ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 491, с. 73–77

МАТЕМАТИКА

УДК 517.957

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВЫХ АЛГЕБРАХ

© 2020 г. А. И. Перов[1,*], И. Д. Коструб[1,]**

Представлено академиком РАН Е.И. Моисеевым 16.10.2019 г.
Поступило 16.10.2019 г.
После доработки 27.02.2020 г.
Принято к публикации 27.02.2020 г.

В комплексной банаховой алгебре, коммутативность которой не предполагается, рассматриваются линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Предполагается, что соответствующее алгебраическое характеристическое уравнение n-й степени имеет n различных корней, для которых построенная матрица Вандермонда обратима. Доказываются аналоги теорем Сильвестра и Виета, а также изучается контурный интеграл типа Коши.

Ключевые слова: банахова алгебра, дифференциальные уравнения высшего порядка, алгебраическое характеристическое уравнение, матрица Вандермонда, теоремы Сильвестра и Виета, контурный интеграл типа Коши

DOI: 10.31857/S2686954320020174

Основные определения. В комплексной банаховой алгебре $\mathbb{B}$ [1, 2] рассмотрим линейное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{p}_1\mathbf{x}^{(n-1)} + \ldots + \mathbf{p}_{n-1}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{p}_n\mathbf{x} = 0 \qquad (1)$$

с постоянными коэффициентами ($\mathbf{p}_0 = \mathbf{1}$). Такие уравнения возникают, например, при изучении дифференциальных уравнений высшего порядка в конечномерных (матричные дифференциальные уравнения [3]) или в бесконечномерных (банаховых) пространствах (операторные дифференциальные уравнения [4]). В качестве возможных приложений можно назвать теорию малых колебаний в физике [5].

Рассмотрим многочлен n-й степени

$$\mathbf{l}_n(\lambda) \equiv \lambda^n + \mathbf{p}_1\lambda^{n-1} + \ldots + \mathbf{p}_{n-1}\lambda + \mathbf{p}_n : \mathbb{C} \to \mathbb{B}, \qquad (2)$$

играющий исключительно важную роль во всей развиваемой нами теории. Назовем этот многочлен (за неимением лучшего) скалярным характеристическим многочленом. Все значения λ из $\mathbb{C}$, для которых элемент $\mathbf{l}_n(\lambda)$ обратим, образуют, по определению, резольвентное множество R многочлена (2). R есть непустое неограниченное открытое множество в $\mathbb{C}$. Определенная на этом множестве функция $\mathbf{r}_n(\lambda) \equiv \mathbf{l}_n^{-1}(\lambda): R \to \mathbb{B}$ называется резольвентой n-го порядка [6]. Дополнение $S = \mathbb{C}\backslash R$ называется спектром скалярного характеристического многочлена $\mathbf{l}_n(\lambda)$; это есть непустое ограниченное замкнутое множество в $\mathbb{C}$.

Матричные многочлены указанного вида встречаются в теории матриц [7, гл. VIII]; они находят приложения в квантовой механике [8, с. 149].

Мы записываем скалярные величины (комплексные числа) обычным шрифтом, а элементы банаховой алгебры $\mathbb{B}$ – полужирным шрифтом. Выражение $\lambda\mathbf{1}$, где λ – комплексное число, а $\mathbf{1}$ – единица алгебры, следуя Т. Като [9, с. 274], записываем в виде λ.

Если по методу Эйлера искать решение уравнения (1) в виде $\mathbf{x}(t) = \exp(t\mathbf{a})$, где $\mathbf{a} \in \mathbb{B}$, то мы придем к алгебраическому уравнению n-й степени

$$\mathbf{l}_n(\mathbf{a}) \equiv \mathbf{a}^n + \mathbf{p}_1\mathbf{a}^{n-1} + \ldots + \mathbf{p}_{n-1}\mathbf{a} + \mathbf{p}_n = \mathbf{0}. \qquad (3)$$

Многочлен $\mathbf{l}_n(\mathbf{a}): \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ назовем характеристическим, уравнение (3) – характеристическим уравнением, а его корни – характеристическими корнями.

Случай $n = 2$ рассмотрен в заметке [10].

[1] *Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия*
**E-mail: anperov@mail.ru*
***E-mail: ikostrub@yandex.ru*

Теорема Сильвестра и тождество Гильберта.

Теорема 1. *Спектр любого корня* $\mathbf{a}$ *характеристического уравнения* (3) *содержится в спектре скалярного характеристического многочлена*: $S(\mathbf{a}) \subseteq S$.

Для матричных уравнений теорема 1 была доказана Сильвестром.

Пусть λ и μ из R. Так как

$$\mathbf{r}_n(\lambda) - \mathbf{r}_n(\mu) = \mathbf{r}_n(\lambda)\{\mathbf{l}_n(\mu) - \mathbf{l}(\lambda)\}\mathbf{r}_n(\mu) = \\ = \mathbf{r}_n(\lambda)\sum_{j=1}^{n}\mathbf{p}_{n-j}(\mu^j - \lambda^j)\mathbf{r}_n(\mu),$$

то

$$\mathbf{r}_n(\lambda) - \mathbf{r}_n(\mu) = \\ = -(\lambda-\mu)\mathbf{r}_n(\lambda)\sum_{j=1}^{n}\mathbf{p}_{n-j}(\mu^{j-1} + \mu^{j-2}\lambda + \\ + \ldots + \mu\lambda^{j-2} + \lambda^{j-1})\mathbf{r}_n(\mu). \tag{4}$$

При $n = 1$ соотношение (4) хорошо известно под именем тождества Гильберта (см., например, [11, с. 261]); мы сохраним за ним это название и в случае произвольного n.

Теорема 2. *При произвольных* λ *и* μ *из* R *для резольвенты* n*-го порядка* $\mathbf{r}_n$ *имеет место тождество* (4).

Резольвента n-го порядка. В дальнейшем нам будет полезна формула разложения в степенной ряд

$$(\mathbf{1} + \mathbf{p}_1\mu + \ldots + \mathbf{p}_n\mu^n)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{c}_k\mu^k (|\mu| < \rho), \tag{5}$$

где $\mathbf{c}_k$ из $\mathbb{B}$, а ρ $(0 < \rho < \infty)$ есть радиус сходимости написанного степенного ряда. При $k = 0$ мы получаем $\mathbf{c}_0 = 1$. Приведем формулу для остальных коэффициентов этого разложения:

$$\mathbf{c}_k = \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{\substack{1\le i_1\le n,\ldots,1\le i_s\le n,\\ k_1\ge 0,\ldots,k_s\ge 0,\\ i_1k_1+\ldots+i_sk_s=k}}(-1)^{k_1+\ldots+k_s}\mathbf{p}_{i_1}^{k_1}\ldots\mathbf{p}_{i_s}^{k_s}.$$

Здесь порядок сомножителей весьма существенен (среди чисел $i_1,\ldots,i_s$ могут быть повторяющиеся). Если коэффициенты многочлена $\mathbf{l}_n(\lambda)$ коммутируют, что заведомо имеет место для коммутативной банаховой алгебры [1, 2], то написанное выше выражение принимает более простой вид:

$$\mathbf{c}_k = \sum_{\substack{k_1\ge 0,\ldots,k_n\ge 0,\\ 1k_1+\ldots+nk_n=k}}(-1)^{k_1+\ldots+k_n}\frac{(k_1+\ldots+k_n)!}{k_1!\ldots k_n!}\mathbf{p}_1^{k_1}\ldots\mathbf{p}_n^{k_n}.$$

Важность формулы (5) объясняется тем обстоятельством, что она позволяет написать разложение для резольвенты n-го порядка $\mathbf{r}_n(\lambda)$ по обратным степеням параметра λ. Действительно,

$$\mathbf{r}_n(\lambda) = (\lambda^n + \mathbf{p}_1\lambda^{n-1} + \ldots + \mathbf{p}_n)^{-1} = \\ = \lambda^{-n}(\mathbf{1} + \mathbf{p}_1\mu + \ldots + \mathbf{p}_n\mu^n)^{-1} = \lambda^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{c}_k\mu^k$$

(мы считаем, что $\lambda \ne 0$ и $\mu = 1/\lambda$). Поэтому

$$\mathbf{r}_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{c}_k\lambda^{-(n+k)}\left(|\lambda| > \frac{1}{\rho}\right). \tag{6}$$

Функция Коши. Решение $\mathbf{k}(t)\colon \mathbb{R}\to\mathbb{B}$ уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям $\mathbf{k}(0) = 0, \dot{\mathbf{k}}(0) = \mathbf{0},\ldots,\mathbf{k}^{(n-2)}(0) = \mathbf{0}$ и $\mathbf{k}^{(n-1)}(0) = \mathbf{1}$, называется функцией Коши этого уравнения.

Нетрудно убедиться в том, что функция Коши допускает представление в виде степенного ряда

$$\mathbf{k}(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{c}_k\frac{t^{n+k-1}}{(n+k-1)!} \quad (-\infty < t < +\infty),$$

коэффициенты $\mathbf{c}_k$ которого взяты из разложения (5). Она допускает представление в виде контурного интеграла

$$\mathbf{k}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\sigma}e^{t\lambda}\mathbf{r}_n(\lambda)d\lambda,$$

где контур $\partial\sigma$ лежит в резольвентном множестве R и охватывает спектр S скалярного характеристического многочлена $\mathbf{l}_n(\lambda)$. В простейшем случае, когда в роли банаховой алгебры $\mathbb{B}$ выступает поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, написанный выше интеграл принимает вид

$$k(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\sigma}\frac{e^{t\lambda}}{\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_n}d\lambda.$$

Теорема 3. *Пусть* $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, *попарно различные корни характеристического уравнения* (3) *в рассматриваемом случае, т.е.* $\lambda_j \ne \lambda_k$ *при* $j \ne k$. *Тогда*

$$k(t) = \sum_{j=1}^{n}\frac{e^{t\lambda_j}}{(\lambda_j-\lambda_1)\ldots(\lambda_j-\lambda_{j-1})(\lambda_j-\lambda_{j+1})\ldots(\lambda_j-\lambda_n)}.$$

Последняя сумма представляет собой разделенную разность порядка $(n - 1)$, построенную для функции $\exp(t\lambda)$ по узлам $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ [12].

Вернемся к общему случаю.

Теорема 4. *Пусть* $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ *— попарно различные корни характеристического уравнения* (3), *причем разности* $\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_k$ *обратимы при* $j \ne k$. *Пусть банахова алгебра* $\mathbb{B}$ *является коммутативной или, более обобщенно, известно лишь, что эти корни коммутируют. Тогда справедлива формула*

$$\mathbf{k}(t)=\sum_{j=1}^{n}e^{t\mathbf{a}_j}\prod_{1\le k\le n,k\ne j}^{n}(\mathbf{a}_j-\mathbf{a}_k)^{-1}. \tag{7}$$

Алгебраическое отступление. Обозначим через $\mathbb{B}^n$ совокупность столбцов $\mathbf{x}=\mathrm{col}(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n)$, где $\mathbf{x}_j$ из $\mathbb{B}$ при $1\le j\le n$, т.е. $\mathbb{B}^n=\mathbb{B}\times\ldots\times\mathbb{B}$ (n раз). Определим покомпонентно алгебраические операции сложения, умножения на комплексные числа (а также на элементы банаховой алгебры $\mathbb{B}$) и умножения, мы придем к комплексной банаховой алгебре $\mathbb{B}^n$, если введем норму каким-нибудь подходящим образом.

Обозначим через $\mathbb{B}^{n\times n}$ совокупность квадратных $(n\times n)$-матриц $\mathbf{A}=(\mathbf{a}_{jk})$, где $\mathbf{a}_{jk}$ из $\mathbb{B}$ при $1\le j,k\le n$. Определим естественным образом алгебраические операции сложения, умножения на комплексные числа (а также на элементы банаховой алгебры $\mathbb{B}$) и умножения (по правилу строка на столбец), мы придем к комплексной банаховой алгебре $\mathbb{B}^{n\times n}$, если введем норму каким-нибудь подходящим образом. Полагая $\mathbf{y}_j=\mathbf{a}_{j1}\mathbf{x}_1+\ldots+\mathbf{a}_{jn}\mathbf{x}_n$ при $1\le j,k\le n$, мы придем к линейному ограниченному оператору $\mathbf{A}\colon \mathbb{B}^n\to\mathbb{B}^n$.

Матрица Вандермонда. В дальнейшем важную роль играет $(n\times n)$-матрица

$$\mathbf{W}=\mathbf{W}(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n)=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{1}&\ldots&\mathbf{1}\\ \mathbf{a}_1&\mathbf{a}_2&\ldots&\mathbf{a}_n\\ \mathbf{a}_1^2&\mathbf{a}_2^2&\ldots&\mathbf{a}_n^2\\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\ \mathbf{a}_1^{n-1}&\mathbf{a}_2^{n-1}&\ldots&\mathbf{a}_n^{n-1}\end{pmatrix}, \tag{8}$$

которая (по вполне понятным причинам) называется матрицей Вандермонда. Здесь $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ — произвольный набор элементов из $\mathbb{B}$ и $n\ge 2$. Матрица Вандермонда $\mathbf{W}$ обратима, если существует такая $(n\times n)$-матрица $\mathbf{C}=(\mathbf{c}_{jk})$ из $\mathbb{B}^{n\times n}$, для которой $\mathbf{WC}=\mathbf{E}$ и $\mathbf{CW}=\mathbf{E}$, где $\mathbf{E}=\mathrm{diag}(\mathbf{1},\ldots,\mathbf{1})$ есть единичная матрица в $\mathbb{B}^{n\times n}$.

Матрица Вандермонда $\mathbf{W}(\mathbf{a},\mathbf{b})$ обратима тогда и только тогда, когда обратима разность $\mathbf{a}-\mathbf{b}$. При выполнении этого условия обратная матрица имеет вид

$$\mathbf{W}^{-1}(\mathbf{a},\mathbf{b})=\begin{pmatrix}(\mathbf{b}-\mathbf{a})^{-1}\mathbf{b}&-(\mathbf{b}-\mathbf{a})^{-1}\\ -(\mathbf{b}-\mathbf{a})^{-1}\mathbf{a}&(\mathbf{b}-\mathbf{a})^{-1}\end{pmatrix}=$$
$$=(\mathbf{b}-\mathbf{a})^{-1}\begin{pmatrix}\mathbf{b}&-\mathbf{1}\\ -\mathbf{a}&\mathbf{1}\end{pmatrix}.$$

Матрица Вандермонда $\mathbf{W}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ обратима тогда и только тогда, когда обратимы разности $\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\mathbf{b}-\mathbf{c}$, $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ и обратимы $[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]$, $[\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a}]$ и $[\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}]$, где $[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]\equiv(\mathbf{a}^2-\mathbf{b}^2)-(\mathbf{b}^2-\mathbf{c}^2)(\mathbf{b}-\mathbf{c})^{-1}(\mathbf{a}-\mathbf{b})$ и т.д. При выполнении этих условий обратная матрица имеет вид

$$\mathbf{W}^{-1}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=\begin{pmatrix}[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]^{-1}&0&0\\ 0&[\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a}]^{-1}&0\\ 0&0&[\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}]^{-1}\end{pmatrix}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}-\mathbf{b}^2+(\mathbf{c}^2-\mathbf{a}^2)(\mathbf{c}-\mathbf{a})^{-1}\mathbf{b}&-(\mathbf{b}^2-\mathbf{c}^2)(\mathbf{b}-\mathbf{c})^{-1}&\mathbf{1}\\ -\mathbf{c}^2+(\mathbf{a}^2-\mathbf{b}^2)(\mathbf{a}-\mathbf{b})^{-1}\mathbf{c}&-(\mathbf{c}^2-\mathbf{a}^2)(\mathbf{c}-\mathbf{a})^{-1}&\mathbf{1}\\ -\mathbf{a}^2+(\mathbf{b}^2-\mathbf{c}^2)(\mathbf{b}-\mathbf{c})^{-1}\mathbf{a}&-(\mathbf{a}^2-\mathbf{b}^2)(\mathbf{a}-\mathbf{b})^{-1}&\mathbf{1}\end{pmatrix}.$$

Теорема 5. *Пусть банахова алгебра $\mathbb{B}$ является коммутативной. Тогда для обратимости матрицы Вандермонда $\mathbf{W}(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n)$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\textit{разность } \mathbf{a}_j-\mathbf{a}_k \textit{ была обратима при } j\ne k. \tag{9}$$

Возвращаясь к общему случаю, заметим, что условие (9) заведомо будет выполнено, если элементы $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ спектрально разделены [13], т.е.

$$S(\mathbf{a}_j)\cap S(\mathbf{a}_k)=0 \quad \text{при} \quad j\ne k. \tag{10}$$

Сопровождающая матрица Фробениуса. Поставим в соответствие скалярному характеристическому многочлену $\mathbf{l}_n(\lambda)$ матрицу из $\mathbb{B}^{n\times n}$ — так называемую сопровождающую матрицу Фробениуса

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}&\ldots&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\ \mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}&\ldots&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\ \mathbf{0}&\ldots&\ldots&\ldots&\mathbf{0}&\mathbf{1}\\ -\mathbf{p}_n&\ldots&\ldots&\ldots&-\mathbf{p}_2&-\mathbf{p}_1\end{pmatrix}. \tag{11}$$

Теорема 6 (сравни с [14, с. 154]). *Спектр S скалярного характеристического многочлена $\mathbf{l}_n(\lambda)$ совпадает со спектром $S(\mathbf{A})$ сопровождающей матрицы Фробениуса, т.е. $S=S(\mathbf{A})$.*

Основная формула. Пусть $\mathbf{a}$ из $\mathbb{B}$ есть корень характеристического уравнения (3). Построим вектор из $\mathbb{B}^n$, положив $\mathbf{h}(\mathbf{a})=\mathrm{col}\,(\mathbf{1},\mathbf{a},\ldots,\mathbf{a}^{n-1})$. Тогда $\mathbf{Ah}(\mathbf{a})=\mathbf{ah}(\mathbf{a})$. Мы назовем в этом случае $\mathbf{a}$ алгебраическим собственным значением оператора $\mathbf{A}$, а $\mathbf{h}(\mathbf{a})$ — алгебраическим собственным вектором. Пусть $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ — попарно различные корни характеристического уравнения (4). Так как $\mathbf{Ah}(\mathbf{a}_j)=\mathbf{a}_j\mathbf{h}(\mathbf{a}_j)$ при $1\le j\le n$, то $\mathbf{AW}=\mathbf{W}\mathrm{diag}(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n)$, где $\mathbf{W}=\mathbf{W}(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n)$ — матрица Вандермонда (8). Предполагая матрицу Вандермонда $\mathbf{W}$ обратимой, получаем

$$\mathbf{A}=\mathbf{W}\mathrm{diag}(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n)\mathbf{W}^{-1}. \tag{12}$$

Приложение к дифференциальному уравнению. Одно дифференциальное уравнение n-го порядка (1) равносильно системе n дифференциальных уравнений первого порядка $\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{x}_3, \ldots, \dot{\mathbf{x}}_{n-1} = \mathbf{x}_n, \dot{\mathbf{x}}_n = -\mathbf{p}_n\mathbf{x}_1 - \ldots - \mathbf{p}_1\mathbf{x}_n$. Запишем эту систему в векторно-матричном виде $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ($\mathbf{x} \in \mathbb{B}^n$). Мы видим, что матрица $\mathbf{A}$ из $\mathbb{B}^{n\times n}$ в точности совпадает со сопровождающей матрицей Фробениуса (11), что и объясняет ее происхождение. Согласно формуле (12) мы можем написать

$$e^{t\mathbf{A}} = e^{t\mathbf{WDW}^{-1}} = \mathbf{W}e^{t\mathbf{D}}\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{W}\begin{pmatrix} e^{t\mathbf{a}_1} & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & e^{t\mathbf{a}_n} \end{pmatrix}\mathbf{W}^{-1},$$

где, краткости ради, положили $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$. Далее, нетрудно видеть, что функция Коши для дифференциального уравнения (1) имеет вид

$$\mathbf{k}(t) = \sum_{j=1}^{n} e^{t\mathbf{a}_j}\mathbf{c}_{jn}, \tag{13}$$

где в качестве коэффициентов фигурируют элементы n-го (последнего) столбца матрицы $\mathbf{C} = \mathbf{W}^{-1}$.

Теоремы Сильвестра (продолжение) и Виета. Рассмотрим резольвенту $(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ матрицы $\mathbf{A}$ при λ из $R(\mathbf{A})$, где $\mathbf{A}$ – это матрица (11) из $\mathbb{B}^{n\times n}$, $R(\mathbf{A})$ из $\mathbb{C}$ – ее резольвентное множество. Согласно формуле (12) получаем

$$\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A} = \lambda\mathbf{E} - \mathbf{WDW}^{-1} = \mathbf{W}(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{D})\mathbf{W}^{-1} = \\ = \mathbf{W}\operatorname{diag}(\lambda - \mathbf{a}_1, \ldots, \lambda - \mathbf{a}_n)\mathbf{W}^{-1}.$$

Поэтому

$$(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{W}\operatorname{diag}((\lambda - \mathbf{a}_1)^{-1}, \ldots, (\lambda - \mathbf{a}_n)^{-1})\mathbf{W}^{-1} \\ \left(\lambda \in R = R(\mathbf{A}) = \bigcap_{j=1}^{n} R(\mathbf{a}_j)\right). \tag{14}$$

Из (14) вытекает

$$S = S(\mathbf{A}) = \bigcup_{j=1}^{n} S(\mathbf{a}_j). \tag{15}$$

Мы доказали теорему Сильвестра (ср. с [15, с. 441, задача 155]).

Теорема 7. *Спектр S скалярного характеристического многочлена $\mathbf{l}_n(\lambda)$ совпадает с объединением спектров характеристических корней $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$* (при этом напомним, что нами было сделано серьезное предположение о спектральной разделенности $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ (10) и об обратимости матрицы Вандермонда (8) $\mathbf{W}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$).

Полагая $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{jk})$, где $1 \le j, k \le n$, из формулы (12) получаем $\mathbf{a}_{jk} = \sum_{s=1}^{n} \mathbf{a}_s^j\mathbf{c}_{sk}$, где, напомним, $\mathbf{C} = (\mathbf{c}_{jk}) = \mathbf{W}^{-1}$. Поэтому

$$-\mathbf{p}_j = \mathbf{a}_{n,n+1-j} = \sum_{s=1}^{n} \mathbf{a}_s^n\mathbf{c}_{s,n+1-j} \quad (1 \le j \le n). \tag{16}$$

Мы выразили коэффициенты характеристического многочлена $\mathbf{l}_n(\mathbf{a})$ через его корни $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$. Назовем формулы (16) некоммутативными формулами Виета.

Теорема 8. *В условиях теоремы* 7 *справедливы некоммутативные формулы Виета.*

Во многих вопросах оказывается полезной следующая явная формула:

$$\mathbf{r}_n(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} (\lambda - \mathbf{a}_j)^{-1}\mathbf{c}_{jn} \\ \left(\lambda \in R = R(\mathbf{A}) = \bigcap_{j=1}^{n} R(\mathbf{a}_j)\right). \tag{17}$$

Основная теорема. Рассмотрим контурный интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\sigma} f(\lambda)\mathbf{r}_n(\lambda)d\lambda, \tag{18}$$

где $f(\lambda)$: $G \to \mathbb{C}$ (кусочно) аналитическая функция, заданная на открытом множестве G, содержащем весь спектр S скалярного характеристического многочлена $\mathbf{l}_n(\lambda)$, а контур $\partial\sigma$, лежащий в открытом множестве $R \cap G$, охватывает спектр S.

Пусть $\mathbb{B}(G)$ – совокупность всех тех $\mathbf{x}$ из $\mathbb{B}$, спектр $S(\mathbf{x})$ которых лежит в G; это множество открыто. Продолжим $f(\lambda)$ с G на $\mathbb{B}(G)$, положив

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\sigma} f(\lambda)(\lambda - \mathbf{x})^{-1}d\lambda, \tag{19}$$

где контур $\partial\sigma$ лежит в открытом множестве $R(\mathbf{x}) \cap G$ и окружает спектр $S(\mathbf{x})$ элемента $\mathbf{x}$. (Мы сохранили для продолжения прежнее обозначение.)

Согласно формуле (17) находим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\sigma} f(\lambda)\mathbf{r}_n(\lambda)d\lambda = \\ = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\sigma} f(\lambda)\sum_{j=1}^{n}(\lambda - \mathbf{a}_j)^{-1}\mathbf{c}_{jn}d\lambda = \\ = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\sigma} f(\lambda)(\lambda - \mathbf{a}_j)^{-1}\mathbf{c}_{jn}d\lambda = \sum_{j=1}^{n} f(\mathbf{a}_j)\mathbf{c}_{jn}$$

(последнее – в силу формулы (19)).

Теорема 9. *Пусть корни $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ спектрально разделены*, *т.е. выполнено условие* (10). *Пусть мат-*

рица Вандермонда (8) $\mathbf{W}(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n)$ *обратима. Тогда справедлива формула*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\sigma} f(\lambda)\mathbf{r}_n(\lambda)d\lambda = \sum_{j=1}^{n} f(\mathbf{a}_j)\mathbf{c}_{jn}. \tag{20}$$

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ, проект № 19–01–00732.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. 448 с.
2. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962. 830 с.
3. *Перов А.И., Коструб И.Д.* Об ограниченных решениях слабо нелинейных векторно-матричных дифференциальных уравнений n-го порядка // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57. № 4. С. 830–849.
4. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 536 с.
5. *Стрелков С.П.* Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1964. 440 с.
6. *Kurbatov V.G., Kurbatova I.V.* Computation of Green's Function of the Bounded Solutions Problem, Comput. Methods Appl. Math. 2017. https://doi.org/10.1515/cmam-2017-0042
7. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 581 с.
8. *Пароди М.* Локализация характеристических чисел матриц и ее применение. М.: ИЛ, 1960. 172 с.
9. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.
10. *Перов А.И., Коструб И.Д.* Об одном квадратном уравнении. Scientific Light. Wroclaw. 2019. V. 1. № 26. P. 33–34.
11. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 496 с.
12. *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей. М.: Физматгиз, 1959. 400 с.
13. *Далецкий Ю.Л.* Об одном линейном уравнении относительно элементов нормированного кольца // УМН. 1959. Т. 14. Вып. 1(85). С. 165-168.
14. *Икрамов Х.Д.* Задачник по линейной алгебре. М.: Наука, 1975. 320 с.
15. *Глазман И.М., Любич Ю.И.* Конечномерный линейный анализ. М.: Наука, 1969. 476 с.

DIFFERENTIAL EQUATIONS IN BANACH ALGEBRAS

A. I. Perov[a] and I. D. Kostrub[a]

[a]*Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS E.I. Moiseev

In complex Banach algebra, whose commutativity is not assumed, n^{th} order linear differential equations with constant coefficients are considered. It is assumed that the corresponding algebraic characteristic equation of the nth degree has n different roots for which the constructed Vandermond matrix is invertible. The analogues of Sylvester and Viet's theorem are proved, and the contour integral of Cauchy type is studied.

Keywords: Banach algebra, higher order differential equations, algebraic characteristic equation, Vandermond matrix, Sylvester and Viet theorems, Cauchy type contour integral