ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 491, с. 44–46

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

О ГЛОБАЛЬНЫХ КЛАССИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2020 г. Н. В. Зайцева[1,*]

Представлено академиком РАН Е.И. Моисеевым 18.12.2019 г.
Поступило 06.01.2020 г.
После доработки 06.01.2020 г.
Принято к публикации 14.02.2020 г.

Для двумерного гиперболического уравнения с дифференциально-разностным оператором, действующим по пространственной переменной, построено однопараметрическое семейство глобальных решений. Доказано, что полученные решения являются классическими при всех значениях вещественного параметра, если вещественная часть символа разностного оператора, входящего в уравнение, положительна. Приведены классы уравнений, для которых указанное условие выполнено.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, дифференциально-разностное уравнение, классическое решение, преобразование Фурье

DOI: 10.31857/S2686954320020241

Интерес к дифференциально-разностным (и, более широко, функционально-дифференциальным) уравнениям обусловлен наличием задач, возникающих в различных приложениях, для описания которых недостаточно классических моделей математической физики, оперирующих только дифференциальными уравнениями (см., например, [1–4] и имеющуюся там библиографию). Для эллиптических дифференциально-разностных уравнений задачи в ограниченных областях изучены к настоящему времени достаточно глубоко и полно (см. там же). В неограниченных областях исследованы задачи для параболических [5] и эллиптических [6–10] дифференциально-разностных уравнений. Гиперболические дифференциально-разностные уравнения изучены для случая, когда операторы сдвига, содержащиеся в уравнении, действуют по переменной t (см. [11, 12]).

В настоящей работе исследуются гиперболические дифференциально-разностные уравнения с операторами сдвига, действующими по пространственным переменным.

В полуплоскости $\mathbb{R}^1 \times (0, +\infty)$ рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x - h_1, t) + a_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x - h_2, t), \tag{1}$$

где a_j, h_j $(j = 1, 2)$ — заданные вещественные числа, причем h_1 и h_2 не связаны никакими условиями соизмеримости.

Поскольку операторы сдвига, подобно дифференциальным операторам, являются мультипликаторами Фурье, для поиска решений уравнения (1) можно использовать классическую операционную схему Гельфанда–Шилова (см., например, [13]). Вообще говоря, указанная схема приводит к решениям в смысле обобщенных функций, однако в данном случае удается показать, что найденные решения являются классическими (гладкими), т.е. являются функциями, у которых все производные, входящие в уравнение (указанные производные понимаются в классическом смысле, т.е. как пределы соответствующих отношений конечных разностей), существуют в каждой точке полуплоскости $\mathbb{R}^1 \times (0, +\infty)$ и уравнение (1) выполняется для них в каждой точке этой полуплоскости.

Применив схему Гельфанда–Шилова, приходим к выводу, что гладкие решения уравнения (1) следует искать в виде

$$G(x, t; \xi) = \sin\left(\rho(\xi)\xi t \cos\theta(\xi) + \theta(\xi) + \xi x\right) e^{\rho(\xi)\xi t \sin\theta(\xi)} + \\ + \sin\left(\rho(\xi)\xi t \cos\theta(\xi) - \theta(\xi) - \xi x\right) e^{-\rho(\xi)\xi t \sin\theta(\xi)}, \tag{2}$$

[1] *Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия*
**E-mail: n.v.zaiceva@yandex.ru*

где

$$\rho(\xi) = \left(a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(h_1 - h_2)\xi\right)^{1/4}, \quad (3)$$

$$\theta(\xi) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{a_1\sin h_1\xi + a_2\sin h_2\xi}{a_1\cos h_1\xi + a_2\cos h_2\xi}. \quad (4)$$

Отметим, что функция (3) определена корректно при всех вещественных значениях параметров a_j, h_j $(j = 1, 2)$ и ξ.

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Теорема. *Функция* $G(x,t;\xi)$, *определенная формулой* (2), *удовлетворяет уравнению* (1) *при любом вещественном значении параметра* ξ, *для которого выполнено неравенство*

$$a_1\cos h_1\xi + a_2\cos h_2\xi > 0. \quad (5)$$

Если усилить условие теоремы, потребовав выполнения содержащегося в нем неравенства на всей вещественной оси, то получаем следующее утверждение.

Следствие. *Если неравенство* (5) *выполняется для любого вещественного* ξ, *то функция* $G(x, t;\xi)$, *определенная формулой* (2), *удовлетворяет уравнению* (1) *при любом вещественном значении параметра* ξ.

Отметим, что, если неравенство (5) выполнено, то знаменатель в аргументе арктангенса в формуле (4) не обращается в ноль, а, значит, в условиях теоремы и следствия любое решение, представляемое формулой (2), действительно является гладким.

Дифференциально-разностный оператор, содержащийся в правой части уравнения (1), есть суперпозиция дифференциального оператора D_x^2 и разностного оператора R, действующего следующим образом:

$$Ru(x,t) = a_1u(x - h_1,t) + a_2u(x - h_2,t).$$

Его символ равен $a_1\cos h_1\xi + a_2\cos h_2\xi - i(a_1\sin h_1\xi + a_2\sin h_2\xi)$, т.е. неравенство (5) эквивалентно положительности вещественной части символа оператора R (или, что то же самое, символа оператора $R + R^*$) в точке ξ. Таким образом, условие следствия равносильно условию положительности вещественной части символа (единственного) разностного оператора, содержащегося в уравнении (1), на всей вещественной оси (см. [1, § 8, 9] и [5, раздел 1.6]).

Возникает естественный вопрос о том, для каких уравнений указанное условие положительности вещественной части символа выполняется на всей вещественной оси. В качестве примера таких уравнений можно привести уравнения вида (1), в которых один из сдвигов равен нулю, а модуль коэффициента при оставшемся (единственном) нелокальном слагаемом не превосходит коэффициента при первом слагаемом в правой части, т.е. уравнения вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = a_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + a_2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x - h,t),$$

где $|a_2| < a_1$. Для уравнений из этого класса символ соответствующего разностного оператора равен $a_1 + a_2\cos h\xi - a_2 i\sin h\xi$, а значит, условие следствия выполнено.

Другим примером уравнений, для которых функция $G(x,t;\xi)$ определена при всех вещественных значениях параметра ξ, являются уравнения вида (1), в которых в ноль обращается не один из сдвигов, а один из коэффициентов в правой части, т.е. уравнения с единственным слагаемым в правой части. Этот случай — особый. Здесь условие положительности вещественной части символа не накладывается, а для существования функции $G(x,t;\xi)$ при любом вещественном значении параметра достаточно положительности (единственного) коэффициента в правой части уравнения. В этом случае уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x - h,t), \quad (6)$$

а однопараметрическое семейство его решений — вид

$$G(x,t;\xi) = \sin\left[\left(\sqrt{a}t\cos\frac{h\xi}{2} + x + \frac{h}{2}\right)\xi\right]e^{\sqrt{a}\xi t\sin\frac{h\xi}{2}} + \sin\left[\left(\sqrt{a}t\cos\frac{h\xi}{2} - x - \frac{h}{2}\right)\xi\right]e^{-\sqrt{a}\xi t\sin\frac{h\xi}{2}}. \quad (7)$$

Если $a > 0$, то, независимо от вещественного значения h, функция (7) является гладким (классическим) решением уравнения (6) при любом вещественном значении ξ, что проверяется непосредственной подстановкой функции (7) в уравнение (6).

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает глубокую благодарность И.С. Ломову за ценные советы, А.Б. Муравнику за постановку задачи и полезные замечания и А.Л. Скубачевскому за постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Skubachevskii A.L.* Elliptic functional-differential equations and applications. Basel, Boston, B.: Birkhauser, 1997. 294 p.
2. *Скубачевский А.Л.* Неклассические краевые задачи. I // Соврем. мат. Фундам. направл. 2007. Т. 26. С. 3–132.

3. *Скубачевский А.Л.* Неклассические краевые задачи. II // Соврем. мат. Фундам. направл. 2009. Т. 33. С. 3–179.
4. *Скубачевский А.Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения // Успехи матем. наук. 2016. Т. 71. № 5(431). С. 3–112.
5. *Муравник А.Б.* Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши // Соврем. мат. Фундам. направл. 2014. Т. 52. С. 3–143.
6. *Муравник А.Б.* О задаче Дирихле в полуплоскости для дифференциально-разностных эллиптических уравнений // Соврем. мат. Фундам. направл. 2016. Т. 60. С. 102–113.
7. *Муравник А.Б.* Асимптотические свойства решений задачи Дирихле в полуплоскости для некоторых дифференциально-разностных эллиптических уравнений // Матем. заметки. 2016. Т. 100. № 4. С. 566–576.
8. *Muravnik A.* On the half-plane Diriclet problem for differential-difference elliptic equations with several nonlocal terms // Math. Model. Nat. Phenom. 2017. V. 12. № 6. P. 130–143.
9. *Муравник А.Б.* Асимптотические свойства решений двумерных дифференциально-разностных эллиптических задач // Соврем. мат. Фундам. направл. 2017. Т. 63. № 4. С. 678–688.
10. *Муравник А.Б.* Эллиптические задачи с нелокальным потенциалом, возникающие в моделях нелинейной оптики // Матем. заметки. 2019. Т. 105. № 5. С. 747–762.
11. *Власов В.В., Шматов К.И.* Корректная разрешимость уравнений гиперболического типа с запаздыванием в гильбертовом пространстве // Тр. МИАН. 2003. Т. 243. С. 127–137.
12. *Власов В.В., Медведев Д.А.* Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и связанные с ними вопросы спектральной теории // Соврем. мат. Фундам. направл. 2008. Т. 30. С. 3–173.
13. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции. Вып. 3: Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1958. 276 с.

ON GLOBAL CLASSICAL SOLUTIONS OF HYPERBOLIC DIFFERENTIAL-DIFFERENCE EQUATIONS

N. V. Zaitseva

Kazan (Volga region) Federal University, Kazan, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS E.I. Moiseev

A one-parametric family of global solutions of a two-dimensional differential-difference hyperbolic equation is constructed. The theorem is proved that the obtained solutions are classical if the real part of the symbol of the difference operator of the equation is positive. Classes of equations for which this condition is satisfied are given.

Keywords: hyperbolic equation, differential-difference equation, classical solution, Fourier transformation