ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 491, с. 53–56

МАТЕМАТИКА

УДК 517.958

АЛЬФА-МОДЕЛЬ НАВЬЕ–СТОКСА С ВЯЗКОСТЬЮ, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

© 2020 г. А. В. Звягин*

Представлено академиком РАН Е.И. Моисеевым 26.06.2019 г.
Поступило 30.07.2019 г.
После доработки 30.07.2019 г.
Принято к публикации 12.12.2019 г.

В работе устанавливается существование слабого решения для альфа-модели системы Навье–Стокса с коэффициентом вязкости, зависящим от температуры. Для доказательства существования используется аппроксимационно-топологический метод исследования задач гидродинамики.

Ключевые слова: альфа-модель, теорема существования, система Навье–Стокса, слабое решение
DOI: 10.31857/S2686954320020265

ВВЕДЕНИЕ

На $Q_T = \Omega\times[0,T]$, где $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$ и $T > 0$, рассматривается следующая начально-краевая задача:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - 2\mathrm{Div}\,(\mu(\theta)\mathscr{E}(v)) + \nabla p = f; \tag{1}$$

$$v = (I - \alpha^2\Delta)u; \quad \mathrm{div}\, u = 0; \tag{2}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + (u\cdot\nabla)\theta - \chi\Delta\theta = 2\mu(\theta)\mathscr{E}(u) : \mathscr{E}(v) + g; \tag{3}$$

$$u|_{t=0} = u_0; \quad u|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0; \quad \Delta u|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0; \tag{4}$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0; \quad \theta|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0. \tag{5}$$

Здесь v — вектор-функция скорости движения частицы среды, u — вектор-функция модифицированной скорости движения частицы среды, $\theta(t,x)$ — функция температуры среды, p — функция давления, f — функция плотности внешних сил, g — источник внешнего тепла, $\alpha > 0$ — скалярный параметр, $\mu(\cdot) > 0$ — коэффициент вязкости среды, $\chi > 0$ — коэффициент теплопроводности, u_0 и θ_0 — начальные скорость и температура. Через $\mathscr{E} = (\mathscr{E}_{ij}(v))$, $\mathscr{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, обозначается тензор скоростей деформации.

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
**E-mail: zvyagin.a@mail.ru*

Изучаемая начально-краевая задача с постоянной вязкостью называется альфа-моделью системы Навье–Стокса и, по-видимому, является одной из первых детально изученных альфа-моделей (см. [1]). В [2] доказано существование и единственность слабого решения для данной модели с постоянной вязкостью, а также построен глобальный аттрактор для порождаемой этим решением соответствующей полугруппы.

Рассмотрение системы (1)–(5) с вязкостью, зависящей от температуры, приводит к появлению уравнения баланса энергии, что существенно осложняет исследуемую задачу (см. обзорную статью [3]). А именно, появляется параболическое уравнение с коэффициентами из соболевских пространств и правой частью из $L_1(Q_T)$. Существование слабых решений данной параболической задачи доказано в [4]. На основе полученного результата удалось доказать разрешимость в слабом смысле ряда термо-моделей неньютоновской гидродинамики (см. [5–7]). Частный случай для изучаемой начально-краевой задачи, а именно, альфа-модель Лере с вязкостью, зависящей от температуры, был рассмотрен в работе [8]. В данном сообщении на основе разработанного подхода доказывается существование слабых решений для альфа-модели системы Навье–Стокса с вязкостью, зависящей от температуры.

Для формулировки слабого решения рассматриваемой задачи введем шкалу пространств V^β, $\beta\in\mathbf{R}$ (см. [9, § 4.2]). Для этого рассмотрим проектор Лере $P\colon L_2(\Omega)\to V^0$ (V^0 — замыкание $\mathscr{V} = \{u\in C_0^\infty(\Omega)^n,\ \mathrm{div} u = 0\}$ по норме $L_2(\Omega)$) и оператор $A = -P\Delta$, определенный на $D(A) = V^2 =$

$= H^2(\Omega) \cap V^1$ (V^1 – замыкание $\mathcal{V}$ по норме $H^1(\Omega)$). Этот оператор может быть продолжен в V^0 до замкнутого оператора, который является самосопряженным положительным оператором с компактным обратным. Пусть $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_k \le \ldots$ – собственные значения оператора A. В силу теоремы Гильберта о спектральном разложении компактных операторов, собственные функции $\{e_j\}$ оператора A образуют ортонормированный базис в V^0. Обозначим через $E_\infty = \left\{ u = \sum_{j=1}^{\infty} u_j e_j : u_j \in \mathbb{R} \right\}$ множество конечных линейных комбинаций, составленных из e_j, и определим пространство V^β, $\beta \in \mathbb{R}$, как пополнение E_∞ по норме

$$\|u\|_{V^\beta} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\beta |u_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{где} \quad u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k e_k. \tag{6}$$

В [9, Лемма 4.5] показано, что на пространстве V^β, $\beta > -\frac{1}{2}$, норма (6) эквивалентна норме $\|\cdot\|_{H^\beta(\Omega)}$ пространства $H^\beta(\Omega)$. Через $V^{-\beta} = (V^\beta)^*$, $\beta \in \mathbb{N}$, мы будем обозначать сопряженное пространство к V^β. Кроме того, из определения шкалы пространств V^β следует, что оператор A: $V^\beta \to V^{\beta-2}$ непрерывно обратим.

Введем пространства, в котором будет доказана разрешимость изучаемой задачи: $W_1 = \{u \in L_2(0,T;V^2) \cap L_\infty(0,T;V^1),\ u' \in L_2(0,T;V^{-2})\}$ и $W_2 = \{\theta\colon \theta \in L_p(0,T;\ W_p^1(\Omega)),\ \ \theta' \in L_1(0,T;\ W_p^{-1}(\Omega)),\ 1 < p < +\infty\}$.

Определение 1. *Слабым решением задачи* (1)–(5) называется пара (u, θ), где $u \in W_1$ и $\theta \in W_2$, удовлетворяющая при всех $\varphi \in V^2$, $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ и почти всех $t \in [0,T]$ соотношениям

$$\begin{gathered}\langle (J + \alpha^2 A)u', \varphi \rangle - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} u_i ((J + \alpha^2 A)u)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \\ + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} ((J + \alpha^2 A)u)_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \varphi_j dx - \\ - 2\int_\Omega \mu(\theta)(J + \alpha^2 A)u \cdot \Delta\varphi dx = \langle f, \varphi \rangle,\end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered}\int_\Omega \frac{\partial \theta}{\partial t} \phi dx - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} u_i \theta_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} dx + \\ + \chi \int_\Omega \mathcal{E}(\theta) : \mathcal{E}(\phi) dx = \\ = 2\int_\Omega (\mu(\theta)\mathcal{E}(u) : \mathcal{E}(u)) : \phi dx + \langle g, \phi \rangle,\end{gathered} \tag{8}$$

и начальным условиям $u|_{t=0} = u_0$ и $\theta|_{t=0} = \theta_0$. Здесь $J = PI$, где P – проектор Лере, а I – тождественный оператор.

Основным результатом работы является следующая

Теорема 1. *Пусть функция* $\mu \in C^2(-\infty, +\infty)$ *и* $0 < \mu(\theta) \le M$ *для всех* $\theta \in W_2$, $f \in L_p(0,T;V^{-1})$, $g \in L_1(0,T;H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega))$, $u_0 \in V^1$, $\theta_0 \in W_p^{1-2/p}(\Omega)$. *Тогда при* $1 < p < \frac{4}{3}$ *для* $n = 2$ *и для* $1 < p < \frac{10}{9}$ *при* $n = 3$ *существует слабое решение задачи* (1)–(5).

Доказательство теоремы 1 основано на последовательном применение аппроксимационно-топологического подхода к задачам гидродинамики и на итерационном процессе, и поэтому проводится поэтапно. На первом этапе устанавливается разрешимость задачи (1)–(5) при фиксированном $\theta \in W_2$. Затем устанавливается разрешимость задачи (1)–(5) с заданной $u \in W_1$. Далее описывается итерационный процесс, состоящий в последовательном решении вышеприведенных задач, и, наконец, доказывается сходимость последовательных приближений к решению задачи (1)–(5).

ЭТАП 1

Рассмотрим начально-краевую задачу (1)–(5) при фиксированной $\theta \in W_2$. Получим следующую начально-краевую задачу:

$$\begin{gathered}\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \\ - 2\mathrm{Div}(\mu(\theta)\mathcal{E}(v)) + \nabla p = f;\end{gathered} \tag{9}$$

$$v = (I - \alpha^2 \Delta)u; \quad \operatorname{div} u = 0; \tag{10}$$

$$u|_{t=0} = u_0; \quad u|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0; \quad \Delta u|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0. \tag{11}$$

Слабое решение задачи (9)–(11) определим как функцию $u \in W_1$, удовлетворяющую (7) и начальному условию $u|_{t=0} = u_0$.

Для данной задачи справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть функция* $\mu \in C^2(-\infty, +\infty)$ *и* $0 < \mu(\theta) \le M$ *для всех* $\theta \in W_2$, $f \in L_2(0,T;V^{-1})$, $u_0 \in V^1$, $\theta \in W_2$. *Тогда задача* (9)–(11) *имеет по крайней мере одно слабое решение* $u \in W_1$, *для которого справедлива оценка*

$$\|u\|_{W_1} \le R_1, \quad R_1 = R_1(T, \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}, \|u_0\|_{V^1}). \tag{12}$$

ЭТАП 2

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу при фиксированных $\hat{\theta} \in W_2$ и $u \in W_1$:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial\theta}{\partial x_i} - \chi\Delta\theta = (\mu(\hat{\theta})\mathcal{E}(u)) : \mathcal{E}(u) + g; \quad (13)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0, \quad \theta|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0. \quad (14)$$

Слабое решение задачи (13), (14) определим как $\theta \in W_2$, удовлетворяющую тождеству (8) и начальному условию $\theta|_{t=0} = \theta_0$.

Для начально-краевой задачи (13), (14) справедлива

Теорема 3. *Пусть* $g \in L_1(0,T; H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega))$, $\theta_0 \in W_p^{1-2/p}(\Omega)$, $\hat{\theta} \in W_2$, $u \in W_1$. *Тогда при* $1 < p < \frac{4}{3}$ *для* $n = 2$ *и при* $1 < p < \frac{10}{9}$ *для* $n = 3$ *задача* (13), (14) *имеет по крайней мере одно слабое решение и справедлива оценка*

$$\|\theta\|_{W_2} \le R_2\left(\|g\|_{L_1(0,T;H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega))} + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,T;H)} + \|\theta_0\|_{W_p^{1-2/p}(\Omega)}\right). \quad (15)$$

ЭТАП 3

Рассмотрим последовательность (u^n, θ^n), $n = 0$, 1, 2, ..., определяемую следующим образом. Пусть u^0 и θ^0 означают начальные значения u_0 и θ_0 для u и θ из (11) и (14) соответственно. Пусть (u^n, θ^n) известны. Тогда вначале находится u^{n+1} как слабое решение задачи

$$\frac{\partial v^{n+1}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} u_i^{n+1}\frac{\partial v^{n+1}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} v_i^{n+1}\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_i} - 2\mathrm{Div}\,(\nu(\theta^n)\mathcal{E}(v^{n+1})) + \nabla p = f; \quad (16)$$

$$\mathrm{div}\, u^{n+1} = 0; \quad v^{n+1} = u^{n+1} - \alpha^2\Delta u^{n+1}; \quad (17)$$

$$u^{n+1}|_{t=0} = u_0; \quad u^{n+1}|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0; \quad \Delta u^{n+1}|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0, \quad (18)$$

затем при найденном u^{n+1} находится θ^{n+1} как слабое решение задачи

$$\frac{\partial\theta^{n+1}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} u_i^{n+1}\frac{\partial\theta^{n+1}}{\partial x_i} - \chi\Delta\theta^{n+1} = 2\nu(\theta^n)\mathcal{E}(u^{n+1}) : \mathcal{E}(u^{n+1}) + g; \quad (19)$$

$$\theta^{n+1}|_{t=0} = \theta_0; \quad \theta^{n+1}|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0. \quad (20)$$

Отметим, что слабым решением задачи (16)–(18) называется функция $u^{n+1} \in W_1$, удовлетворяющая соотношению (7) и начальному условию $u^{n+1}|_{t=0} = u_0$, а слабым решением задачи (19), (20) называется функция $\theta^{n+1} \in W_2$, удовлетворяющая соотношению (8) и начальному условию $\theta^{n+1}|_{t=0} = \theta_0$.

Разрешимость задачи (16)–(18) следует из теоремы 2. При найденной функции u^{n+1} выполнены все требования теоремы 3. Отсюда следует, что задача (19), (20) также разрешима.

ЭТАП 4

Рассмотрим теперь последовательность (u^n, θ^n), $n = 1, 2, \ldots$, где u^n – решение задачи (16)–(18), а θ^n – решение задачи (19), (20). Изучим вопрос о сходимости последовательности (u^n, θ^n). Рассмотрим последовательность $\{\theta^n\}$.

Лемма 1. *Последовательность* $\{\theta^n\}$ *относительно компактна в* $L_p(0,T;\ L_p(\Omega))$, *где* p *удовлетворяет условиям теоремы* 3.

Рассмотрим теперь u^n. В силу оценки (12) можно считать (без ограничения общности), что u^n слабо сходится в $L_2(0,T;V^2)$, а $\frac{\partial v^n}{\partial t}$ слабо сходится в $L_2(0,T;V^{-2})$. В силу теоремы Симона [10] (при необходимости переходя к подпоследовательностям) $u^n \to u$ сильно в $C([0,T], L_4(\Omega))$ и $u^n \to u$ сильно в $L_2([0,T], V^1)$. Следовательно, в равенстве (7) в каждом слагаемом можно перейти к пределу. Получим, что предельная функция $u \in W_1$ будет удовлетворять равенству (7) и, следовательно, будет являться слабым решением задачи (16), (17).

Покажем, что полученное при предельном переходе $\theta \in W_2$ является слабым решением задачи (13), (14). Так как θ^n является решением задачи (19), (20), для него справедливо равенство (8). Рассмотрим бесконечно дифференцируемую по t и x на Q_T функцию $\psi(t,x)$, удовлетворяющую условиям $\psi(0,\cdot) = \psi(T,\cdot) = 0$ и $\psi|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0$. Положив в (8) $\theta = \theta^n, u = u^n$ и умножив на $\psi(t,x)$, а затем проинтегрировав на $[0, T]$ и упростив, получим

$$-\int_0^T (\theta^n, \phi)\frac{\partial\psi}{\partial t}dt - \int_0^T \sum_{i=1}^{n}\left(u_i^n\theta^n, \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)\psi dt + \chi\int_0^T \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\theta^n}{\partial x_i}, \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)\psi dt = \int_0^T \langle g, \phi\rangle\psi dt + 2\int_0^T \mu(\theta^{n-1})\mathcal{E}(u^n) : \mathcal{E}(u^n), \phi)\psi dt, \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (21)$$

Из сильной сходимости u^n в $L_2(0,T;V^1)$ и θ^n в $L_p(0,T;\ L_p(\Omega))$ и слабой сходимости u^n к u в $C([0,T];\ V^{-1})$ и θ^n к θ в $L_p(0,T;W_p^1(\Omega))$, где p удовлетворяет условиям теоремы 3, следует возможность предельного перехода во всех слагаемых в (21). Из последнего равенства в силу произвольности ψ вытекает справедливость соотношения (8).

Это и завершает доказательство теоремы 1.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19–11–00146).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lemarie-Rieusset P.G.* The Navier-Stokes problem in the 21st century. CRC Press, Taylor and Francis Group, 2016.
2. *Foias C., Holm D.D., Titi E.S.* // J. Dynam. Differential Equations. 2002. V. 14. № 1. P. 1–35.
3. *Zvyagin V.G., Orlov V.P.* // JFPTA. 2014. V. 15. P. 3–47.
4. *Zvyagin V.G., Orlov V.P.* // J. Math. Anal. Appl. 2017. V. 453. P. 589–606.
5. *Звягин А.В., Орлов В.П.* // Мат. заметки. 2015. Т. 97. № 5. С. 681–698.
6. *Звягин А.В.* // Сиб. мат. журнал. 2018. Т. 59. № 5. С. 1066–1085.
7. *Звягин А.В.* // Мат. заметки. 2019. Т. 105. № 6. С. 839–856.
8. *Звягин А.В.* // Известия вузов. Мат. 2016. № 10. С. 70–75.
9. *Фурсиков А.В.* Оптимальное управление распределёнными системами. Новосибирск. Научн. книга, 1999.
10. *Simon J.* // Annali di Matematica Pura ed Applicata. 1987. V. 146. P. 65–96.

ALPHA-NAVIER–STOKES MODEL WITH VISCOSITY DEPENDENT ON TEMPERATURE

A. V. Zvyagin

Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS E.I. Moiseev

The existence of a weak solution for the alpha-Navier–Stokes model with the viscosity coefficient depending on temperature is established in the work. The topological approximation method of hydrodynamic problems study is used to prove the existence.

Keywords: alpha-model, existence theorem, Navier–Stokes system, weak solution