ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 491, с. 65–67

МАТЕМАТИКА

УДК 517.927.25

РАВНОМЕРНАЯ НА ПРЯМОЙ РАВНОСХОДИМОСТЬ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

© 2020 г. Л. В. Крицков[1,*]

Представлено академиком РАН Е.И. Моисеевым 18.12.2012 г.
Поступило 19.12.2019 г.
После доработки 19.12.2019 г.
Принято к публикации 26.02.2020 г.

Представлен результат о равномерной на всей прямой равносходимости с разложением в интеграл Фурье для спектральных разложений, отвечающих самосопряженному расширению общей дифференциальной операции любого четного порядка с коэффициентами из одномерного класса Като. Утверждение основано на полученных равномерных оценках спектральной функции рассматриваемого оператора.

Ключевые слова: самосопряженный дифференциальный оператор четного порядка, спектральное разложение, равносходимость

DOI: 10.31857/S2686954320020149

1. В работе рассматриваются самосопряженные операторы A, порожденные на всей прямой $\mathbb{R}$ формально самосопряженными дифференциальными операциями произвольного четного порядка вида

$$l(u) = (-1)^n D^{2n}u + \sum_{k=1}^{n-1} D^k(q_k(x) D^k u) + q_0(x)u \quad (1)$$

с вещественными коэффициентами $\left(\text{здесь } D = \dfrac{d}{dx}\right)$.

Исследуется вопрос о сходимости спектральных разложений, отвечающих таким операторам, в равномерной на $\mathbb{R}$ метрике при минимальных требованиях на коэффициенты в (1).

Хорошо известно, что разложение произвольной функции $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ в интеграл Фурье, которое фактически совпадает со спектральным разложением, отвечающим единственному самосопряженному расширению A_0 операции (1) с тождественно нулевыми коэффициентами (в дальнейшем l_0), сходится к разлагаемой функции в метрике $L_2(\mathbb{R})$. Для того чтобы обеспечить его сходимость в более сильной, равномерной на $\mathbb{R}$ метрике, необходимо потребовать от функции $f(x)$ большей гладкости, – например, принадлежности классу Соболева–Лиувилля $L_2^{\alpha}(\mathbb{R})$ с показателем гладкости $\alpha > \dfrac{1}{2}$ (см. [1, гл. V; 2]).

Распространение подобных результатов на спектральные разложения, отвечающие общим самосопряженным дифференциальным операторам, является важным направлением исследований спектральной теории.

Одним из широко используемых приемов получения теорем о сходимости является сравнение спектрального разложения для общего оператора с хорошо изученным, более простым разложением, а именно, обоснование равносходимости общего спектрального разложения с разложением в интеграл Фурье (или ряд Фурье), т.е. стремления к нулю разности этих разложений в подходящей метрике.

Для самосопряженных дифференциальных операторов второго порядка с локально суммируемым коэффициентом $q_0(x)$ в (1) теоремы равносходимости спектральных разложений функций $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ в метрике, равномерной на каждом компакте в $\mathbb{R}$, были доказаны в [3, 4]. Эти результаты были перенесены на самосопряженные операторы любого четного порядка в [5] (см. также обзор [6]).

Первые результаты о сходимости спектральных разложений в метрике, равномерной на всей прямой $\mathbb{R}$, появились позже, в работах [7, 8]. Были рассмотрены самосопряженные операторы A, отвечающие операции (1) второго порядка, в ко-

[1] *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: kritskov@cs.msu.ru*

торых коэффициент $q_0(x)$ удовлетворяет условию Като

$$\|q_0\|_* \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}} \int\limits_{|x-y|\le 1} |q_0(y)|\,dy < \infty. \qquad (2)$$

Условие (2) естественно в том смысле, что подобный класс возмущений порождает операторы A, близкие по своим спектральным свойствам к невозмущенным [9].

В настоящей работе равномерная на всей прямой равносходимость установлена для спектральных разложений, отвечающих операциям (1) любого четного порядка $2n$, при условии, что все коэффициенты в них принадлежат классу Като (2).

2. Перейдем к точной формулировке и анализу полученных результатов.

Пусть коэффициенты дифференциальной операции (1) вещественны и таковы, что

$$\|q_k\|_* < \infty \qquad (3)$$

для всех $k = 0, 1, ..., n - 1$. Так как коэффициенты в (1), вообще говоря, могут не обладать какой-либо дополнительной гладкостью, то определим самосопряженный оператор A через естественно связанную с операцией (1) квадратичную форму. Существование и полуограниченность такого оператора A следует из известных теорем теории возмущений [10, с. 577]. В дальнейшем будем, не ограничивая общности, считать, что построенный таким образом оператор A строго положителен.

Пусть $\{E_\lambda\}$ – разложение единицы для оператора A, а $\{E_\lambda^0\}$ – разложение единицы для невозмущенного оператора A_0.

Т е о р е м а 1. *Для любой функции* $f(x) \in L_p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le 2$, *справедливо соотношение*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |E_\lambda f(x) - E_\lambda^0 f(x)| = 0. \qquad (4)$$

Отметим, что в [7] это утверждение было установлено в случае $n = 1$.

Учитывая известные теоремы вложения и свойство равномерной сходимости разложения в интеграл Фурье, получим следующий результат.

Т е о р е м а 2. *Для любой функции* $f(x)$, *принадлежащей классу Соболева–Лиувилля* $L_p^\beta(\mathbb{R})$ *при* $p \in (1,2]$ *и* $\beta p > 1$, *спектральное разложение* $E_\lambda f(x)$ *сходится равномерно на всей прямой* $\mathbb{R}$.

3. Доказательство теоремы 1 развивает методику В.А. Ильина [7, 11] изучения спектральных разложений.

Ключевым этапом является оценка спектральной функции оператора A с помощью обобщенных собственных функций упорядоченного спектрального представления пространства $L_2(\mathbb{R})$ относительно A.

Спектральной функцией $\theta(\lambda; x, y)$ называют ядро в интегральном представлении действия спектрального проектора E_λ:

$$E_\lambda f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \theta(\lambda; x, y) f(y)\,dy. \qquad (5)$$

Л е м м а 1. *Пусть* $\theta_0(\lambda; x, y) = \dfrac{\sin \sqrt[2n]{\lambda}(x-y)}{\pi(x-y)}$ – *спектральная функция невозмущенного оператора* A_0. *Тогда при выполнении условий* (3) *для спектральной функции в* (5) *равномерно по* $\lambda > 0$ *выполнена оценка*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \|\theta(\lambda; x, \cdot) - \theta_0(\lambda; x, \cdot)\|_{L_s(\mathbb{R})} \le C_1, \qquad (6)$$

где $2 \le s \le \infty$.

Отметим, что прежние оценки спектральной функции в [3–5] были получены лишь при условии, что переменная x в (6) изменяется на произвольном компакте K прямой $\mathbb{R}$.

Л е м м а 2. *При выполнении условий* (3) *равномерно по* $x \in \mathbb{R}$ *и* $\mu > 0$ *выполнена оценка*

$$|\theta((\mu+1)^{2n}; x, x) - \theta(\mu^{2n}; x, x)| \le C_2. \qquad (7)$$

Равномерная на $\mathbb{R}$ оценка (7) приращения спектральной функции оператора A на “диагонали” была получена в [12] для оператора второго порядка. Аналогичные (7) равномерные оценки известны также для многомерного оператора Шрёдингера в $\mathbb{R}^N$ [13, 14].

Техника получения оценок (6) и (7) основана на интегральном представлении обобщенных собственных функций оператора A как решений уравнения $l(u) = \lambda u$ из класса $W_{2,\mathrm{loc}}^n(\mathbb{R})$. Так как в этом представлении интегральные слагаемые содержат производные обобщенных собственных функций до порядка n включительно, то наряду с вытекающей из (7) равномерной оценкой “пачки” из собственных функций были установлены аналогичные оценки для их производных.

Оценка (7) леммы 2 позволяет доказать, что спектральное разложение $E_\lambda f(x)$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$ для всех функций $f(x)$, принадлежащих области определения оператора A^α с любым $\alpha > \dfrac{1}{4n}$. Так как область определения оператора $A^{1/2}$ в рассматриваемом нами случае совпадает с $W_2^n(\mathbb{R})$, то теорема 1 получается из оценки леммы 1 стандартными рассуждениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бохнер С.* Лекции об интегралах Фурье. М.: Физматгиз, 1962.
2. *Ильин В.А., Антониу И.* Равномерная на всей прямой R оценка отклонения от разлагаемой функции

ее спектрального разложения, отвечающего оператору Шредингера с ограниченным и измеримым потенциалом // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 10. С. 1649–1657.

3. *Левитан Б.М.* Об асимптотическом поведении спектральной функции и о разложении по собственным функциям самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка. II // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1955. Т. 19. № 1. С. 33–58.
4. *Марченко В.А.* Теоремы тауберова типа в спектральном анализе дифференциальных операторов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1955. Т. 19. № 6. С. 381–422.
5. *Костюченко А.Г.* Асимптотика спектральной функции сингулярного дифференциального оператора порядка // ДАН СССР. 1966. Т. 168. № 2. С. 276–279.
6. *Minkin A.M.* Equiconvergence theorems for differential operators // J. Math. Sci. 1999. V. 96. № 6. P. 3631–3715.
7. *Ильин В.А.* Равномерная на всей прямой R равносходимость с интегралом Фурье спектрального разложения, отвечающего самосопряженному расширению оператора Шредингера с равномерно локально суммируемым потенциалом // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 12. С. 1957–1967.
8. *Ильин В.А., Крицков Л.В.* Равномерная на всей прямой R оценка скорости сходимости спектрального разложения, отвечающего оператору Шредингера с суммируемым потенциалом // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 1. С. 32–36.
9. *Simon B.* Schrodinger semigroups // Bull. Amer. Math. Soc. 1982. V. 7. № 3. P. 447–526.
10. *Simon B.* Operator Theory: A Comprehensive Course of Analysis. Pt 4. Providence (RI): American Math. Society, 2015.
11. *Ильин В.А.* Спектральная теория дифференциальных операторов. Самосопряженные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1991.
12. *Ильин В.А., Крицков Л.В.* Равномерная на всей прямой оценка обобщенных собственных функций одномерного оператора Шредингера с равномерно локально суммируемым потенциалом // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 8. С. 1323–1329.
13. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* Точная по порядку и равномерная в R^N при $N = 2$ и $N = 3$ оценка квадратов фундаментальных функций самосопряженного расширения в R^N оператора Шредингера с потенциалом, удовлетворяющим условию Като // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 3. С. 357–374.
14. *Крицков Л.В.* Оценка приращения спектральной функции оператора Шредингера с потенциалом, удовлетворяющим условию типа Като // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 8. С. 1077–1086.

UNIFORM ON THE LINE EQUICONVERGENCE OF SPECTRAL EXPANSIONS FOR THE HIGHER-ORDER DIFFERENTIAL OPERATORS

L. V. Kritskov

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS E.I. Moiseev

Result on equiconvergence, uniform on the whole line, with the Fourier integral of spectral expansions related to the self-adjoint extension of the general even-order differential operation with coefficients from the one-dimensional Kato class, is presented. It is based on the obtained uniform estimates for the spectral function of this operator.

Keywords: self-adjoint even-order differential operator, spectral expansion, equiconvergence