

УДК 517.938, 517.958, 51-73

О СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВОЛНОВОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ЗАХАРОВА–ЛЬВОВА

© 2020 г. А. В. Дымов^{1,*}, С. Б. Куксин^{2,3,4,**}

Представлено академиком РАН Д.В. Трещевым 09.11.2019 г.

Поступило 09.11.2019 г.

После доработки 09.11.2019 г.

Принято к публикации 21.01.2020 г.

Авторы обсуждают ряд строгих результатов в стохастической модели волновой турбулентности Захарова–Львова. А именно, рассматривают уравнение Шрёдингера с (модифицированной) кубической нелинейностью и вязкостью на торе большого периода, возмущенное случайной силой, и раскладывают его решение в формальный ряд по амплитуде. Авторы показывают, что в пределе, когда амплитуда стремится к нулю, а период тора — к бесконечности, спектр энергии квадратичной срезки этого разложения сходится к решению волнового кинетического уравнения с вязкостью и внешней силой. Затем обсуждают срезки этого разложения высшего порядка.

Ключевые слова: волновая турбулентность, энергетический спектр, волновое кинетическое уравнение, кинетический предел, нелинейное уравнение Шрёдингера, стохастическое возмущение

DOI: 10.31857/S2686954320020101

1. ВВЕДЕНИЕ

Доказательства утверждений, приведенных ниже без ссылок, можно найти в работах [2, 3].

1.1. Модель

Рассмотрим тор $\mathbb{T}_L^d = \mathbb{R}^d / (L\mathbb{Z}^d)$ периода $L \geq 1$ и размерности $d \geq 2$. Обозначим через H пространство $L_2(\mathbb{T}_L^d; \mathbb{C})$, снабженное нормированной мерой Лебега:

$$\|u\|^2 = \|u\|_{L_2(\mathbb{T}_L^d)}^2 = \langle u, u \rangle, \quad \langle u, v \rangle = L^{-d} \int_{\mathbb{T}_L^d} u \bar{v} dx.$$

Рассмотрим модифицированное нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ)

$$\frac{\partial}{\partial t} u + i\Delta u - iv(|u|^2 - \|u\|^2)u = 0, \\ \Delta = (2\pi)^{-2} \sum_{j=1}^d \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \right), \quad x \in \mathbb{T}_L^d,$$

где $v \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$. Это гамильтоново УРЧП, полученное модификацией стандартного кубического НУШ с помощью другого гамильтонового уравнения $\frac{\partial}{\partial t} u = -iv\|u\|^2 u$, поток которого коммутирует с потоком кубического НУШ. Модифицированное НУШ может быть получено из стандартного кубического НУШ с помощью подстановки

$$u = \exp(iv\|u'\|^2)u'.$$

Такая модификация достаточно часто используется людьми, работающими с гамильтоновыми УРЧП, так как, сохраняя основные свойства НУШ, она уменьшает некоторые второстепенные технические трудности. Роль этой модификации состоит в том, чтобы убрать из гамильтониана НУШ интегрируемую часть (см. вторую сноску ниже). Если бы вместо кубического уравнения мы рассматривали квадратичное НУШ, описывающее трехволновую систему, то модификация не понадобилась бы.

Далее мы будем записывать решения u как $u(t, x) \in \mathbb{C}$ или $u(t) \in H$. В медленном времени $\tau = vt$ рассматриваемое уравнение принимает вид

$$\dot{u} + iv^{-1}\Delta u - i(|u|^2 - \|u\|^2)u = 0, \\ \dot{u} = \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \right) u(\tau, x), \quad x \in \mathbb{T}_L^d. \tag{1}$$

Задача волновой турбулентности (ВТ) состоит в изучении поведения решений уравнения (1) в пределе

¹Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия

²Université Paris-Diderot (Paris 7), Paris, France

³Shandong University, Jinan, PRC

⁴Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

*E-mail: dymov@mi-ras.ru

**E-mail: Sergei.Kuksin@imj-prg.fr

$$v \rightarrow 0, \quad L \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Далее мы будем писать ряды Фурье функций $u(x)$ в виде

$$u(x) = L^{-d/2} \sum_{s \in \mathbb{Z}_L^d} v_s e^{2\pi i s \cdot x}, \quad \mathbb{Z}_L^d = L^{-1} \mathbb{Z}^d,$$

где $v_s := \hat{u}(s) = L^{-d/2} \int_{\mathbb{T}_L^d} u(x) e^{-2\pi i s \cdot x} dx$. Тогда

$$\|u\|^2 = L^{-d} \sum_s |v_s|^2 =: \|v\|^2 = \|v\|_{L_2(\mathbb{Z}_L^d)}^2. \quad (3)$$

Обозначая через h гильбертово пространство $h = (L_2(\mathbb{Z}_L^d), \|\cdot\|)$, мы видим, что разложение в ряд Фурье задает изоморфизм $H \rightarrow h$, $u(x) \mapsto (v_s = \hat{u}(s))$.

При исследовании уравнения (1) специалисты, работающие в ВТ, часто говорят о “подкачке энергии в низкие моды и ее диссипации в высоких модах”. Чтобы придать этим словам строгий смысл, Захаров и Львов [12] (см. также в [4], раздел 1.2) предложили рассматривать НУШ с (гипер)вязкостью, возмущенное случайной силой:

$$\begin{aligned} \dot{u} + iv^{-1} \Delta u - i\rho(|u|^2 - \|u\|^2)u = \\ = -(-\Delta + 1)^{r_*} u + \eta^\omega(\tau, x), \quad r_* > 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где параметр $\rho > 0$, а случайный процесс η задан своим разложением в ряд Фурье

$$\eta^\omega(\tau, x) = L^{-d/2} \sum_s b_s \beta_s^\omega(\tau) e^{2\pi i s \cdot x}. \quad (5)$$

Здесь $\{\beta_s(\tau), s \in \mathbb{Z}_L^d\}$ – стандартные комплексные независимые винеровские процессы¹, а постоянные $b_s > 0$ быстро убывают при $|s| \rightarrow \infty$ и получены ограничением на \mathbb{Z}_L^d положительной шварцевской функции, определенной на $\mathbb{R}^d \supset \mathbb{Z}_L^d$. Известно, что если r_* достаточно велико, то задача Коши для уравнения (4) имеет единственное глобальное решение. Применяя к уравнению (4) формулу Ито и обозначая $B = L^{-d} \sum_s b_s^2$, мы получаем баланс энергии в уравнении (4):

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|u(\tau)\|^2 + 2\mathbb{E} \int_0^\tau \|(-\Delta + 1)^{r_*} u(s)\|^2 ds = \\ = \mathbb{E} \|u(0)\|^2 + 2B\tau. \end{aligned} \quad (6)$$

Мы видим, что $\mathbb{E} \|u(\tau)\|^2$ – средняя энергия решения u , приходящаяся на единицу объема, – оказывается порядка единицы равномерно по L , вне зависимости от размера параметра ρ . В дальнейшем ρ будет выбрано зависящим от v таким обра-

зом, чтобы уравнение для распределения энергии решения по спектру, следующее из уравнения (4), допускало нетривиальный кинетический предел. Из приведенных результатов будет видно, что это требование однозначно определяет размер параметра ρ .

Уравнение (4), записанное в Фурье-представлении, имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{v}_s - iv^{-1} |s|^2 v_s + \gamma_s v_s = \\ = i\rho L^{-d} \sum_{1,2} \delta_{3s}^{12} v_1 v_2 \bar{v}_3 + b_s \beta_s, \quad s \in \mathbb{Z}_L^d, \end{aligned}$$

где $\gamma_s = (1 + |s|^2)^{r_*}$. Здесь, следуя традиции ВТ, мы сокращаем v_{s_j} через v_j , γ_{s_j} через γ_j и т.д., а также

$\sum_{s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_L^d}$ через $\sum_{1,2}$, и обозначаем²

$$\delta_{3s}^{12} = \begin{cases} 1, & \text{если } s_1 + s_2 = s_3 + s \text{ и } \{s_1, s_2\} \neq \{s_3, s\}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Ввиду множителя δ_{3s}^{12} , в двойной сумме выше индекс s_3 является функцией индексов s_1, s_2, s , точнее, $s_3 = s_1 + s_2 - s$. В интерактивном представлении

$$v_s(\tau) = \exp(iv^{-1} \tau |s|^2) a_s(\tau), \quad s \in \mathbb{Z}_L^d,$$

v -уравнение принимает вид a -уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{a}_s + \gamma_s a_s = i\rho \mathcal{Y}_s(a; v^{-1} \tau) + b_s \beta_s, \quad s \in \mathbb{Z}_L^d, \\ \mathcal{Y}_s(a; t) = L^{-d} \sum_{1,2} \delta_{3s}^{12} a_1 a_2 \bar{a}_3 e^{it\omega_{3s}^{12}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $\{\beta_s\}$ – новое множество стандартных независимых комплексных винеровских процессов и

$$\begin{aligned} \omega_{3s}^{12} &= |s_1|^2 + |s_2|^2 - |s_3|^2 - |s|^2 = \\ &= -2(s_1 - s) \cdot (s_2 - s) \end{aligned}$$

(последнее равенство имеет место в силу соотношения $s_3 = s_1 + s_2 - s$, которое выполнено ввиду множителя δ_{3s}^{12}). Через $\mathcal{Y}_s(a^1, a^2, a^3; t)$ мы будем обозначать естественное полилинейное отображение, соответствующее 3-однородному отображению \mathcal{Y}_s ; т.е. $\mathcal{Y}_s(a; t) = \mathcal{Y}_s(a, a, a; t)$.

1.2. Энергетический спектр и существующие результаты

Энергетическим спектром решения $u(\tau)$ уравнения (4) называется функция

² Если уравнение (1) заменить стандартным НУШ, то δ_{3s}^{12} заменится на символ δ_{3s}^{12} , который определен так же как δ_{3s}^{12} , но без соотношения $\{s_1, s_2\} \neq \{s_3, s\}$. Тогда в двойную сумму, задающую нелинейность в v -уравнении, добавится

“интегрируемый член” $i\rho L^{-d} \left(2v_s \sum_m |v_m|^2 - v_s |v_s|^2 \right)$.

¹ То есть $\beta_s = \beta_s^1 + i\beta_s^2$, где $\{\beta_s^j, s \in \mathbb{Z}_L^d, j = 1, 2\}$ – стандартные независимые действительные винеровские процессы.

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_L^d \ni s \mapsto n_s(\tau) &= n_s(\tau; \nu, L) = \\ &= \mathbb{E}|v_s(\tau)|^2 = \mathbb{E}|a_s(\tau)|^2. \end{aligned}$$

Основной интерес для людей, работающих в ВТ, традиционно представляет поведение функции $n_s(\tau)$ и корреляций решений $a_s(\tau)$ в пределе (2). Одним из главных предсказаний ВТ является утверждение о том, что в этом пределе энергетический спектр $n_s(\tau)$ удовлетворяет волновому кинетическому уравнению (ВКУ). Существует множество физических работ, содержащих различные (но согласованные) подходы к анализу поведения энергетического спектра n_s в пределе (2) и к выводу соответствующего ВКУ (см., например, [10, 11, 13] и ссылки из этих работ; см. также введение в работу [1]). Несмотря на значительный интерес в математическом сообществе, ни один из этих подходов до сих пор не был строго обоснован.

Точный смысл предела (2) не совсем ясен. Известно (см. в [8]), что для фиксированных ρ и L уравнение (7) допускает предел при $\nu \rightarrow 0$. В [8] на физическом уровне строгости было показано, что если выбрать ρ в виде $\tilde{\epsilon}\sqrt{L}$, $\tilde{\epsilon} \ll 1$, то последующий предел $L \rightarrow \infty$ ведет к ВКУ. Однако попытки строгого обоснования этого результата до сих пор были неудачными.

Существует лишь несколько строгих работ, посвященных анализу предела (2). В [6] для детерминистского НУШ с $d = 2$ исследуется предел (2) в случае, когда L стремится к бесконечности много медленнее, чем ν^{-1} . Полученное элегантное описание предела далеко от предсказания ВТ и скорее должно рассматриваться в контексте теории усреднения. В недавней работе [1] рассматривается детерминистское НУШ с $d \geq 3$ и случайными начальными условиями $u(0, x)$ выбранными так, что аргументы $\arg v_s(0)$, $s \in \mathbb{Z}_L^d$, коэффициентов ряда Фурье для $u(0, x)$ являются равномерно распределенными независимыми случайными величинами. В обозначениях нашей работы, в [1] доказывается, что в пределе (2), когда L стремится к бесконечности гораздо медленнее, чем ν^{-1} , но в то же время не слишком медленно, для значений медленного времени τ порядка L^δ , $\delta > 0$, энергетический спектр $n_s(\tau)$ приближенно удовлетворяет линеаризации по времени ВКУ в точке $\tau = 0$, где в ВКУ кинетический интеграл следует умножить на малый параметр ν .

Другая подобная задача была рассмотрена в работе [9], также посвященной строгому исследованию детерминистского НУШ со случайными начальными условиями. Для доказательства желаемого результата авторы были вынуждены заменить тор \mathbb{T}_L^d дискретным тором $\mathbb{Z}^d / (L\mathbb{Z}^d)$ и вместо дискрет-

ного лапласиана на $\mathbb{Z}^d / (L\mathbb{Z}^d)$ рассматривать подходящий линейный оператор, диагональный в базисе Фурье. Предполагалось, что начальные условия $u(0, x)$ распределены согласно мере Гиббса системы, так что решение $u(t)$ оказывалось стационарным во времени случайным процессом на H . Другая родственная задача была рассмотрена в [5].

1.3. Результаты

В данной работе мы уточняем предел (2) следующим образом:

$$\begin{aligned} \nu \rightarrow 0 \text{ и } L \geq \nu^{-2-\epsilon} \text{ для некоторого } \epsilon > 0, \\ \text{или сперва } L \rightarrow \infty, \text{ а затем } \nu \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Вторая возможность выше формально соответствует первой с $\epsilon = \infty$. Предположение (8) хорошо согласуется с мнением, широко распространенным в физическом сообществе, что для получения кинетического предела необходимо, чтобы L стремилось к бесконечности очень быстро, а ν^{-1} — не слишком быстро.

Мы снабжаем уравнение (4)–(7) начальным условием

$$u(-T) = 0, \quad (9)$$

с каким-нибудь $0 < T \leq +\infty$, и в духе ВТ представляем решение (7), (9) в виде формального ряда по ρ :

$$\begin{aligned} a(\tau) &= a^{(0)}(\tau) + \rho a^{(1)}(\tau) + \dots, \\ a^{(j)}(\tau) &= a^{(j)}(\tau; \nu, L). \end{aligned} \quad (10)$$

Нетрудно видеть, что в случае $T = \infty$ процессы $a^{(j)}$ являются стационарными. Сперва, как и в физических работах (см., например, [10, раздел 6.4]), мы рассматриваем только квадратичную по ρ часть этого разложения. Мы обозначаем ее $A_s(\tau)$, называем квазирешением и исследуем поведение соответствующего ей энергетического спектра $N_s(\tau) = E(|A_s(\tau)|^2)$. В разделах 2–4 мы показываем, что для того чтобы при рассматриваемом пределе (8) энергетический спектр $N_s(\tau)$ обладал нетривиальной асимптотикой, постоянная ρ в уравнении (7) должна вести себя как $\rho \sim \nu^{-1/2}$. Соответственно, мы выбираем ее в виде $\rho = \nu^{-1/2}\epsilon^{1/2}$, где параметр $0 < \epsilon \leq 1$ должен рассматриваться как фиксированная малая постоянная. Тогда энергетический спектр N_s представляется в виде $N_s(\tau) = N_s^0(\tau) + \epsilon N_s^1(\tau) + O(\epsilon^2)$, где $N_s^0, N_s^1 \sim 1$, равномерно по ν и L . Далее в теореме 2 мы доказываем, что при $L \geq \nu^{-2-\epsilon}$ (см. (8)), функция $s \mapsto N_s$ естественно продолжается до функции на \mathbb{R}^d , ϵ^2 -близкой к решению $m_s(\tau)$ волнового кинетического уравнения с вязкостью и внешней силой, для всех $\tau \geq -T$. Оно имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{m}_s(\tau) &= -2\gamma_s m_s(\tau) + 2b_s^2 + \varepsilon K_s(m(\tau)), \\ s \in \mathbb{R}^d, \quad m(-T) &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где K_s обозначает волновой кинетический интеграл (см. (22)). В разделе 5 мы возвращаемся к формальному ряду (10) для решения $a_s(\tau)$. Мы раскладываем энергетический спектр решения a_s соответственно

$$n_s(\tau) = n_s^0(\tau) + \rho n_s^1(\tau) + \dots \quad (12)$$

и исследуем это разложение, где, как и прежде, $\rho = \nu^{-1/2} \varepsilon^{1/2}$.

Так как характерные временные интервалы в нашей системе имеют порядок $\tau \sim 1$, а медленное время τ определяется равенством $\tau = \nu^{-1} t$, то при $\rho \sim \nu^{-1/2}$ характерные быстро-временные интервалы оказываются порядка $t \sim \nu^{-1} \sim (\text{размер нелинейности})^{-2}$. Именно такой временной масштаб обычно рассматривается физиками.

Кинетический предел, представленный в разделе 4, имеет место лишь для квазирешений уравнения (4), и мы не уверены, что он применим к точным решениям. Тем не менее мы полагаем, что аналогичные нашим результаты и методы их доказательства верны для точных решений в ряде других моделей ВТ, и мы рассчитываем прояснить этот вопрос в ближайшем будущем. В этой связи отметим, что в физических работах по ВТ волновое кинетическое уравнение всегда выводится лишь для энергетического спектра квазирешений (точнее, для энергетического спектра, соответствующего квадратичной части разложения решений в формальный ряд по амплитуде), а не для энергетического спектра точных решений.

Доказательства результатов, представленных в разделах 2–4, содержатся в [2], а результатов из раздела 5 – в [3]. Более подробное обсуждение полученных результатов может быть найдено во введении в [2]. В данной работе все постоянные не зависят от $\nu, L, \rho, \varepsilon$ и τ, T , если иное не оговорено явно.

2. РЕШЕНИЕ В ВИДЕ ФОРМАЛЬНОГО РЯДА ПО ρ

Мы представляем решение $a_s(\tau)$ уравнения (7), (9) в виде формального ряда (10). Тогда

$$\dot{a}_s^{(0)} + \gamma_s a_s^{(0)} = b_s \dot{\beta}_s, \quad a_s^{(0)}(-T) = 0,$$

так что $a^{(0)}$ является гауссовским процессом

$$a_s^{(0)}(\tau) = b_s \int_{-T}^{\tau} e^{-\gamma_s(\tau-l)} d\beta_s(l).$$

Процесс $a^{(1)}$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \dot{a}_s^{(1)}(\tau) + \gamma_s a_s^{(1)}(\tau) &= i \mathcal{Q}_s(a^{(0)}(\tau); \nu^{-1} \tau), \\ a_s^{(1)}(-T) &= 0, \end{aligned}$$

так что

$$a_s^{(1)}(\tau) = i \int_{-T}^{\tau} e^{-\gamma_s(\tau-l)} \mathcal{Q}_s(a^{(0)}(l); \nu^{-1} l) dl \quad (13)$$

является третьим винеровским хаосом. Аналогично, при $n \geq 2$ имеем

$$\begin{aligned} \dot{a}_s^{(n)}(\tau) + \gamma_s a_s^{(n)}(\tau) &= \\ = i \sum_{n_1+n_2+n_3=n-1} \mathcal{Q}_s(a^{(n_1)}(\tau), a^{(n_2)}(\tau), a^{(n_3)}(\tau); \nu^{-1} \tau), \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned} a_s^{(n)}(\tau) &= \\ = i \int_{-T}^{\tau} \sum_{n_1+n_2+n_3=n-1} e^{-\gamma_s(\tau-l)} \mathcal{Q}_s(a^{(n_1)}(l), a^{(n_2)}(l), a^{(n_3)}(l); \nu^{-1} l) dl \end{aligned} \quad (14)$$

является $(2n+1)$ -м винеровским хаосом. Итерируя формулу Дюамеля в правой части равенства (14), мы можем выразить $a^{(n)}(l)$, $l \geq -T$, через процессы $a^{(0)}(l')$, $l' \leq l$.

Чтобы изучить предельное поведение корреляций решений $a_s(\tau)$ и корреляций энергетического спектра $n_s(\tau)$, записанных в виде формальных рядов (10) и (12), достаточно исследовать предельное поведение корреляций процессов $a_s^{(n)}(\tau)$. Чтобы продемонстрировать эффекты, которые здесь можно ожидать, предположим сперва, что $T = \infty$, и рассмотрим корреляции процессов $a_s^{(n)}(\tau_1)$ и $a_s^{(n')}(\tau_2)$ с $n, n' \leq 1$. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E} a_s^{(0)}(\tau_1) a_s^{(0)}(\tau_2) &\equiv 0, \\ \mathbb{E} a_s^{(0)}(\tau_1) \bar{a}_s^{(0)}(\tau_2) &= \delta_s^s e^{-\gamma_s |\tau_1 - \tau_2|} \frac{b_s^2}{\gamma_s}; \end{aligned} \quad (15)$$

кроме того, можно показать, что $\mathbb{E} a_s^{(0)}(\tau_1) a_s^{(1)}(\tau_2) \equiv \mathbb{E} a_s^{(0)}(\tau_1) \bar{a}_s^{(1)}(\tau_2) \equiv 0$. Обозначим $B(s) = \frac{b_s^2}{\gamma_s}$, $s \in \mathbb{R}^d$. Тогда, используя (13), (15) и формулу Вика, мы видим, что корреляции процессов $a_s^{(1)}(\tau)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbb{E} a_s^{(1)}(\tau) a_s^{(1)}(\tau) &= 0, \quad \mathbb{E} a_s^{(1)}(\tau) \bar{a}_s^{(1)}(\tau) = \delta_s^s J_s, \\ J_s &= \frac{2\nu^2}{\gamma_s} L^{-2d} \sum_{1,2} \delta_{3s}^{1,2} \frac{\gamma_{123s} B(s_1, s_2, s_3)}{(\omega_{3s}^{1,2})^2 + (\nu \gamma_{123s})^2}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_{123s} &= \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_s, \\ B(s_1, s_2, s_3) &= B(s_1) B(s_2) B(s_3) \end{aligned}$$

(детали этого вычисления см. в [2]). Суммы J_s могут быть приближены интегралами

$$I_s = \frac{2v^2}{\gamma_s} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} ds_1 ds_2 \times \frac{\gamma_{123s} B(s_1, s_2, s_3)}{4((s_1 - s) \cdot (s_2 - s))^2 + (v\gamma_{123s})^2},$$

$$s_3 = s_1 + s_2 - s.$$

Точнее,

$$|J_s - I_s| \leq C_s^\# L^{-2} v^{-2} \quad \forall s. \quad (16)$$

Здесь и далее символом $C_s^\#$ мы обозначаем различные непрерывные функции от s , убывающие при $|s| \rightarrow \infty$ быстрее любой отрицательной степени $|s|$. Согласно предположению (8), правая часть (16) мала: она не превосходит $C_s^\# v^{2+2\epsilon}$.

Асимптотическое поведение интегралов I_s известно (см. [7, 2]).

Теорема 1. *Интеграл I_s имеет вид $I_s = vI_s^0 + O(C_s^\# v^2)$,³ где*

$$I_s^0 = \frac{\pi}{\gamma_s} \int_{\Sigma_s} \frac{B(s_1, s_2, s_1 + s_2 - s)}{\sqrt{|s_1 - s|^2 + |s_2 - s|^2}} ds_1 ds_2|_{\Sigma_s}.$$

Здесь Σ_s — квадратка $\{(s_1, s_2): (s_1 - s) \cdot (s_2 - s) = 0\}$, а $ds_1 ds_2|_{\Sigma_s}$ — элемент объема на ней, соответствующий евклидовой структуре на \mathbb{R}^{2d} .

Асимптотика, аналогичная найденной в теореме 1, может быть получена для произвольного $-\infty \leq T < 0$. Подставляя $s_1 = s + x, s_2 = s + y$ и обозначая $z = (x, y)$, мы переписываем интеграл I_s^0 в виде

$$\frac{\pi}{\gamma_s} \int_{\Sigma} \frac{B(s + x, s + y, s + x + y)}{|z|} dz|_{\Sigma},$$

$$\Sigma = \{z = (x, y): x \cdot y = 0\}.$$

Обозначим $F(z) := x \cdot y = -\frac{1}{2} \omega_{3s}^{12}|_{s_1=s+x, s_2=s+y, s_3=s+x+y}$. Тогда $|\nabla F(z)| = |z|$, так что последний интеграл в точности совпадает с интегралом $\int B\delta(F)$ от функции B по дельта-функции от F , см. [13, с. 67]. Так как $F = -\frac{1}{2} \omega_{s+x+ys}^{s+xs+y} = -\frac{1}{2} \omega_{3s}^{12} \delta_{3s}^{12}$, то пренебрегая мигнусом, записываем I_s^0 в виде

$$\frac{\pi}{\gamma_s} \int B\delta(F) dx dy = \frac{2\pi}{\gamma_s} \int B\delta(\omega_{s+x+ys}^{s+xs+y}) dx dy =$$

$$= \frac{2\pi}{\gamma_s} \int B\delta(\omega_{3s}^{12}) \delta_{3s}^{12} ds_1 ds_2 ds_3.$$

³ В случае $d = 2$ член $O(C_s^\# v^2)$ должен быть заменен на $O(C_s^\# (\kappa) v^{2-\kappa})$ с произвольным $\kappa > 0$.

Рассматривая $|z|^{-1} dz|_{\Sigma} = \delta(F)$ как меру на пространстве \mathbb{R}^{2d} , сосредоточенную на квадратике Σ , в [2] мы показываем, что она дезинтегрируется как $|x|^{-1} dx d_{x^\perp} y$, где d_{x^\perp} обозначает меру Лебега на гиперпространстве $x^\perp = \{y: y \cdot x = 0\}$. Точнее, для произвольной наблюдаемой $f(z)$ выполнено

$$\int_{\Sigma} f(z) |z|^{-1} dz|_{\Sigma} = \int_{\mathbb{R}^d} |x|^{-1} \left(\int_{x^\perp} f(x, y) d_{x^\perp} y \right) dx. \quad (17)$$

Это представление оказывается важным инструментом при анализе интегралов вида $\int f\delta(F)$. Оно используется ниже.

3. КВАЗИРЕШЕНИЯ

Мы начинаем наше исследование с анализа квадратичной по ρ части разложения (10), которую мы называем квазирешением $A(\tau) = (A_s(\tau; v, L), s \in \mathbb{Z}_L^d)$:

$$A_s(\tau) = a_s^{(0)}(\tau) + \rho a_s^{(1)}(\tau) + \rho^2 a_s^{(2)}(\tau).$$

Рассмотрим энергетический спектр квазирешения A , $N_s(\tau) = \mathbb{E}|A_s(\tau)|^2$, и разложим его по ρ :

$$N_s(\tau; v, L) = n_s^0(\tau) + \rho n_s^1(\tau) + \rho^2 n_s^2(\tau) + \rho^3 n_s^3(\tau) + \rho^4 n_s^4(\tau), \quad (18)$$

где $n_s^j(\tau) = n_s^j(\tau; v, L)$. Здесь $n_s^0 = \mathbb{E}|a_s^{(0)}(\tau)|^2 \sim C_s^\# 4$, и не трудно видеть, что $n_s^1 \equiv 0$, а $n_s^2 = \mathbb{E}|a_s^{(1)}|^2 + 2\Re \mathbb{E} a_s^{(0)} \bar{a}_s^{(2)}$. Первое слагаемое $\mathbb{E}|a_s^{(1)}|^2$ в n_s^2 имеет порядок v и в случае $T = \infty$ дается теоремой 1; второй член вычисляется аналогично. Таким образом,

$$n_s^0 \sim C_s^\#, \quad n_s^1 \equiv 0, \quad n_s^2 \sim C_s^\# v. \quad (19)$$

Мы показываем, что имеет место оценка⁵

$$|n_s^3| |n_s^4| \leq C_s^\# v^2, \quad (20)$$

при $L \geq v^{-2-\epsilon}$ (см. (8)).

При каждом $\tau \geq -T$, любых v, L и произвольном $k = 0, \dots, 4$ функция $s \mapsto n_s^k(\tau)$ естественным образом продолжается до шварцевской функции на \mathbb{R}^d . Предел

$$n_s^k(\tau; v, \infty) = \lim_{L \rightarrow \infty} n_s^k(\tau; v, L)$$

существует, также является шварцевской функцией аргумента $s \in \mathbb{R}^d$ и удовлетворяет (19), (20).

⁴ Мы пишем $m_s \sim C_s^\#$, если $m_s \leq C_s^\#$ для всех s , и при этом $\|m\| \geq C^{-1}$ (см. (3)), равномерно по v .

⁵ Если $d = 2$, оценка для n_s^3 должна быть заменена на $|n_s^3| \leq C_s^\# v^2 \ln v^{-1}$.

Соответственно, предел энергетического спектра квазирешения $N_s(\tau; \nu, \infty) = \lim_{L \rightarrow \infty} N_s(\tau; \nu, L)$ существует и является шварцевской функцией от $s \in \mathbb{R}^d$.

Соотношения (19) и (20) показывают, что правильный скейлинг параметра ρ имеет вид $\rho \sim \nu^{-1/2}$, так что мы выбираем ρ в виде

$$\rho = \nu^{-1/2} \varepsilon^{1/2}, \quad \varepsilon \in (0, 1]. \quad (21)$$

Действительно, при таком скейлинге процесс $N_s(\tau)$ является ε -возмущением линейного процесса n_s^0 и не сходится к n_s^0 в пределе (8): разложение (18) принимает вид $N_s = n_s^0 + \varepsilon N_s^1 + O(\varepsilon^2)$, где $N_s^1 = \nu^{-1} n_s^2 \sim C_s^\#$.

4. ВОЛНОВОЕ КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Для действительной функции $\mathbb{R}^d \ni s \mapsto y_s$ рассмотрим соответствующий ей волновой кинетический интеграл:

$$K_s(y) = 2\pi \int_{\Sigma_s} \frac{ds_1 ds_2 |y_1 y_2 y_3 y_s}{\sqrt{|s_1 - s|^2 + |s_2 - s|^2}} \times \left(\frac{1}{y_s} + \frac{1}{y_3} - \frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_2} \right), \quad (22)$$

где для $j = 1, 2, 3$ мы обозначаем $y_j = y_{s_j}$ и где $s_3 = s_1 + s_2 - s$. В обозначениях, введенных после теоремы 1, интеграл (22) принимает вид

$$4\pi \int y_1 y_2 y_3 y_s \left(\frac{1}{y_s} + \frac{1}{y_3} - \frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_2} \right) \delta(\omega_{3s}^{12}) \delta_{3s}^{12} ds_1 ds_2 ds_3.$$

Последний интеграл в точности совпадает с кинетическим интегралом, используемым физиками для описания четырехволнового взаимодействия, см. [13, с. 71; 10, с. 91].

Рассмотрим функциональное пространство $C_r(\mathbb{R}^d) = \{x \in C(\mathbb{R}^d) : |x|_r = \sup_s (1 + |s|)^r |x(s)| < \infty\}$. Представление (17) для меры $|z|^{-1} dz|_\Sigma$ влечет, что волновой кинетический интеграл K определяет непрерывный оператор

$$K: C_r(\mathbb{R}^d) \rightarrow C_{r+1}(\mathbb{R}^d), \quad y_s \mapsto K_s(y),$$

если $r > d$. Рассмотрим теперь волновое кинетическое уравнение:

$$\dot{m}_s(\tau) = -2\gamma_s m_s(\tau) + 2b_s^2 + \varepsilon K_s(m(\tau)), \quad s \in \mathbb{R}^d. \quad (23)$$

Существует $\varepsilon_* > 0$, такой что при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_*$ уравнение (23) имеет единственное решение $m^*(\tau)$, обнуляющееся при $\tau = -T$ и задающее ограниченную непрерывную кривую $m^*: [-T, \infty) \mapsto C_r(\mathbb{R}^d)$ в каж-

дом пространстве $C_r(\mathbb{R}^d)$. Оно может быть записано в виде

$$m_s^*(\tau) = m_s^{*0}(\tau) + \varepsilon m_s^{*1}(\tau; \varepsilon), \\ m_s^{*0}(-T) = m_s^{*1}(-T) = 0,$$

где $m^{*0}, m^{*1} \sim 1$, $m_s^{*0}(\tau)$ совпадает с $n_s^0(\tau)$ и удовлетворяет линейному уравнению

$$\dot{m}_s^{*0}(\tau) = -2\gamma_s m_s^{*0}(\tau) + 2b_s^2. \quad (24)$$

Далее ε всегда обозначает фиксированную малую постоянную, не зависящую от ν и L и удовлетворяющую $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$. Параметр ε может быть интерпретирован как квадрат амплитуды квазирешения $A(\tau)$, записанного в правильном скейлинге. Следующая теорема – главный результат работы [2].

Теорема 2. *Рассмотрим уравнение (4) с $L \geq \nu^{-2-\varepsilon}$ и $\rho = \nu^{-1/2} \varepsilon^{1/2}$. Энергетический спектр $N_s = N_s(\tau; \nu, L)$ его квазирешения A_s приближается с точностью ε^2 решением m^* уравнения (23) в том смысле, что для произвольного r*

$$|m^*(\tau) - N(\tau)|_r \leq C_r \varepsilon^2 \quad \forall \tau \geq -T,$$

с некоторым $C_r > 0$, если $0 < \nu \leq \nu_{\varepsilon, r}$ для подходящего $\nu_{\varepsilon, r} > 0$. Предельный энергетический спектр $N_s(\tau; \nu, \infty)$ также удовлетворяет этой оценке для каждого r и $0 < \nu \leq \nu_{\varepsilon, r}$.

Уравнение (24) имеет единственное стационарное решение m^0 , $m_s^0 = \frac{b_s^2}{\gamma_s}$, и оно является асимптотически устойчивым. Согласно теореме о неявной функции, для достаточно малого ε уравнение (23) имеет единственное стационарное состояние m^ε , близкое к m^0 , и оно асимптотически устойчиво. Уменьшая при необходимости ε_* , можно считать, что единственное стационарное состояние m^ε определено для всех $\varepsilon \leq \varepsilon_*$. Вместе с теоремой 2 этот результат определяет асимптотическое по времени поведение энергетического спектра $N_s(\tau)$: для каждого $r > d$,

$$|m^\varepsilon - N(\tau)|_r \leq C_r (|m^\varepsilon|_r e^{-\tau T} + \varepsilon^2), \quad \forall \tau \geq -T. \quad (25)$$

Подходящая модификация теоремы 1 и оценки (16) влечет, что существует и отличен от нуля последовательный предел $\lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{L \rightarrow \infty} \nu^{-1} n_s^2(\tau; \nu, L)$. Трудно усомниться в том, что аналогичный последовательный предел существует и для $\nu^{-2} n_s^4$ (однако это пока не доказано). В этом случае, ввиду оценки (20), при $\rho = \nu^{-1/2} \varepsilon^{1/2}$ существует последовательный предел $N_s(\tau; 0, \infty) = \lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{L \rightarrow \infty} N_s(\tau; \nu, L)$. Тогда он так-

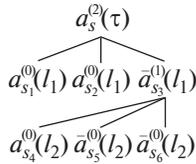


Рис. 1. Дерево \mathcal{T} из класса $\Gamma(2)$.

же удовлетворяет утверждению теоремы 2 и асимптотике (25).

В быстром времени t уравнение (4) с ρ , выбранным как выше, и $\lambda = (\nu\epsilon)^{1/2}$ имеет вид

$$u_t + i\Delta u - i\lambda(|u|^2 - \|u\|^2)u = -\nu(-\Delta + 1)^{\epsilon} u + \sqrt{\nu} \dot{\eta}^0(\tau, x),$$

где $\|u(t)\| \sim 1$ при $\nu \rightarrow 0, L \rightarrow \infty$, согласно (6). Таким образом, мы получаем, что

1) для существования кинетического предела коэффициент λ при нелинейности должен быть порядка $\sqrt{\nu}$, при $\nu \rightarrow 0, L \rightarrow \infty$;

2) время, необходимое, чтобы “сесть” на кинетический режим, имеет порядок $t \sim \lambda^{-2}$. Соответствующий временной масштаб (размер нелинейности)⁻² совпадает с временным масштабом, обычно рассматриваемым физиками, см. [10, 11, 13].

5. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР РЕШЕНИЙ $a_s(\tau)$, ЗАПИСАННЫХ В ВИДЕ ФОРМАЛЬНОГО РЯДА ПО ρ

Вернемся к разложению (10). Как было упомянуто в разделе 2, итерируя формулу (14), можно выразить $a_s^{(n)}(l_0)$ через процессы $a^{(l)}(l')$ с $l' \leq l_0$. Тогда $a_s^{(n)}$ представляется в виде суммы

$$a_s^{(n)}(l_0) = \sum_{\mathcal{T} \in \Gamma(n)} I_s(l_0; n, \mathcal{T}), \tag{26}$$

в которой смысл индекса \mathcal{T} , по которому ведется суммирование, будет объяснен ниже, а $I_s(\mathcal{T}) := I_s(l_0; n, \mathcal{T})$ обозначает интеграл

$$I_s(\mathcal{T}) = \int \dots \int L^{-nd} \sum_{s_1, \dots, s_{3n}} (\dots) dl_1 \dots dl_n. \tag{27}$$

Интегрирование здесь ведется по некоторому выпуклому многограннику в $[-T, l_0]^n$. Суммирование берется по всем векторам $s_1, \dots, s_{3n} \in \mathbb{Z}_L^d$, удовлетворяющим линейным соотношениям, соответствующим множителю $\delta_{s_s}^{12}$ из определения \mathcal{U}_s . Член, обозначенный через (...), состоит из произведения функций $e^{-\gamma_s(l_k - l_j)}$, $\exp(\pm i\nu^{-1} \omega_{s_s s'_4}^{s'_1 s'_2})$ и процессов $[a_s^{(l)}(l_r)]^*$, где a^* обозначает либо a , либо \bar{a} , с различными индексами k, j, r и различными

s', s'_1, s'' , принадлежащими множеству $\{s_1, \dots, s_{3n}\}$. Это произведение имеет степень $2n + 1$ по отношению к процессу $a^{(0)}$. Каждый интеграл $I_s(l_0; n, \mathcal{T})$ соответствует ориентированному дереву \mathcal{T} из класса $\Gamma(n)$ деревьев, имеющих корень $a_s^{(n)}$, случайные величины $[a_s^{(0)}(l_j)]^*$ в качестве листьев и величины $[a_s^{(n)}(l_r)]^*$ с $1 \leq n' < n$ в качестве вершин, см. рис. 1. В каждую вершину дерева входит одно ребро, а выходит три. Три ребра, выходящие из какой-нибудь вершины $a_s^{(\bar{n})}(l')$, $\bar{n} \geq 1$, соответствуют выбору трех членов $a^{(n_1)}, a^{(n_2)}, a^{(n_3)}$ в разложении (14) для $a_s^{(n)}(\tau) := a_s^{(n)}(l')$.

Запишем энергетический спектр решения a в виде формального ряда (12). Тогда $n_s^0 \sim 1$, члены $n_s^1 = 0$ и n_s^2 те же, что и в (18), а n_s^3 и n_s^4 немного отличаются от соответствующих членов из (18); эта неаккуратность в обозначениях не должна вызывать трудностей. Новые члены n_s^3 и n_s^4 по-прежнему удовлетворяют оценке (20) (см. ниже). Рассмотрим $n_s^k(\tau)$ с произвольным $k \geq 0$. Имеем $n_s^k(\tau) = \mathbb{E} \sum_{k_1 + k_2 = k} a_s^{(k_1)}(\tau) \bar{a}_s^{(k_2)}(\tau)$, где каждый член $a_s^{(k)}(\tau)$ дается конечной суммой (26), параметризованной деревьями $\mathcal{T} \in \Gamma(k)$. Тогда

$$\mathbb{E} a_s^{(k_1)}(\tau) \bar{a}_s^{(k_2)}(\tau) = \sum_{\mathcal{T}_1 \in \Gamma(k_1), \mathcal{T}_2 \in \Gamma(k_2)} \mathbb{E} I_s(\tau; k_1, \mathcal{T}_1) \overline{I_s(\tau; k_2, \mathcal{T}_2)}.$$

Здесь

$$\mathbb{E} I_s(\mathcal{T}_1) \overline{I_s(\mathcal{T}_2)} = \int \dots \int L^{-kd} \sum_{s_1, \dots, s_{3k}} \mathbb{E}(\dots) dl_1 \dots dl_k, \tag{28}$$

а матожидание берется от произведения скобок из формулы (27) для интегралов $I_s(\mathcal{T}_1)$ и $\overline{I_s(\mathcal{T}_2)}$. Так как $a_s^{(0)}(l)$, $s \in \mathbb{Z}_L^d$, — гауссовские случайные величины с корреляциями (15) (в случае $T < \infty$ вторая корреляция немного меняется), то, согласно формуле Вика, каждое матожидание $\mathbb{E} I_s(\mathcal{T}_1) \overline{I_s(\mathcal{T}_2)}$ представляется в виде (конечной) суммы по всевозможным виковским спариваниям не сопряженных величин $a_{s_j}^{(0)}(l_m)$ с сопряженными величинами $\bar{a}_{s_r}^{(0)}(l_q)$. Так как эти случайные величины являются листьями деревьев \mathcal{T}_1 или $\overline{\mathcal{T}_2}$, эта сумма может быть параметризована фейнмановскими диаграммами, полученными спариванием деревьев \mathcal{T}_1 и $\overline{\mathcal{T}_2}$ по их листьям.⁶ Так как для $s' \neq s''$ гаус-

⁶ Спаренные листья не обязательно принадлежат разным деревьям, но могут оба быть листьями одного дерева \mathcal{T}_1 или $\overline{\mathcal{T}_2}$.

совские величины $a_s^{(0)}$ и $\bar{a}_s^{(0)}$ некоррелированы, суммирование $\sum_{s_1, \dots, s_{3k}}$ в (28) нужно брать только по таким векторам (s_1, \dots, s_{3k}) , для которых у каждой пары спаренных по Вику листьев $a_s^{(0)}$ и $\bar{a}_s^{(0)}$ индексы s' и s'' равны. Таким образом, во всех фейнмановских диаграммах, соответствующих (28), каждый лист $a_s^{(0)}(l_m)$ дерева \mathcal{T}_1 спарен либо с листом $\bar{a}_s^{(0)}(l_q)$ дерева \mathcal{T}_1 , либо с листом $\bar{a}_s^{(0)}(l_q)$ дерева $\bar{\mathcal{T}}_2$, и т.д. Таким образом, мы показали, что

$$n_s^k(\tau) = \sum_{\mathcal{F} \in \mathfrak{F}(k)} \mathcal{F}_s(\tau; k, \mathcal{F}), \quad (29)$$

где суммирование ведется по множеству $\mathfrak{F}(k)$ фейнмановских диаграмм, соответствующих всевозможным спариваниям между листьями деревьев $\mathcal{T}_1 \in \Gamma(k_1)$ и $\bar{\mathcal{T}}_2 \in \bar{\Gamma}(k_2)$, $k_1 + k_2 = k$.

Разрешая все соотношения, наложенные на индексы s_j в (28) с помощью подходящего аффинного преобразования, мы находим, что среди $3k$ индексов s_j имеется в точности k линейно независимых. Обозначая через $z_1, \dots, z_k \in \mathbb{Z}_L^d$ независимые переменные, полученные из индексов s_j посредством этого преобразования, мы переписываем сумму в (28) в виде $L^{-kd} \sum_{z_1, \dots, z_k \in \mathbb{Z}_L^d}$. Приближая последнюю сумму интегралом $\int_{\mathbb{R}^{kd}} \dots dz$, где $z = (z_1, \dots, z_k)$, мы находим, что интегралы $\mathcal{F}_s(\tau; k, \mathcal{F})$ принимают сравнительно простой явный вид. А именно, для любого $s \in \mathbb{Z}_L^d$

$$\mathcal{F}_s(\tau; k, \mathcal{F}) = J_s(\tau; k, \mathcal{F}) + O(L^{-2}v^{-2}C_s^\#(k)), \quad (30)$$

$$J_s(\tau; k, \mathcal{F}) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^k} dl \int_{\mathbb{R}^{kd}} dz F_{\mathcal{F}}(\tau, s, l, z) \exp\left(i v^{-1} \sum_{i,j=1}^k \alpha_{ij}^{\mathcal{F}}(l_i - l_j) z_i \cdot z_j \right),$$

где $l = (l_1, \dots, l_k)$, функция $F_{\mathcal{F}}$ — гладкая по $(s, z) \in \mathbb{R}^{(k+1)d}$ и быстро убывает по s, z и l , а $\alpha^{\mathcal{F}} = (\alpha_{ij}^{\mathcal{F}})$ — кососимметричная (постоянная) матрица без нулевых строк и столбцов. Ее ранг не меньше двух, и для некоторых диаграмм \mathcal{F} он равен двум. Кроме того, все функции $s \mapsto \mathcal{F}_s(\tau; k, \mathcal{F})$ естественно продолжаются до шварцевских функций на \mathbb{R}^d , и после этого продолжения (30) выполняется для каждого $s \in \mathbb{R}^d$. Следовательно, для любого фиксированного $v > 0$,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{F}_s(\tau; k, \mathcal{F}) = J_s(\tau; k, \mathcal{F})$$

$$\forall \tau \geq -T, \quad s \in \mathbb{R}^d, \quad k \geq 1, \quad \mathcal{F} \in \mathfrak{F}(k).$$

Тогда, ввиду (29),

$$n_s^k(\tau; v, \infty) := \lim_{L \rightarrow \infty} n_s^k(\tau; v, L) = \sum_{\mathcal{F} \in \mathfrak{F}(k)} J_s(\tau; k, \mathcal{F}),$$

для всех k, s и τ .

Соотношения (19) и (20) наводят на мысль, что

$$|n_s^k| \leq C_s^\#(k) v^{k/2} \quad \forall v \quad (31)$$

и всех k , если L достаточно велико в терминах v^{-1} и k . В этом направлении мы имеем два нижеследующих результата.

Теорема 3. Для любого k и любого $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}(k)$,

$$|J_s(\tau; k, \mathcal{F})| \leq C_s^\#(k) v^{\min(\lceil k/2 \rceil, d)} \quad \forall \tau \geq -T, \quad (32)$$

где $\lceil k/2 \rceil$ обозначает наименьшее целое $\geq k/2$.

Если L настолько велико, что

$$L^{-2}v^{-2} \leq v^{\min(\lceil k/2 \rceil, d)}, \quad (33)$$

то, согласно (30), \mathcal{F}_s также удовлетворяет (32), и ввиду (29) член $n_s^k(\tau)$ ограничен правой частью (32), умноженной на $|\mathfrak{F}(k)|$. Таким образом, неравенство (31) выполняется для $k \leq 4$, так как $d \geq 2$. Однако для больших k (в зависимости от d) оценка (32) существенно слабее, чем желаемая оценка (31). Наш следующий результат показывает, что оценка (32) точна в том смысле, что показатель $\min(\lceil k/2 \rceil, d)$ в правой части (32) не может быть заменен на $\lceil k/2 \rceil$.

Обозначим через $\mathfrak{F}_2(k) \subset \mathfrak{F}(k)$ множество фейнмановских диаграмм \mathcal{F} , для которых матрица $\alpha^{\mathcal{F}}$ из (30) имеет в точности одну ненулевую строку (и, соответственно, один ненулевой столбец). Это множество не пусто.

Теорема 4. Если $k > 2d$, то для любой диаграммы $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_2(k)$ имеет место оценка $J_s(\tau; k, \mathcal{F}) \sim v^d C_s^\#(k) \gg v^{\lceil k/2 \rceil} C_s^\#(k)$. В то же время

$$\left| \sum_{\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_2(k)} J_s(\tau; k, \mathcal{F}) \right| \leq v^{k-1} C_s^\#(k) \ll v^{\lceil k/2 \rceil} C_s^\#(k). \quad (34)$$

Предположение о том, что сокращения, влекущие неравенство (34), типичны, представляется правдоподобным, и мы ставим следующую задачу.

Задача 1. Доказать, что $\left| \sum_{\mathcal{F} \in \mathfrak{F}(k)} J_s(\tau; k, \mathcal{F}) \right| \leq C_s^\#(k) v^{k/2}$ для всех k и v . В частности, $|n_s^k(\tau; v, \infty)| \leq C_s^\#(k) v^{k/2}$ и неравенство (31) выполняется, если L достаточно велико в терминах v^{-1} и k .

Если гипотеза, высказанная в задаче, верна, то при подстановке (21) предельное разложение $n_s(\tau; v, \infty) = n_s^0(\tau; v, \infty) + \rho n_s^1(\tau; v, \infty) + \dots$ превращает-

⁷ В случае $k = 3$ и $d = 2$ правая часть (32) должна быть умножена на $\ln v^{-1}$.

ся в формальный ряд по $\sqrt{\varepsilon}$, равномерно по ν . Тогда его срезка в произвольном порядке $M \geq 2$, $n_{s,M}(\tau; \nu, \infty) = n_s^0(\tau; \nu, \infty) + \dots + \rho^M n_s^M(\tau; \nu, \infty)$, ε^2 -близка к $N_s(\tau; \nu, \infty)$ и, следовательно, также удовлетворяет утверждению теоремы 2. Мы не знаем, верно ли, что при больших M срезка $n_{s,M}(\tau)$ удовлетворяет уравнению (23) с погрешностью меньшей, чем ε^2 .

С другой стороны, если гипотеза, высказанная в задаче 1, неверна в том смысле, что

$$\sup_{\tau \geq -T} \|n^k(\tau; \nu, L)\| \geq C\nu^{k/2-\kappa}, \quad \kappa > 0,$$

для некоторого k^8 и для всех достаточно малых ν и больших L , тогда (12) с $\rho = \nu^{-1/2}\varepsilon^{1/2}$ не является равномерным по ν формальным рядом по $\sqrt{\varepsilon}$. Мы не исключаем возможность, что такая ситуация действительно имеет место, так как НУШ появляется в физике при моделировании малых колебаний в разнообразных средах, и при его выводе отбрасываются члены высоких порядков по амплитуде. Поэтому не кажется невозможным, что кинетический предел имеет место для энергетического спектра квазирешений, но не для энергетического спектра точных решений или энергетического спектра срезов ряда (10) высоких порядков.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа А.В. Дымова была выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18–31–20031, а работа С.Б. Куксина – за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18–11–00032).

⁸ Согласно (20), оно должно быть ≥ 5 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Buckmaster T., Germain P., Hani Z., Shatah J.* Onset of the wave turbulence description of the longtime behaviour of the nonlinear Schrödinger equation. 2019. arXiv:1907.03667.
2. *Dymov A., Kuksin S.* Formal expansions in stochastic model for wave turbulence. 1: kinetic limit. 2019. arXiv:1907.04531.
3. *Dymov A., Kuksin S.* Formal expansions in stochastic model for wave turbulence. 2: method of diagram decomposition. 2019. arXiv:1907.02279.
4. *Falkovich G.* Introduction to turbulence theory / In: *J. Cardy, G. Falkovich, K. Gawedzki.* Non-equilibrium statistical mechanics and turbulence. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2008. P. 1–43.
5. *Faou E.* Linearized wave turbulence convergence results for three-wave systems. 2018. arXiv:1805.11269.
6. *Faou E., Germain P., Hani Z.* The Weakly Nonlinear Large-Box Limit of the 2D Cubic Nonlinear Schrödinger Equation // *J. Amer. Math. Soc.* 2016. V. 29. P. 915–982.
7. *Kuksin S.* Asymptotical Expansions for Some Integrals of Quotients with Degenerated Divisors // *Russ J. Math. Phys.* 2017. V. 24. P. 497–507.
8. *Kuksin S., Maiocchi A.* Derivation of a Wave Kinetic Equation from the Resonant-Averaged Stochastic NLS Equation // *Physica D.* 2015. V. 309. P. 65–70.
9. *Lukkarinen J., Spohn H.* Weakly Nonlinear Schrödinger Equation with Random Initial Data // *Invent. Math.* 2015. V. 183. P. 79–188.
10. *Nazarenko S.* *Wave Turbulence.* Springer, 2011.
11. *Newell A.C., Rumpf B.* Wave Turbulence // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2011. V. 43. P. 59–78.
12. *Захаров В.Е., Львов В.С.* Статистическое описание волновых полей // *Известия вузов. Радиофизика.* 1975. Т. 18. № 10. С. 1470–1487.
13. *Zakharov V., Lvov V., Falkovich G.* *Kolmogorov Spectra of Turbulence.* Springer, 1992.

ON THE ZAKHAROV–L’VOV STOCHASTIC MODEL FOR WAVE TURBULENCE

A. V. Dymov^a and S. B. Kuksin^{b,c,d}

^a *Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

^b *Universite Paris-Diderot (Paris 7), Paris, France*

^c *School of Mathematics, Shandong University, Jinan, PRC*

^d *Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS D.V. Treshchev

In this paper we discuss a number of rigorous results in the stochastic model for wave turbulence due to Zakharov–L’vov. Namely, we consider the damped/driven (modified) cubic nonlinear Schrödinger equation on a large torus and decompose its solutions to formal series in the amplitude. We show that when the amplitude goes to zero and the torus’ size goes to infinity the energy spectrum of the quadratic truncation of this series converges to a solution of the damped/driven wave kinetic equation. Next we discuss higher order truncations of the series.

Keywords: wave turbulence, energy spectrum, wave kinetic equation, kinetic limit, nonlinear Schrödinger equation, stochastic perturbation