

УДК 519.21

## О БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЯХ СУММЫ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОТОРЫХ ИМЕЮТ БЫСТРО УБЫВАЮЩИЕ ХВОСТЫ

© 2020 г. Л. В. Розовский\*

Представлено академиком РАН И.А. Ибрагимовым 03.01.2010 г.

Поступило 13.01.2020 г.

После доработки 13.01.2020 г.

Принято к публикации 13.02.2020 г.

В работе исследуется асимптотическое поведение на бесконечности распределений и плотностей суммы конечного числа независимых случайных величин в случае, когда плотности или хвосты распределений самих случайных величин убывают быстрее, чем плотности или хвосты гамма-распределения.

**Ключевые слова:** независимые случайные величины, большие отклонения, быстро убывающие хвосты

**DOI:** 10.31857/S2686954320020216

В работе исследуется асимптотическое поведение на бесконечности плотностей и распределений суммы конечного числа независимых случайных величин  $X_j$  в случае, когда хвосты распределений слагаемых или их плотности убывают достаточно быстро и, в частности, при некотором (или любом)  $\lambda > 0$  удовлетворяют условию Крамера  $E^{X_j} < \infty$ .

Согласно терминологии в [1] такие распределения принадлежат классам регулярно экспоненциально и суперэкспоненциально убывающих распределений. Эти классы, в свою очередь, содержатся в заметно более общем классе распределений с так называемыми тонкими хвостами, причем свойства этого класса хорошо изучены (см., например, публикации [3, 5–8] и библиографию в них).

Заметим, что регулярно экспоненциально убывающие распределения с хвостами вида  $e^{-\lambda t} l(t)$ , где функция  $l(t)$  правильно меняется на бесконечности, мы здесь не рассматриваем, поскольку формулировки результатов и доказательства в этой ситуации разительно отличаются от содержащихся в настоящей работе.

По интересующей же нас проблематике удалось обнаружить лишь несколько результатов. Основные из них будут приведены ниже.

**Предложение 1** [2, теорема 2.5]. Пусть  $X_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , — независимые случайные величины с функциями распределения  $F_j$  и пусть функция  $g(x)$  при  $x > 0$  имеет неубывающую положительную производную и, кроме того,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} > 0$ . Тогда при всех  $x > 0$

$$P(X_1 + \dots + X_n \geq x) \leq \prod_{j=1}^n \left( b_j \left( \frac{x}{b} \right) + b_{gj} \right) \exp \left\{ -ng \left( \frac{x}{n} \right) \right\},$$

где

$$b_{gj} = \int_{0+}^{\infty} e^{g(u)} F_j(du), \quad b_j(x) = e^{g(0)} \int_{u < 0} e^{g'(x)u} F_j(du).$$

Отметим, что эта относительно несложная оценка достаточно точна при больших  $x$  (см. [2, (2.50)–(2.52)]), что также косвенно подтверждается теоремой 2 (и замечанием 1(1)) настоящей работы.

**Предложение 2** [3, теорема 5]. Пусть независимые неотрицательные случайные величины  $X$  и  $Y$  имеют общую функцию распределения  $F(t)$ .

Предположим, что  $\bar{F}(t) = 1 - F(t) \sim ae^{-\lambda t + \chi(t)}$  при  $t \rightarrow \infty$ , где  $a > 0$ , и неотрицательная функция  $\chi(t)$

Санкт-Петербургский государственный химико-фармацевтический университет Минздрава России, Санкт-Петербург, Россия

\*E-mail: L\_Rozovsky@mail.ru

при некотором  $\rho \in (0, 1)$  удовлетворяет условию  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t\chi''(t)}{\chi'(t)} = \rho - 1$ . Тогда

$$P(X + Y \geq t) \sim \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\rho(1-\rho)}} \frac{t}{\chi^{1/2}(t/2)} \bar{F}^2(t/2), \quad t \rightarrow \infty.$$

Следующий результат наиболее близок к содержанию сообщения.

**Предложение 3** [4, теорема 1B]. Пусть  $\xi = \xi(x) > 0$  — некоторая функция, удовлетворяющая условию  $\limsup_{x \rightarrow \infty} |\xi'(x)| < \infty$ . Будем предполагать, что плотность  $p(x)$  удовлетворяет условию

$$p(x) \sim u(x)e^{-g(x)}, \quad x \rightarrow \infty,$$

где функции  $g(x)$  и  $u(x)$  такие, что

$$\begin{aligned} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} &= \lambda > 0, \quad \xi^2 g''(x) \rightarrow \infty, \\ g''(x + o(\xi)) &\sim g''(x), \\ u(x + o(\xi)) &\sim u(x), \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Тогда при любом целом  $m \geq 1$

$$p^{*m}(mx) \sim \frac{1}{\sqrt{m}} \left( \frac{2\pi}{g''(x)} \right)^{\frac{m-1}{2}} p^m(x), \quad x \rightarrow \infty.$$

Заметим, что в случае  $\lambda < \infty$  условия на плотность  $p(x)$  можно равносильно переформулировать в более естественной форме:

$$p(x) \sim u(x)e^{-\lambda x - g(x)}, \quad x \rightarrow \infty,$$

где  $\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} = 0$  (остальные условия не меняются).

Приступим к изложению полученных результатов. Введем обозначения.

В дальнейшем  $X_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , обозначают независимые величины с функциями распределения  $F_j(\cdot)$ ;  $\bar{F}_j(\cdot) = 1 - F_j(\cdot)$ .

Начнем с обобщения предложения 3, поскольку формулировки в этом случае, как нам кажется, выглядят несколько проще.

Будем предполагать, что функции распределения  $F_j(x)$ , по крайней мере, при всех достаточно больших значениях аргумента имеют плотности  $p_j(x)$  (т.е.  $F_j(x) - F_j(x_0) = \int_{x_0}^x p_j(y) dy$ ,  $x > x_0$ ), такие что

$$p_j(x) \sim u_j(x)e^{-g_j(x)}, \quad x \rightarrow \infty, \quad (1)$$

где функции  $u_j(x)$  и  $g_j(x) > 0$  удовлетворяют условиям

$$u_j(x + o(\xi_j)) \sim u_j(x), \quad x \rightarrow \infty, \quad (2)$$

и

$$\begin{aligned} g_j''(x + o(\xi_j)) &\sim g_j''(x), \\ \xi_j^2 g_j''(x) &\rightarrow +\infty, \quad x \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (3)$$

при некоторой липшицевской функции  $\xi_j = \xi_j(x) > 0$ , т.е.

$$|\xi_j(x) - \xi_j(y)| \leq L|x - y|, \quad x, y \geq x_0. \quad (4)$$

Согласно (4) функция  $\xi_j(x)$  абсолютно непрерывна и  $\xi_j(x) = O(x)$  при  $x \rightarrow \infty$ . Кроме того (см. [4, лемма 4]),

$$\frac{g_j(x)}{x} \uparrow \lambda_j,$$

$$g_j'(x) \uparrow \lambda_j \text{ при некоторых } \lambda_j \in (0, \infty].$$

Также можно показать, что скорость стремления к нулю правой части соотношения (1) определяется экспонентой.

Пусть при  $1 \leq j \leq m$  распределения  $F_j(x)$  имеют плотности  $p_j(x)$ , причем для  $2 \leq j \leq m$  при всех достаточно больших  $x$ .

Отсюда, в частности, следует, что распределение суммы  $X_1 + \dots + X_m$  при  $m \geq 2$  имеет плотность

$$f_m(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x - y) dP(X_2 + \dots + X_m < y).$$

**Теорема 1.** Пусть при  $1 \leq j \leq m$  выполнены условия (1)–(4) и, кроме того,

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_m = \lambda \leq \infty. \quad (5)$$

Тогда

$$f_m(x) \sim \frac{(2\pi)^{(m-1)/2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \prod_{j=1, j \neq i}^m g_j''(y_j)}} \prod_{j=1}^m p_j(y_j), \quad x \rightarrow \infty, \quad (6)$$

где функции  $y_j = y_j(x)$ ,  $1 \leq j \leq m$ , при всех достаточно больших  $x$  удовлетворяют системе уравнений

$$g_1'(y_1) = \dots = g_m'(y_m), \quad (7)$$

в которой  $y_1 + \dots + y_m = x$  ( $g_j'(y) = (g_j(y))'_y$ ).

Теорема 1 доказывается в два этапа: сначала убеждаемся в ее справедливости при  $m = 2$ , а затем окончательный результат проверяем по индукции (доказательства следующих ниже теорем 2–4 осуществляются аналогично).

В некоторых случаях уравнения (7) удастся разрешить в явном виде.

**З а м е ч а н и е 1.** Пусть  $b_j > 0$ ,  $c_j$  — некоторые постоянные,  $1 \leq j \leq m$ .

1) если  $g_j(x) = b_j g\left(\frac{x + c_j}{b_j}\right)$ , то

$$y_j = b_j \frac{(x + C)}{B} - c_j, \text{ где } B = \sum_{i=1}^m b_i, C = \sum_{i=1}^m c_i;$$

2) если  $g_j(x) = b_j(x + c_j)^{1+\alpha}$  ( $\alpha > 0$ ) или же  $g_j(x) = \lambda x - b_j(x + c_j)^{1+\alpha}$  ( $\lambda > 0$  и  $\alpha \in (-1, 0)$ ), то

$$y_j = \frac{(x + C)b_j^{-1/\alpha}}{B_m} - c_j, \text{ где } B_m = \sum_{j=1}^m b_j^{-1/\alpha}.$$

Принимая во внимание замечание 1 (1), видим, что предложение 3 является частным случаем теоремы 1.

Теперь сформулируем аналог теоремы 1 для распределений.

**Теорема 2.** *Предположим, что при  $1 \leq j \leq m$*

$$\bar{F}_j(x) \sim u_j(x)e^{-g_j(x)}, \quad x \rightarrow \infty, \quad (8)$$

где функции  $u_j(x), g_j(x)$  удовлетворяют условиям (2)–(5), и, кроме того, при  $2 \leq j \leq m$

$$u'_j(x) = o(u_j(x)g'_j(x)), \quad x \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Тогда

$$Q_m(x) = \mathbf{P}(X_1 + \dots + X_m \geq x) \sim \frac{(g_m(y_m)\sqrt{2\pi})^{m-1}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \prod_{j=1, j \neq i}^m g_j''(y_j)}} \prod_{j=1}^m \bar{F}_j(y_j), \quad x \rightarrow \infty,$$

где  $y_j$  – решения системы уравнений (7).

Необременительное условие (9) выражает факт, что скорость стремления к нулю правой части соотношения (8) определяется экспонентой.

Заметим, что (9) выполнено, если функция  $u_j(x)$  правильно меняется на бесконечности, а также то, что при  $\lambda < \infty$  (см. (1.5)) в правой части асимптотики  $g_m(y_m)$  можно заменить на  $\lambda$  (а в условии (1.9) убрать множитель  $g'_j(x)$ ).

Отметим, что асимптотики больших уклонений в предложении 1 и теореме 2 могут быть существенно точнее оценок, полученных другими методами, скажем, с помощью экспоненциальных неравенств (см. [2, теоремы 1.1–1.3]).

Приведем одно следствие теоремы 2, которое позволяет при  $m = 2$  в некоторых ситуациях заменять точное решение уравнений (7) приближенным.

Положим  $\tau(y) = g_1(x - y) + g_2(y)$ ,  $0 < y < x$ .

**Следствие 1.** *Пусть при  $j = 1$  и  $2$  выполнены условия (8), (2)–(4), а также условия (5) с  $m = 2$  и (9) с  $j = 2$ . Предположим, что положительная*

*функция  $y = y(x)$  при  $x \rightarrow \infty$  и некотором  $x_0 > 0$  удовлетворяет условиям*

$$y, x - y \rightarrow \infty,$$

$$\tau'(y) = o\left(\min_{x_0 < u < x - x_0} \tau''(u) \cdot \min(\xi_2(y), \xi_1(x - y))\right) \quad (10)$$

*и, кроме того,  $\frac{\tau'^2(y)}{\tau''(y)} \rightarrow k \in [0, \infty)$ .*

Тогда

$$\mathbf{P}(X_1 + X_2 \geq x) \sim \bar{F}_1(x - y)\bar{F}_2(y)e^{k/2}g'_2(y)\sqrt{\frac{2\pi}{\tau''(y)}}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Из следствия 1 при  $y = \frac{x}{2}$  вытекает предложение 3, а также еще один результат работы [3], а именно, следствие 4 (заметим, что в формулировке [3, следствие 4] пропущен множитель, зависящий от  $k$ ).

Приведем еще одно следствие теоремы 2 и замечания 1.

**Следствие 2.** *Пусть при  $1 \leq j \leq m$  выполнено условие (8), в котором  $g_j(x) = b_j x^{1+\alpha}$ ,  $b_j > 0$ ,  $\alpha > 0$ , а функция  $u_j(x)$  правильно меняется на бесконечности с некоторым показателем  $\alpha_j$ . Тогда при  $x \rightarrow \infty$*

$$Q_m(x) \sim B^{-1/2} \left( \frac{2\pi(1+\alpha)}{\alpha} \right)^{\frac{m-1}{2}} \left( \frac{x}{B} \right)^A \times \\ \times e^{-B^{-\alpha} x^{1+\alpha}} \prod_{j=1}^m b_j^{-(1+2\alpha_j)/(2\alpha)} u_j(x) x^{-\alpha_j},$$

$$\text{где } B = \sum_{j=1}^m b_j^{-1/\alpha}, A = \sum_{j=1}^m \alpha_j + \frac{(1+\alpha)(m-1)}{2}.$$

При  $\alpha = 1$  отсюда следует ожидаемый результат ( $x \rightarrow \infty$ ):

$$\bar{F}_j(x) \sim 1 - \Phi\left(\frac{x}{\sigma_j}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{P}(X_1 + \dots + X_m \geq x) \sim 1 - \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right),$$

где  $\Phi(x)$  – стандартное гауссовское распределение,  $\sigma^2 = \sum_{j=1}^m \sigma_j^2$ .

Рассмотрим еще один пример. Пусть теперь при  $1 \leq j \leq m$

$$\bar{F}_j(x) \sim \exp(a_j x - e^x), \quad x \rightarrow \infty,$$

где  $a_j$  – некоторые постоянные. Положим  $A = \sum_{j=1}^m a_j$ .

Тогда

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(X_1 + \dots + X_m \geq mx) \sim \\ & \sim \frac{(2\pi e^x)^{(m-1)/2}}{\sqrt{m}} \exp\{Ax + m(x - e^x)\}, \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Далее приведем утверждения, дополняющие теоремы 1 и 2 в случае, когда  $\tilde{\lambda} < \infty$  (см. (5)).

Ниже предполагается, что целое  $n \geq 1$  и параметр  $\tilde{\lambda} \in (\lambda, \infty)$ .

**Теорема 3.** Пусть выполняются условия теоремы 1 и, кроме того, при  $m < j \leq m+n$  функции распределения  $F_j(x)$  при всех достаточно больших  $x$  имеют плотности  $p_j(x)$ , которые удовлетворяют условию

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} e^{\tilde{\lambda}x} p_j(x) < \infty. \quad (11)$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_{m+n}(x)}{f_n(x)} = \prod_{j=m+1}^{m+n} \mathbf{E} e^{\lambda X_j}.$$

Заметим, что из условия (11) (более слабого, чем (1)) следует, что  $\mathbf{E} e^{\lambda X_j} < \infty$ .

Комбинируя теоремы 1 и 3, получим следующий результат.

**Следствие 3.** Пусть при  $1 \leq j \leq m+n$  выполнены условия (1)–(4), причем

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_m = \lambda < \min_{m < j \leq m+n} \lambda_j. \quad (12)$$

Тогда имеют место соотношения (6) и

$$f_{m+n}(x) \sim f_m(x) \prod_{j=m+1}^{m+n} \mathbf{E} e^{\lambda X_j}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Видим, что теорема 1 вытекает из следствия 3 при  $n = 0$ . Другими словами, следствие 3 (в отличие от теоремы 1) позволяет находить асимптотику для  $f_m(x)$  при любых  $\lambda_j$ .

В заключение приведем утверждение, аналогичное теореме 3, для распределений.

**Теорема 4.** Пусть выполняются условия теоремы 2 и, кроме того,

$$\mathbf{E} e^{\tilde{\lambda} X_j} < \infty \text{ при } m < j \leq m+n.$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Q_{m+n}(x)}{Q_n(x)} = \prod_{j=m+1}^{m+n} \mathbf{E} e^{\lambda X_j}.$$

**Следствие 4.** Пусть при  $1 \leq j \leq m+n$  выполнены условия (8), (2)–(4), а также (12) и (9),  $2 \leq j \leq m$ . Тогда (см. (7))

$$\begin{aligned} Q_{m+n}(x) & \sim \frac{(\lambda \sqrt{2\pi})^{m-1}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \prod_{j=1, j \neq i}^m g_j''(y_j)}} \times \\ & \times \prod_{j=1}^m \bar{F}_j(y_j) \prod_{j=m+1}^{m+n} \mathbf{E} e^{\lambda X_j}, \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа поддержана РФФИ (проект № 19–01–00356).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровков А.А. Асимптотический анализ случайных блужданий. Быстро убывающие распределения приращений. М.: Физматлит, 2013. 448 с.
2. Nagaev S.V. // Ann. Probab. 1979. V. 7. № 5. P. 745–789.
3. Cline D.B.H. // Probability Theory and Related Fields. 1986. V. 72. № 4. P. 529–557.
4. Розовский Л.В. // Теория вероятн. и ее примен. 2003. Т. 48. № 1. С. 78–103.
5. Pakes A.G. // J. Appl. Prob. 2004. V. 41. P. 407–424.
6. Захару С., Фосс С.Г. // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47. № 6. P. 1265–1274.
7. Фосс С.Г. // Пробл. передачи информ. 2007. Т. 43. № 4. С. 93–108.
8. Watanabe T. // Probab. Theory Relat. Fields. 2008. V. 142. P. 367–397.

## ON LARGE DEVIATIONS OF A SUM OF INDEPENDENT RANDOM VARIABLES, WHOSE DISTRIBUTIONS HAVE RAPIDLY DECREASING TAILS

L. V. Rozovsky

Saint-Petersburg State Chemical and Pharmaceutical University, Saint-Petersburg, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS I.A. Ibragimov

In the note we investigate the asymptotic behavior at infinity distributions and densities of a sum of a finite number of independent random variables when densities or tails of these distributions decrease faster than densities or tails of Gamma-distributions.

**Keywords:** independent random variables, large deviations, rapidly decreasing tails