \operatorname*{vrai\,max}_{t \in \mathbb{R}_+} \|u(t)\|_E.$$

Рассмотрим непустое семейство функций $\mathcal{H}^+ \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$. Множество $\mathcal{H}^+$ будем называть пространством траекторий, а его элементы – траекториями.

Определение 1. Множество $\mathcal{A} \subset E$ называется глобальным аттрактором (в E_0) пространства траекторий $\mathcal{H}^+$, если оно удовлетворяет следующим условиям:

(i) множество $\mathcal{A}$ компактно в E_0 и ограничено в E;

(ii) для всякого ограниченного в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ множества $B \subset \mathcal{H}^+$ выполняется условие притягивания

$$\sup_{u \in B} \inf_{y \in \mathcal{A}} \|u(t) - y\|_{E_0} \to 0 \quad (t \to \infty);$$

(iii) множество $\mathcal{A}$ является наименьшим по включению, удовлетворяющим условиям (i) и (ii).

Определение 2. Множество $\mathcal{U} \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ называется минимальным траекторным аттрактором (пространства траекторий $\mathcal{H}^+$), если оно удовлетворяет следующим условиям:

(i) множество $\mathcal{U}$ компактно в $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ и ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$;

(ii) имеет место равенство $T(t)\mathcal{U} = \mathcal{U}$ для всех $t \geq 0$;

(iii) множество $\mathcal{U}$ является притягивающим, т.е. для любого множества $B \subset \mathcal{H}^+$, ограниченного в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$, выполняется условие

$$\sup_{u \in B} \inf_{v \in \mathcal{U}} \|T(h)u - v\|_{C(\mathbb{R}_+; E_0)} \to 0 \quad (h \to \infty);$$

(iiii) множество U является наименьшим по включению множеством, удовлетворяющим условиям (i)–(iii).

Определение 3. Множество $P \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ называется поглощающим для $\mathcal{H}^+$, если для каждого множества $B \subset \mathcal{H}^+$, ограниченного в норме $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$, найдется $t_B \geq 0$, такое, что $T(t)B \subset P$ при $t \geq t_B$.

Теорема 1 (см. [6]). *Пусть существует компактное в $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ и ограниченное в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ поглощающее множество P для пространства траекторий $\mathcal{H}^+$. Тогда существует минимальный траекторный аттрактор $\mathcal{U}$ пространства траекторий $\mathcal{H}^+$.*

Теорема 2 (см. [6]). *Пусть существует минимальный траекторный аттрактор $\mathcal{U}$ пространства траекторий $\mathcal{H}^+$. Тогда существует глобальный аттрактор (в E_0) $\mathcal{A}$ пространства траекторий $\mathcal{H}^+$, и справедливо равенство*

$$\mathcal{A} = \mathcal{U}(t), \quad t \geq 0.$$

3. Перейдем к описанию начально-краевой задачи для рассматриваемой модели движения нелинейно-вязкой жидкости.

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, с липшицевой границей $\partial\Omega$, $T > 0$ – заданное число, $Q_T := \Omega \times [0, T]$. Система уравнений с начальными и краевыми условиями, описывающая движение рассматриваемой жидкости, имеет вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i(t,x) \frac{\partial v(t,x)}{\partial x_i} - \\ - \operatorname{Div}\{2\psi(I_2(v(t,x)))\varepsilon(v(t,x))\} + \\ + \operatorname{grad} p(t,x) = f(t,x), (t,x) \in Q_T;\end{gathered} \tag{1}$$

$$\begin{gathered}\operatorname{div} v = 0,\ (t,x) \in Q_T; \quad v(0,x) = v^0, \quad x \in \Omega; \\ v(t,x) = 0, \quad x \in [0,T] \times \partial\Omega.\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $v(t,x) = (v_1(t,x), \ldots, v_n(t,x))$ и $p(t,x)$ – вектор-функция скорости и функция давления среды соответственно, $f(t,x)$ – плотность внешних сил. Заданная непрерывно дифференцируемая скалярная функция ψ, определенная на интервале $[0, \infty)$, характеризует вязкость жидкости. Следуя [8], предполагаются следующие ограничения на функцию ψ:

$$\begin{aligned} &\text{а)} \quad 0 < m_1 \le \psi(s) \le M_1 < \infty, \quad s \in [0, \infty]; \\ &\text{б)} \quad |s\psi'(s)| \le M_2 < \infty, \quad s \in [0, \infty]; \\ &\text{в)} \quad -s\psi'(s) \le \psi(s) \quad \text{при} \quad \psi'(s) < 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Далее, в системе (1)

$$\varepsilon(v) = \{\varepsilon_{ij}(v)\}_{i,j=\overline{1,n}}, \quad \varepsilon_{ij}(v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

есть тензор скоростей деформаций, а $I_2(v)$ определяется равенством $I_2^2(v) = \varepsilon(v) : \varepsilon(v) = \sum_{i,j=1}^n \varepsilon_{ij}^2(v)$. Здесь для произвольных квадратных матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ используется символ $A : B = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}b_{ij}$, и символ $\mathrm{Div}C$, обозначающий дивергенцию тензора $C = (c_{ij}(t,x))$, т.е. вектор

$$\mathrm{DivC} = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial c_{1j}(t,x)}{\partial x_j}, \ldots, \sum_{j=1}^n \frac{\partial c_{nj}(t,x)}{\partial x_j}\right).$$

Разрешимость в слабом смысле начально-краевой задачи (1), (2) с условием (3) на функцию ψ в двумерном случае установлена В.Г. Литвиновым (см. [8]). В трехмерном случае локальная разрешимость этой задачи в сильном смысле установлена П.Е. Соболевским [9]. Разрешимость в слабом смысле некоторого обобщения этой модели в двумерном и трехмерном случае была установлена в [10].

Через $C_0^\infty(\Omega)^n$ будем обозначать пространство вектор-функций на Ω со значениями в $\mathbb{R}^n$ класса C^∞ с компактным носителем, содержащимся в Ω. Пусть $\mathcal{V} = \{v\colon v \in C_0^\infty(\Omega)^n, \mathrm{div}v = 0\}$ — подмножество соленоидальных вектор-функций; H — замыкание $\mathcal{V}$ по норме пространства $L_2(\Omega)^n$; V — замыкание $\mathcal{V}$ по норме пространства $W_2^1(\Omega)^n$. Через V^* обозначим сопряжение к V пространство.

Введем пространство, в котором рассматривается проблема существования слабых решений задачи (1), (2):

$$W_{2,1} = \{v\colon v \in L_2(0,T;V) \cap L_\infty(0,T;H), \\ v' \in L_1(0,T;V^*)\}.$$

Через $\langle f, \varphi\rangle$ будем обозначать действие функционала $f \in X^*$ на элемент $\varphi \in X$.

О п р е д е л е н и е 4. Пусть $v^0 \in H$, $f \in L_2(0,T; V^*)$. С л а б ы м р е ш е н и е м задачи (1), (2) на отрезке $[0, T]$ называется функция $v \in W_{2,1}$, удовлетворяющая соотношению

$$\langle v', \varphi\rangle - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \\ + 2\int_\Omega \psi(I_2(v))\varepsilon(v) : \varepsilon(\varphi) dx = \langle f, \varphi\rangle, \tag{4}$$

при всех $\varphi \in V$, п.в. $t \in [0,T]$, и начальному условию $v|_{t=0} = v^0$.

Поскольку в работе рассматриваются аттракторы для автономной модели движения нелинейно-вязкой жидкости, то в дальнейшем будем предполагать, что правая часть системы (1) не зависит от переменной t и $f \in V^*$.

Для введения пространства траекторий системы нелинейно-вязкой жидкости будем использовать следующую конкретизацию банаховых пространств E и E_0, а именно $E = H$ и $E_0 = V^*$. В качестве пространства траекторий рассмотрим множество $\mathcal{H}^+$, состоящее из функций v, которые

(i) принадлежат классу $v \in L_2^{\mathrm{loc}}(R_+, V) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+, H)$;

(ii) удовлетворяют интегральному тождеству (4) для всех $\varphi \in V$ и для почти всех значений $t \in \mathbb{R}_+$;

(iii) удовлетворяют оценке

$$\|v(t)\|^2_{L_\infty(t,t+1;H)} + \|v(t)\|^2_{L_2(t,t+1;V)} \le \\ \le C_1(e^{-2\gamma t}\|v\|^2_{L_\infty(\mathbb{R}_+;H)} + \|f\|^2_{V^*}). \tag{5}$$

Т е о р е м а 3. *Определенное выше пространство траекторий $\mathcal{H}^+$ непусто и вложено в $C(\mathbb{R}_+;V^*) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; H)$.*

Т е о р е м а 4. *Пусть $f \in V^*$. Тогда существует компактное в $C(R_+;V^*)$ и ограниченное в $L_\infty(R_+;H)$ поглощающее множество $P \subset C(R_+;V^*) \cap L_\infty(R_+; H)$ для пространства траекторий $\mathcal{H}^+$, состоящее из функций v, которые при всех $t \ge 0$ удовлетворяют неравенству*

$$\|v\|_{L_\infty(t,t+1;H)} + \|v\|_{L_2(t,t+1;V)} + \|v'\|_{L_{4/3}(t,t+1;V^*)} \le 2R_0.$$

Из теоремы 1 и теоремы 4 следует

Т е о р е м а 5. *Пусть $f \in V^*$. Тогда существует минимальный траекторный аттрактор $\mathcal{U}$ пространства траекторий $\mathcal{H}^+$.*

А из теоремы 2 и 5 следует

Т е о р е м а 6. *Пусть $f \in V^*$. Тогда существует глобальный аттрактор A пространства траекторий $\mathcal{H}^+$ и выполняется соотношение $\mathcal{A} = \mathcal{U}(t)$, $t \ge 0$, где $\mathcal{U}(t)$ — сечение минимального траекторного аттрактора пространства $\mathcal{H}^+$.*

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19–11–00146).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chepyzhov V.V., Vishik M.I.* Attractors for equations of mathematical physics. Providence: American Mathematical Society Colloquium Publications, 49 American Mathematical Society, 2002.
2. *Sell G.R., You Y.* Dynamics of Evolutionary Equations. N.Y.: Springer, 1998. 672 p.
3. *Вишик М.И., Чепыжов В.В.* // Матем. заметки. 2002. Т. 71. № 2. С. 194–213.
4. *Vorotnikov D.A., Zvyagin V.G.* // J. Math. Fluid Mech. 2008. V. 10. P. 19–44.
5. *Vorotnikov D.A., Zvyagin V.G.* // J. Math. Anal. Appl. 2007. V. 325. P. 438–458.
6. *Звягин В.Г., Кондратьев С.К.* // Успехи мат. наук. 2014. Т. 69. № 5(419). С. 81–156.
7. *Zvyagin V.G., Vorotnikov D.A.* Topological Approximation Methods for Evolutionary Problems of Nonlinear Hydrodynamics. B., N.Y.: Walter de Gruyter, 2008. 243 p.
8. *Литвинов В.Г.* Движение нелинейно-вязкой жидкости. М.: Наука, 1982. 376 c.
9. *Соболевский П.Е.* // ДАН СССР. 1985. Т. 285. № 1. С. 44–48.
10. *Dmitrienko V.T., Zvyagin V.G.* // Abstract and Applied Analysis. 1997. V. 2. № 1. P. 1–45.

ATTRACTORS OF AUTONOMOUS MODEL OF NONLINEAR VISCOUS FLUID

V. G. Zvyagin[a] and M. V. Kaznacheev[a]

[a]*Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS E.I. Moiseev

The paper studies the limiting behavior of weak solutions of the autonomous model of motion of a nonlinear viscous fluid in a situation where time tends to infinity. Namely, for the solutions of the model under consideration, the existence of weak solutions on the positive half-axis is established, the trajectory space corresponding to the solutions of this model is determined, and on the basis of the theory of trajectory spaces, the existence of a minimum trajectory attractor first, and then a global attractor in the phase space is proved. Thus, it turns out that what would be the initial state of the system describing the model in question over time, it is “forgotten"and infinitely approaching the global attractor.

Keywords: attractors, trajectory space, nonlinear viscous fluid, weak solution