ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 491, с. 61–64

МАТЕМАТИКА

УДК 517.2+517.4+514.7

ФОРМУЛА КОПЛОЩАДИ ДЛЯ ФУНКЦИЙ НА ДВУСТУПЕНЧАТЫХ ГРУППАХ КАРНО С СУБЛОРЕНЦЕВОЙ СТРУКТУРОЙ

 М. Б. Карманова[1,*]

Представлено академиком РАН Ю.Г. Решетняком 02.12.2019 г.
Поступило 02.12.2019 г.
После доработки 02.12.2019 г.
Принято к публикации 21.01.2020 г.

Для функций класса C^1, определенных на двуступенчатых группах Карно с сублоренцевой структурой в горизонтальном расслоении (определяемой одним направлением, квадрат длины вдоль которого отрицателен), доказана неголономная формула коплощади. Независимый интерес представляет результат о корректности постановки задачи, когда поверхности уровня пространственноподобны.

Ключевые слова: двуступенчатая группа Карно, сублоренцева структура, множество уровня, сублоренцева мера, формула коплощади

DOI: 10.31857/S2686954320020137

Работа посвящена выводу формулы коплощади на двуступенчатых сублоренцевых структурах. Мы рассматриваем модельный случай, когда на группе Карно выделено одно горизонтальное базисное векторное поле, квадрат длины вдоль которого отрицателен, а в качестве отображения берется функция. Формула коплощади активно применяется в современном анализе для решения задач о свойствах экстремальных поверхностей, в теории потоков, алгебраической геометрии, геометрической теории меры и др. В последнее время эта формула была обобщена на широкий класс структур: ее разные варианты были установлены на спрямляемых метрических пространствах и в неголономной геометрии, на пространствах Карно–Каратеодори. Сублоренцевы структуры являются неголономным обобщением геометрии Минковского (см., например, [1]), они и их приложения в физике стали исследоваться недавно [2–5]. Вопрос о формуле коплощади в сублоренцевой геометрии до настоящего времени оставался открытым.

Приведем необходимые определения.

Определение 1 (см., например, [6]). *Двуступенчатой группой Карно* называется связная односвязная стратифицированная группа Ли $\mathbb{G}$, алгебра Ли V которой градуирована, т.е. представляется в виде $V = V_1 \oplus V_2$, $[V_1, V_1] = V_2$, $[V_1, V_2] = \{0\}$. Если базисное поле принадлежит V_1, то его *степень* равна единице и оно называется *горизонтальным*. В противном случае степень равна двум. Размерность V_i в каждой точке будем обозначать символом $\dim V_i$, $i = 1, 2$.

Групповая операция определяется формулой Бейкера–Кэмпбелла–Хаусдорфа.

Опишем субриманов аналог расстояния между точками.

Определение 2 (см. также [7]). Пусть

$$w = \exp\left(\sum_{i=1}^{N} w_i X_i\right)(v),\ v, w \in \mathbb{G}.$$

Зададим величину $d_2(v, w)$ следующим образом:

$$d_2(v,w) = \max\left\{\left(\sum_{j:\deg X_j = 1} w_j^2\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\sum_{j:\deg X_j = 2} w_j^2\right)^{\frac{1}{4}}\right\}.$$

Множество $\{w \in \mathbb{G}: d_2(v, w) < r\}$ называется *шаром относительно* d_2 *радиуса* $r > 0$ с центром в точке v и обозначается символом $\mathrm{Box}_2(v, r)$.

[1] *Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия*
[*] *E-mail: maryka@math.nsc.ru*

Хаусдорфова размерность $\mathbb{G}$ относительно d_2 равна $\dim V_1 + 2\dim V_2$ и обозначается символом ν.

Определение 3. Значение субримановой меры для $A \subset \mathbb{G}$ равно

$$\mathcal{H}^{\nu}(A) = \omega_N \cdot \lim_{\delta\to 0} \inf \left\{ \sum_{i\in\mathbb{N}} r_i^{\nu} : \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Box}_2(x_i, r_i) \supset A,\ x_i \in A,\ r_i < \delta \right\},$$

где $N = \dim V_1 + \dim V_2$ — топологическая размерность $\mathbb{G}$, а точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества A шарами.

Определение 4 [8, 9]. Отображение φ: $U \to \tilde{\mathbb{G}}$, $U \subset \mathbb{G}$, где $\mathbb{G}$ и $\tilde{\mathbb{G}}$ – произвольные группы Карно, hc-дифференцируемо в точке $x \in U$, если существует горизонтальный гомоморфизм $\mathcal{L}_x$: $\mathbb{G} \to \tilde{\mathbb{G}}$ такой, что $d_2(\varphi(w), \mathcal{L}_x\langle w\rangle) = o(d_2(x, w))$, $U \ni w \to x$.

Теорема 1 [8, 9]. *Если φ – функция класса C^1, определенная на группе Карно, то она непрерывно hc-дифференцируема всюду. Ее hc-дифференциал $\nabla_H\varphi$ равен* $(X_1\varphi, \ldots, X_{\dim V_1}\varphi, 0, \ldots, 0)$.

Для описания сублоренцевой структуры на $\mathbb{G}$ введем квадрат сублоренцева расстояния между точками. Так как для определения меры нам нужна система шаров, то определять само расстояние нет необходимости.

Определение 5 (см. общий случай в [10]). Пусть $w = \exp\left(\sum_{i=1}^{N} w_i X_i\right)(v)$, $v, w \in \mathbb{G}$. Зададим величину $\mathfrak{d}_2^2(v, w)$ следующим образом:

$$\mathfrak{d}_2^2(v, w) = \max\left\{ \sum_{j=2}^{\dim V_1} w_j^2 - w_1^2, \left(\sum_{j=\dim V_1+1}^{N} w_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Множество $\{w \in \mathbb{G}\colon \mathfrak{d}_2^2(v, w) < r^2\}$ называется шаром относительно $\mathfrak{d}_2^2$ радиуса $r > 0$ с центром в точке v и обозначается символом $\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(v, r)$.

Квадрат сублоренцевой длины вектора $\sum_{i=1}^{N} w_i X_i(x)$, $x \in \mathbb{G}$, определяется аналогично.

Определение 6 [1]. Если квадрат длины вектора положителен, то он называется пространственноподобным, если отрицателен, то времениподобным, а если нулевой, то светоподобным. Если все касательные векторы поверхности пространственноподобны, то такая поверхность называется пространственноподобной.

Следующее понятие обобщает соответствующее классическое.

Определение 7 [10]. Пусть $v \in \mathbb{G}$. Множество

$$\left\{ \exp\left(\sum_{j=1}^{N} w_j X_j \right)(v)\colon w_1^2 = \sum_{j=2}^{\dim V_1} w_j^2,\ \sum_{j=\dim V_1+1}^{N} w_j^2 = 0 \right\}$$

называется световым конусом с центром в точке v.

Заметим, что для C^1-гладких поверхностей S классическое понятие пространственноподобия можно заменить на следующее свойство: если $v \in S$, то эта поверхность локально лежит вне светового конуса с центром в этой точке, за исключением v. Чтобы корректно ввести понятие сублоренцевой меры Хаусдорфа на множествах уровня функции φ с выбранной системой шаров, нужно, чтобы пересечение шара с поверхностью было ограниченным, а пространственноподобие поверхности гарантирует это свойство. Для этого нужно, чтобы градиент лежал строго внутри светового конуса. Таким образом, для корректной постановки задачи о формуле коплощади функция φ должна удовлетворять следующим требованиям.

Предположение 1. Будем рассматривать функцию φ: $\Omega \to \mathbb{R}$ класса C^1, где $\Omega \subset \mathbb{G}$ – открытое множество, такую, что всюду на Ω верно

$$(X_1\varphi)^2 - \sum_{j=2}^{\dim V_1} (X_j\varphi)^2 \geq c, \quad c > 0.$$

Определение 8. Фиксируем $v \in \mathbb{G}$. Отображение $\theta_v\colon (w_1, \ldots, w_N) \mapsto \exp\left(\sum_{j=1}^{N} w_j X_j \right)(v)$, где $(w_1, \ldots, w_N) \in \mathbb{R}^N$, называется координатами первого рода относительно v.

С помощью перехода в координаты первого рода относительно фиксированной точки легко убедиться, то градиент будет лежать строго внутри светового конуса, а поверхность уровня, проходящая через эту точку, – снаружи, за исключением самой точки. Из сформулированного условия вытекает также невырожденность $\nabla\varphi$ и $\nabla_H\varphi$.

Теорема 2. *Поверхности уровня функции φ, удовлетворяющей условиям предположения* 1, *пространственноподобны.*

Определение 9. Пусть $z \in \mathbb{R}$. Значение сублоренцевой меры для $A \subset \varphi^{-1}(z)$ равно

$$\mathcal{H}^{\nu-1}_{SL}(A) = \omega_{\dim V_1 - 1}\omega_{\dim V_2} \times$$
$$\times \liminf_{\delta\to 0}\left\{\sum_{i\in\mathbb{N}} r_i^{\nu-1} : \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(x_i, r_i) \supset A, x_i \in A, r_i < \delta\right\},$$

где точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества A шарами.

Введем следующее

Обозначение 1. Положим $\nabla^-_H\varphi = X_1\varphi$ и $\nabla^+_H\varphi = (X_2\varphi, \ldots, X_{\dim V_1}\varphi)$.

Опишем основной результат сообщения — сублоренцеву формулу коплощади для функций — и основные идеи вывода. Доказательство основано на получении формулы из классической и подсчете производной сублоренцевой меры $\mathcal{H}^{\nu-1}_{SL}$ по “римановой” мере $\mathcal{H}^{N-1}$ на множествах уровня. Для этого фиксируется точка v, проходящее через нее множество уровня и сублоренцев шар $\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(v, r)$ с центром в этой точке, и вычисляется $\mathcal{H}^{N-1}$-мера пересечения шара и множества. Из результатов [11], а также [12], следует, что она равна

$$\mathcal{H}^{N-1}(\ker\nabla_H\varphi(v) \cap \mathrm{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(v, r)) \times$$
$$\times \frac{\langle\nabla\varphi(v), \nabla\varphi(v)\rangle}{\langle\nabla_H\varphi(v), \nabla_H\varphi(v)\rangle} \times (1 + o(1)),$$

где $o(1) \to 0$ при $r \to 0$. Заметим, что в силу предположения 1 на производные φ, по теореме о неявной функции для $\sum\limits_{j=1}^{\dim V_1} w_j X_j(v) \in \ker\nabla_H\varphi(v) \cap V_1(v)$ имеем

$$w_1 = \sum_{j=2}^{\dim V_1} \frac{X_j\varphi(v)}{X_1\varphi(v)} w_j.$$

Тогда по результатам для отображений-графиков (см., например, [12]) выводим

$$\mathcal{H}^{N-1}(\ker\nabla_H\varphi(v) \cap \mathrm{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(v, r)) =$$
$$= \frac{\left(1 + \sum\limits_{j=2}^{\dim V_1} \frac{(X_j\varphi(v))^2}{(X_1\varphi(v))^2}\right)^{1/2}}{\left(1 - \sum\limits_{j=2}^{\dim V_1} \frac{(X_j\varphi(v))^2}{(X_1\varphi(v))^2}\right)^{1/2}} \times$$
$$\times \omega_{\dim V_1 - 1}\omega_{\dim V_2} r^{\nu-1}(1 + o(1)),$$

где $o(1) \to 0$ при $r \to 0$. Отсюда следует, что

$$\mathcal{H}^{N-1}(\varphi^{-1}(\varphi(v)) \cap \mathrm{Box}_{\mathfrak{d}_2^2}(v, r)) =$$
$$= \frac{\langle\nabla\varphi(v), \nabla\varphi(v)\rangle}{\langle\nabla^-_H\varphi, \nabla^-_H\varphi\rangle - \langle\nabla^+_H\varphi, \nabla^+_H\varphi\rangle} \times$$
$$\times \omega_{\dim V_1 - 1}\omega_{\dim V_2} r^{\nu-1} \left| g|_{\ker\nabla\varphi(v)}(v) \right| (1 + o(1)),$$

где g — риманов тензор и $o(1) \to 0$ при $r \to 0$.

Теорема 3. *Пусть $\mathbb{G}$ — двуступенчатая группа Карно. Для $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, где $\Omega \subset \mathbb{G}$ — открытое множество, и $\langle\nabla^-_H\varphi, \nabla^-_H\varphi\rangle \geq \langle\nabla^+_H\varphi, \nabla^+_H\varphi\rangle + c$ всюду на Ω, $c > 0$, справедлива формула коплощади*

$$\int_\Omega \sqrt{\langle\nabla^-_H\varphi, \nabla^-_H\varphi\rangle - \langle\nabla^+_H\varphi, \nabla^+_H\varphi\rangle}\, d\mathcal{H}^\nu(x) =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} dz \int_{\varphi^{-1}(z)} d\mathcal{H}^{\nu-1}_{SL}(y).$$

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации номер 075-15-2019-1613.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Миклюков В.М., Клячин А.А., Клячин В.А.* Максимальные поверхности в пространстве-времени Минковского [Электронный ресурс] // http://www.uchimsya.info/maxsurf.pdf.
2. *Берестовский В.Н., Гичев В.М.* // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11. В. 4. С. 1–34.
3. *Grochowski M.* // J. Dyn. Control Syst. 2006. V. 12. № 2. P. 145–160.
4. *Korolko A., Markina I.* // Complex Anal. Oper. Theory. 2010. V. 4. № 3. P. 589–618.
5. *Крым В.Р., Петров Н.Н.* // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2008. В. 3. С. 68–80.
6. *Folland G.B., Stein E.M.* Hardy Spaces on Homogeneous Groups // Princeton: Princeton Univ. Press, 1982.
7. *Карманова М.Б.* // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58. № 2. С. 232–254.
8. *Pansu P.* // Ann. Math. 1989. V. 129. P. 1–60.
9. *Vodopyanov S.* // Contemporary Mathematics. Providence (RI): Amer. Math. Soc. 2007. V. 424. P. 247–301.
10. *Карманова М.Б.* // ДАН. 2017. Т. 474. № 2. С. 151–154.
11. *Karmanova M., Vodopyanov S.* // Acta Applicandae Mathematicae. 2013. V. 128. № 1. P. 67–111.
12. *Карманова М.Б.* // Изв. РАН. Сер. мат. 2020. Т. 84. № 1. С. 60–104.

COAREA FORMULA FOR FUNCTIONS ON TWO-STEP CARNOT GROUPS WITH SUB-LORENTZIAN STRUCTURE

M. B. Karmanova

Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS Yu.G. Reshetnyak

We consider C^1-functions defined on two-step Carnot groups with sub-Lorentzian structure defined by one horizontal direction with negative square of length along it, and prove the non-holonomic coarea formula. Result on correctness of problem statement, that is, the level sets should be space-like, is of independent interest.

Keywords: two-step Carnot group, sub-Lorentzian structure, level set, sub-Lorentzian measure, coarea formula