ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 491, с. 11–14

МАТЕМАТИКА

УДК 517.518.232

МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ ОЦЕНКИ НОРМ ПРОИЗВОДНЫХ НА ОБЛАСТИ

 Член-корреспондент РАН О. В. Бесов[1,*]

Поступило 14.01.2010 г.
После доработки 14.01.2020 г.
Принято к публикации 21.01.2020 г.

Устанавливаются мультипликативные оценки L_p-норм производных функции на области с условием гибкого конуса.

Ключевые слова: пространства Соболева, мультипликативные оценки производных

DOI: 10.31857/S2686954320020058

На области G евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ с условием гибкого конуса (определение ниже) устанавливаются мультипликативные оценки L_p-норм производных функции через нормы других ее производных.

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $n \in \mathbb{N}$; $\mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$; $1 \le p < \infty$; $L_p(G)$ – лебегово пространство определенных на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ функций с нормой

$$\|f \mid L_p(G)\| = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}, \quad L_p = L_p(\mathbb{R}^n).$$

Все рассматриваемые функции $f: G \to \mathbb{R}$ и их производные $D^\alpha f$, $D_i^s f$ локально суммируемы на области своего определения; $G_\varepsilon = \{x \in G: \operatorname{dist}(x, \partial G) > \varepsilon\}$ при $\varepsilon > 0$. Для $\varphi: [0, T] \to \mathbb{R}$ положим

$$\|\varphi \mid L^*_{2,s}\| = \left\{\int_0^T (t^{-s}\varphi(t))^2 \frac{dt}{t}\right\}^{1/2}, \; L^*_2 = L^*_{2,0}.$$

Приведем для сравнения классический результат Гальярдо [3] и Ниренберга [4] для области $G \subset \mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей:

$$\|D^\beta f \mid L_q(G)\| \le C\left(\sum_{|\alpha|=s} \|D^\alpha f \mid L_{p_1}(G)\|\right)^\theta \times$$
$$\times \|f \mid L_{p_2}(G)\|^{1-\theta} + C\|f \mid L_r(G)\|$$

при $1 \le p_1, p_2, q, r < \infty$, $s \in \mathbb{N}$, $\frac{|\beta|}{s} \le \theta < 1$,

$$|\beta| - \frac{n}{q} = \theta\left(s - \frac{n}{p_1}\right) + (1-\theta)\left(-\frac{n}{p_2}\right).$$

О п р е д е л е н и е 1. Область $G \subset \mathbb{R}^n$ будем называть о б л а с т ь ю с у с л о в и е м г и б к о г о к о н у с а, если при некоторых $T \in (0,1]$, $\kappa > 0$ для любого $x \in G$ существует кусочно гладкий путь

$$\gamma = \gamma_x: [0, T] \to G, \quad \gamma(0) = x, \quad |\gamma'| \le 1 \quad \text{п.в.}, \tag{1}$$

такой, что

$$\operatorname{dist}(\gamma(t), \mathbb{R}^n \setminus G) \ge \kappa t \quad \text{при} \quad 0 < t \le T.$$

В работе устанавливается следующая

Т е о р е м а 1. *Пусть G – область с условием гибкого конуса. Пусть при $J \ge 2$, $j = 1, \ldots, J$, $1 < p_j < \infty$, $1 < q < \infty$, $s_j \in \mathbb{N}_0$, $0 < \theta_j < 1$, $\sum_1^J \theta_j = 1$, $1 \le r \le q$,*

$$\frac{1}{q} \le \sum_{j=1}^J \frac{\theta_j}{p_j}, \quad |\alpha| - \frac{n}{q} = \sum_{j=1}^J \theta_j\left(s_j - \frac{n}{p_j}\right).$$

Тогда при некоторых $C > 0$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$, не зависящих от f,

$$\|D^\alpha f \mid L_q(G)\| \le$$
$$\le C\prod_{j=1}^J\left(\sum_{i=1}^n \|D_i^{s_j} f \mid L_{p_j}(G)\|\right)^{\theta_j} + C\|f \mid L_r(G_\varepsilon)\| \tag{2}$$

[1] *Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия*
**E-mail: besov@mi-ras.ru*

для любой функции f, для которой правая часть неравенства конечна.

Рассмотрения основаны на интегральных представлениях функции по гибкому конусу через производные этой функции и на оценках операторов свертки.

Будем пользоваться следующими обозначениями. Символом G обозначается область в $\mathbb{R}^n$ с условием гибкого конуса, не совпадающая с $\mathbb{R}^n$. При $t > 0$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ положим

$$y + tE := \{x: x = y + tz,\ z \in E\},$$
$$B(x,t) := \{y: |y - x| < t\} = x + B(0,t),$$

χ – индикатор шара $B(0,1)$ или отрезка $[-1, 1]$, $r(x) = \operatorname{dist}(x, R^n \setminus G)$.

Для дальнейшего важно

З а м е ч а н и е 1. Без ограничения общности можно считать, что пути в определении области с условием гибкого конуса обладают следующим дополнительным свойством: для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ $\gamma_x(t) = x$ при $x \in G_h$, $0 < t \le \min\{\varepsilon_0 r(x), T\} =: \rho(x)$.

Приведем интегральное представление функции через производные, являющееся аналогом интегрального представления 7(75), 7(76) из [1].

Пусть $\vartheta \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\vartheta(u) = 0$ при $u \le -\delta$, $\vartheta(u) = 1$ при $u \ge \delta$, $\tau, \tau_1 \in \mathbb{R}$, $\delta \in (0,1)$ достаточно мало,

$$\omega(u,\tau) = \frac{d^k}{du^k}\left(\frac{u^{k-1}}{(k-1)!}\vartheta(u - \tau)\right). \qquad (3)$$

Для $f \in L(G, \mathrm{loc})$, $0 < t \le T$ введем усреднение

$$f_t(x) = t^{-2n}\iint \Omega\left(\frac{y}{t}, \frac{\gamma_x(t) - x}{t}\right)\Omega\left(\frac{z}{t}\right)\times$$
$$\times f(x + y + z)dydz,$$

где

$$\Omega(y,z) = \prod_{i=1}^{n}\omega(y_i, z_i),$$
$$\omega(u) = \omega(u,0), \qquad \Omega(y) = \Omega(y,0),$$
$$|D_y^\alpha \Omega(y,z)| \le C_\alpha \chi\left(\frac{y - z}{\delta\sqrt{n}}\right) \quad \text{при} \quad |z| \le 1.$$

Обозначив через $f_t^{(\alpha)}(x)$ производную D^α от $f_t(x)$, вычисленную при замороженном x в $\gamma_x(t) - x$ и в $\gamma'_x(t)$, и применив формулу Ньютона–Лейбница по t, получим при $0 < \varepsilon < T$

$$f_\varepsilon^{(\alpha)}(x) = f_T^{(\alpha)}(x) + (-1)^{|\alpha|}\int_\varepsilon^T\iint t^{-1-2n-|\alpha|}\times$$
$$\times\sum_{i=1}^n\left[D_i\Phi_i\left(\frac{y}{t}, \frac{\gamma_x(t) - x}{t}, \gamma'_x(t)\right)D_i^{k-1}D^\alpha\Omega\left(\frac{z}{t}\right) +\right.$$
$$\left. + D_i\Omega\left(\frac{y}{t}, \frac{\gamma_x(t) - x}{t}\right)D_i^{k-1}D^\alpha\Phi_i\left(\frac{z}{t}\right)\right]\times \qquad (4)$$
$$\times f(x + y + z)dydzdt,$$

где $\Phi_i(\cdot, z, w) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\Phi_i(y) = \Phi_i(y, 0, 0)$ и при некотором $M > 0$

$$\left|\frac{\partial^j}{\partial y_l^j}\Phi_i(y,z,w)\right| \le M\chi\left(\frac{y - z}{\delta\sqrt{n}}\right) \quad \text{при} \quad 1 \le l \le n,$$
$$j = 0, 1, \ldots, k, \quad |y| \le 1, \quad |w| \le 1.$$

Здесь D_i, D^α означают производные по первому аргументу функций.

Представим интегральные операторы в правой части (4) в виде произведения двух операторов. Введем для этого на $\{(x,t): x \in G, 0 < t \le r(x)\}$ функции

$$\varphi_i(x,t) = \int t^{-n}D_i^{k-1}D^\alpha\Omega\left(\frac{z}{t}\right)f(x + z)dz, \qquad (5)$$

$$\psi_i(x,t) = \int t^{-n}D_i^{k-1}D^\alpha\Phi_i\left\{\frac{z}{t}\right\}f(x + z)dz. \qquad (6)$$

Формулу (4) можно переписать в виде

$$f_\varepsilon^{(\alpha)}(x) = f_T^{(\alpha)}(x) + (-1)^{|\alpha|}\int_\varepsilon^T\int t^{-1-n-|\alpha|}\times$$
$$\times\sum_{i=1}^n\left[D_i\Phi_i\left(\frac{y}{t}, \frac{\gamma_x(t) - x}{t}, \gamma'_x(t)\right)\varphi_i(x + y, t) +\right. \qquad (7)$$
$$\left. + D_i\Omega\left(\frac{y}{t}, \frac{\gamma_x(t) - x}{t}\right)\psi_i(x + y, t)\right]dydt, \quad 0 < \varepsilon < T.$$

З а м е ч а н и е 2. Формула (7) справедлива и при $\varepsilon = 0$ с $f_0^{(\alpha)}(x) = D^\alpha f(x)$, если производная $D^\alpha f$ локально суммируема на G. Она получается предельным переходом, поскольку $f_\varepsilon^{(\alpha)}(x) \to D^\alpha f(x)$ при $\varepsilon \to 0$ в каждой точке Лебега функции $D^\alpha f$, а также в смысле $L(G, \mathrm{loc})$. Формула (7) с $\varepsilon > 0$ дает возможность применить оценки интегральных операторов с локально суммируемыми ядрами.

Т е о р е м а 2 (Л. Хермандер, Дж.Т. Шварц, Х. Трибель). *Пусть B_1, B_2 — два банаховых пространства, G – область в $\mathbb{R}^n$, $K(y)$ при $y \in \mathbb{R}^n$ – линейный ограниченный оператор из B_1 в B_2, функция $y \to K(y)$ локально суммируема на $\mathbb{R}^n$.*

Пусть на множестве $\mathring{L}_\infty(\mathbb{R}^n, B_1)$, состоящем из B_1-значных сильно измеримых функций с компактным носителем,

$$(Af)(x) = \int K(x,y)f(y)dy.$$

Пусть при некоторых $p_0 \in (1, \infty)$, $N > 0$, $R > 0$

(i) $\|Af \mid L_{p_0}(\mathbb{R}^n, B_2)\| \le N\|f \mid L_{p_0}(\mathbb{R}^n, B_1)\|$,

(ii) $\int\limits_{|x|>R|y|} \|K(x-y) - K(x) \mid B_1 \to B_2\|x \le N$

$$\forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда для всех $p \in (1, \infty)$

$$\left\|Af \mid L_p(\mathbb{R}^n, B_2)\right\| \le C_p N \left\|f \mid L_p(\mathbb{R}^n, B_1)\right\|,$$

где C_p *не зависит от* f, N.

Эта теорема приведена в [5, п. 2.2.2], где имеются и исторические ссылки. Она применяется в случаях $B_i = \mathbb{R}, L_2^* \ (i = 1, 2)$.

Л е м м а 1. *Пусть*

$$\Omega \in C_0^\infty(B(0,1)), \quad \int \Omega(x)dx = 0,$$
$$1 < p < \infty, \quad 0 < T < \infty.$$

Оператор

$$Sf(x,t) = \int t^{-n}\Omega\left(\frac{y}{t}\right) f(x+y)dy,$$
$$S\colon L_p(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n, L_2^*),$$

является ограниченным с оценкой нормы, не зависящей от T.

Доказательство варианта этой леммы при $T = \infty$ следует из [6]. Для рассматриваемого случая выкладки аналогичны и имеются в [2].

Л е м м а 2. *Пусть*

$$\Omega \in C_0^\infty(B(0,1)), \quad \int \Omega(x)dx = 0,$$

$$1 < p \le q < \infty, \quad 0 \le \mu = \frac{n}{p} - \frac{n}{q}, \quad 0 < \varepsilon < T < \infty.$$

Тогда оператор

$$R_\mu f(x) = \int\int_\varepsilon^T t^{-n+\mu}\Omega\left(\frac{y}{t}\right) f(x+y,t)\frac{dt}{t}dy, \tag{8}$$
$$R_\mu\colon L_p(L_2^*) \to L_q,$$

является ограниченным с оценкой нормы, не зависящей от ε, T.

Доказательство в случае $q = p$, $\mu = 0$ основано на применении теоремы 2 и имеется в [2].

Доказательство в случае $1 < p < q < \infty$, $\mu = \dfrac{n}{p} - \dfrac{n}{q}$ основано на применении неравенства Гёльдера по t и затем неравенства Харди–Литлвуда.

Л е м м а 3. *Пусть* $\tilde{\chi}(x,\cdot)$ *— индикатор гибкого конуса* $\bigcup\limits_{0<t<T} B(\gamma_x(t), \kappa t)$, $1 < p \le q < \infty$, $0 \le \mu = \dfrac{n}{p} - \dfrac{n}{q}$.

Тогда оператор

$$(A_\mu f)(x) = \int \frac{\tilde{\chi}(x, x+y) f(x+y)dy}{\left(r(x) + |y|\right)^{n-\mu}},$$
$$A_\mu\colon L_p(G) \to L_q(G),$$

ограничен.

Доказательство для случая $p = q$, $\mu = 0$ см. в [1, п. 10.1] или в [2]. Для доказательства в случае $1 < p < q < \infty$ достаточно мажорировать ядро оператора функцией $C|y|^{\mu-n}$ и применить неравенство Харди–Литлвуда.

Л е м м а 4. *Пусть* $\varepsilon_1 \in (0,1]$,

$$\Omega \in C_0^\infty(B(0,1)), \quad \int \Omega(x)dx = 0,$$

$$1 < p \le q < \infty, 0 \le \mu = \frac{n}{p} - \frac{n}{q}, 0 < \varepsilon < T < \infty.$$

Тогда оператор

$$R_\mu^{(1)} f(x) = \int\int_\varepsilon^T \chi\left(\frac{t}{\varepsilon_1 r(x)}\right) t^{-n+\mu}\Omega\left(\frac{y}{t}\right) f(x+y,t)\frac{dt}{t}dy, \tag{9}$$
$$R_\mu^{(1)}\colon L_p(G, L_2^*) \to L_q(G),$$

является ограниченным с оценкой нормы, не зависящей от ε, T.

Для доказательства отметим, что оператор

$$R_\mu^{(2)} f(x) = \int\int_\varepsilon^T \chi\left(\frac{\varepsilon_1 r(x)}{t}\right) t^{-n+\mu}\Omega\left(\frac{y}{t}\right) f(x+y,t)\frac{dt}{t}dy$$

ограниченно действует из $L_p(G, L_2^*)$ в $L_p(G)$ с оценкой нормы, не зависящей от T. Остается заметить, что для $f \in L_p(G, L_2^*)$ $R_\mu^{(1)} f = R_\mu f - R_\mu^{(2)} f$.

Наметим доказательство теоремы 1. Положим

$$s = \sum_1^J \theta_j s_j, \quad \frac{1}{p} = \sum_1^J \frac{\theta_j}{p_j},$$
$$\mu = \frac{n}{p} - \frac{n}{q}, \quad \text{так что} \quad s - |\alpha| = \mu.$$

Перепишем (7) в виде

$$f_\varepsilon^{(\alpha)} = f_T^{(\alpha)} + (-1)^{|\alpha|}\int\int_\varepsilon^T t^{-1-n-\mu} \times$$
$$\times \sum_{i=1}^n \left[D_i\Phi_i\left(\frac{y}{t}, \frac{\gamma_x(t) - x}{t}, \gamma_x'\right) t^{-s}\varphi_i(x+y,t) + \right.$$
$$\left. + D_i\Omega\left(\frac{y}{t}, \frac{\gamma_x(t) - x}{t}\right) t^{-s}\psi_i(x+y,t)\right] dydt.$$

С помощью неравенства Юнга получается оценка

$$\|f_T^{(\alpha)} \mid L_q(G)\| \le C\left\|f \mid L_r(G_\varepsilon)\right\|. \tag{10}$$

Приведем оценку лишь одного слагаемого правой части последнего равенства (оценки других слагаемых аналогичны)

$$I(x) = I_1(x) + I_2(x) =$$

$$= \int\int_{\varepsilon}^{T} t^{-1-n-\mu}\left[\chi\left(\frac{t}{\varepsilon_1 r(x)}\right)D_i\Phi_i\left(\frac{y}{t}\right) + \chi\left(\frac{\varepsilon_1 r(x)}{t}\right)\times \right.$$
$$\left.\times D_i\Phi_i\left(\frac{y}{t}, \frac{\gamma_x(t)-x}{t}, \gamma'_x\right)\right]t^{-s}\varphi_i(x+y,t)dtdy. \tag{11}$$

Здесь $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\kappa) > 0$ достаточно мало.

Оценивая I_1 с помощью лемм 4, а I_2 с помощью неравенства Гёльдера по t и леммы 3, получаем

$$\|I \mid L_p(G)\| \le C\|\varphi_i \mid L_p(G, L^*_{2,s})\|. \tag{12}$$

С помощью дважды примененного неравенства Гёльдера $\left(\text{сначала с показателями } \frac{1}{\theta_j}\text{, а затем с показателями } \frac{p_j}{p\theta_j}\right)$ получаем, что

$$\|\varphi_i \mid L_p(G, L^*_{2,s})\|^p \le \int_G \prod_{j=1}^{J}\left(\int_0^T [t^{-s_j}\varphi_i(x,t)]^2 \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}\theta_j p} dx \le$$
$$\le \prod_{j=1}^{J}\left\{\int_G\left(\int_0^T [t^{-s_j}\varphi_i(x,t)]^2\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}p_j}\right\}^{\frac{\theta_j}{p_j}p} =$$
$$= \prod_{j=1}^{J}\left\|\left(\int_0^T [t^{-s_j}\varphi_i(x,t)]^2\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}} \mid L_{p_j}(G)\right\|^{\theta_j p}. \tag{13}$$

Считая $k \ge 2 + \max_j s_j$, имеем

$$t^{-s_j}\varphi_i(x,t) = (-1)^{s_j}\chi\left(\frac{t}{r(x)}\right)\times$$
$$\times \int t^{-n} D_i^{k-1-s_j}\Omega\left(\frac{y}{t}\right) D_i^{s_j} f(x+y)dy.$$

По лемме 4

$$\|\varphi_i \mid L_p(G, L^*_{2,s})\| \le C\|D_i^{s_j} f \mid L_{p_j}(G)\|. \tag{14}$$

Оценку, аналогичную (14), получаем и для ψ_i вместо φ_i.

Отсюда и из (10)–(14) следует ограниченность в $L(G, \mathrm{loc})$ множества $\{f_\varepsilon^{(\alpha)}: 0 < \varepsilon < \varepsilon'\}$ при некотором $\varepsilon' > 0$, а значит, и его слабая компактность (см., например, [7]). В силу слабой замкнутости оператора обобщенного дифференцирования существует $D^\alpha f \in L(G, \mathrm{loc})$ и справедливо (11) при $\varepsilon = 0$ ($f_0^{(\alpha)} = D^\alpha f$), а значит, и утверждение теоремы.

Об оценках вида (2) в случае $G = \mathbb{R}^n$ см. в [1]. Для них характерно отсутствие последнего слагаемого правой части оценки (2). В [1] приведены также результаты Вень-туана и Труази (M. Troisi) по мультипликативным оценкам норм производных для функций из $C_0^\infty((-1,1)^n)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1996.
2. *Бесов О.В.* // Тр. МИАН. 1992. Т. 192. С. 15–32.
3. *Gagliardo E.* // Ric.mat. 1959. V. 8. P. 24–51.
4. *Nirenberg L.* // Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa. Ser. III. 1959. V. 13. Fasc. II. P. 115–162.
5. *Трибель Х.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
6. *Хёрмандер Л.* Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
7. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

MULTIPLICATIVE ESTIMATES FOR NORMS OF DERIVATIVES ON A DOMAIN

Corresponding Member of the RAS O. V. Besov

Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

Multiplicative estimates for the L_p-norms of derivatives on domains with flexible cone condition are established.

Keywords: Sobolev spaces, multiplicative estimates for derivatives