

УДК 519.633

УСТОЙЧИВОСТЬ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ 2-го ПОРЯДКА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

© 2020 г. А. А. Злотник^{1,2,*}, академик РАН Б. Н. Четверушкин^{2,**}

Поступило 06.09.2019 г.

После доработки 06.09.2019 г.

Принято к публикации 11.11.2019 г.

Изучаются симметричные трехслойный с весом и векторный двухслойный по времени методы решения начально-краевой задачи для гиперболического уравнения 2-го порядка с малым параметром $\tau > 0$ при старшей производной по времени, являющегося возмущением соответствующего параболического уравнения. Доказываются теоремы равномерной как по τ , так и по времени устойчивости решений в двух нормах, по отношению к начальным данным и правой части уравнения. Охвачен также случай, когда τ стоит и перед эллиптической частью уравнения. Дискретизация по пространству может быть выполнена как разностным методом, так и методом конечных элементов.

Ключевые слова: гиперболические уравнения 2-го порядка, малый параметр, трехслойный и двухслойный методы, равномерная по параметру и времени устойчивость

DOI: 10.31857/S2686954320010221

Рассмотрим линейную гиперболическую 2-го порядка начально-краевую задачу

$$\tau \alpha \partial_t^2 u_\tau + \rho \partial_t u_\tau - \operatorname{div}(\mathcal{A} \nabla u_\tau) = \operatorname{div} \mathbf{f} + f \quad \text{в } Q_\tau, \quad (1)$$
$$u_\tau|_{\Gamma_\tau} = 0, \quad u_\tau|_{t=0} = u_{\tau 0}, \quad \partial_t u_\tau|_{t=0} = u_{\tau 1},$$

являющуюся возмущением с (малым) параметром $\tau > 0$ параболической задачи

$$\rho \partial_t u - \operatorname{div}(\mathcal{A} \nabla u) = \operatorname{div} \mathbf{f} + f \quad (2)$$
$$\text{в } Q_T = \Omega \times (0, T), \quad u|_{\Gamma_T} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0.$$

Здесь Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega$, $\Gamma_T = \partial\Omega \times (0, T)$ и $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ — вектор-функция; операторы div и $\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_n)$ берутся по $x \in \Omega$. Коэффициенты задач подчиняются стандартным условиям α , ρ , $\mathcal{A} = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n \in L^\infty(\Omega)$ и $\alpha(x) \geq \nu$, $\rho(x) \geq \nu$, $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}^T(x) \geq \nu I$ для почти всех $x \in \Omega$ с $\nu > 0$ и единичной матрицей I . Недавно в [1] был

указан набор оценок u_τ и выведены оценки разности $u - u_\tau$ в терминах данных.

Целью данной работы является анализ устойчивости численных методов решения начально-краевой задачи (1). Такой анализ представляет интерес как в связи с применением в последнее десятилетие гиперболической квазигазодинамической системы уравнений [2–4] для решения ряда задач аэродинамики, астрофизики, теории фильтрации и т.д., так и с классических позиций [5].

В работе доказываются теоремы устойчивости решений симметричных трехслойного с весом и векторного двухслойного по t методов в энергетической и более слабой нормах по начальным данным и правой части уравнения. Соответствующие оценки равномерны как по τ , так и по T . При $\tau = 0$ из них следуют оценки решений соответствующих методов для задачи (2). Охвачен также случай, когда параметр τ стоит в (1) и перед $\operatorname{div}(\mathcal{A} \nabla u_\tau)$. Дополнительно выведена оценка порядка $O(\tau)$ для разности решений трехслойных методов с весом $\sigma = \frac{1}{4}$ для задач (1) и (2). Все результаты применимы при дискретизации задач по пространству как разностным методом, так и методом конечных элементов (МКЭ), в том числе с сосредоточенными матрицами масс. Техника анализа опирается на развитую в случае МКЭ в [6]. Некоторые другие результаты даны в [7] и цитированных там работах.

¹Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”, Москва, Россия

²Федеральный исследовательский центр
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша
Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: azlotnik2001@mail.ru

**E-mail: office@keldysh.ru

Пусть H_h — семейство евклидовых пространств со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_h$ и нормой $\|\cdot\|_h$, где h — параметр (связанный с дискретизацией Ω). Пусть линейные операторы $D_h = B_h, B_{1h}, A_h$ действуют в H_h и обладают свойством $D_h = D_h^* > 0$; введем норму $\|w\|_{D_h} = (D_h w, w)_h^{1/2} = \|D_h^{1/2} w\|_h$.

Предположим, что $\|w\|_{A_h} \leq \alpha_h \|w\|_{B_h}$ для всех $w \in H_h$ (эквивалентно, $A_h \leq \alpha_h^2 B_h$). В приложении к методам численного решения эллиптических уравнений 2-го порядка обычно $\alpha_h = \frac{c_0}{h_{\min}}$, где $h_{\min}$ — минимальный размер ячейки сетки по пространству.

Зададим равномерную сетку $\bar{\omega}_h = \{t_m = m h_t\}_{m=0}^M$ с шагом $h_t = T/M > 0$. Пусть $\omega_h = \{t_m\}_{m=1}^{M-1}$. Введем сеточные усреднения, в том числе с весом σ , и разностные отношения

$$\bar{s}_t y = \frac{\check{y} + y}{2}, \quad s_t y = \frac{y + \hat{y}}{2},$$

$$y^{(\sigma)} = \sigma \check{y} + (1 - 2\sigma)y + \sigma \hat{y},$$

$$\bar{\delta}_t y = \frac{y - \check{y}}{h_t}, \quad \delta_t y = \frac{\hat{y} - y}{h_t}, \quad \delta_t y = \frac{\hat{y} - \check{y}}{2h_t},$$

где $\check{y}^m = y^{m-1}$, $\hat{y}^m = y^{m+1}$, $y^m = y(t_m)$. Доопределим $\bar{\delta}_t y^0 = \delta_t y^0$. Введем сеточный оператор суммирования с переменным верхним пределом

$$I_h^m y = h_t \sum_{l=1}^m y^l \quad \text{при} \quad 1 \leq m \leq M, \quad I_h^0 y = 0.$$

Ниже используются следующие известные непосредственно проверяемые формулы:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta_t [(\bar{\delta}_t y)^2] &= (\delta_t \bar{\delta}_t y) \bar{\delta}_t y, \\ y^{(\sigma)} &= y + \sigma h_t^2 \delta_t \bar{\delta}_t y, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \delta_t \left[(\bar{s}_t y)^2 - \frac{1}{4} h_t^2 (\bar{\delta}_t y)^2 \right] = y \delta_t y.$$

Запишем абстрактный симметричный трехслойный метод с весом σ для задачи (1):

$$\tau B_h \delta_t \bar{\delta}_t v + B_{1h} \delta_t v + A_h v^{(\sigma)} = f \quad \text{в } H_h \quad \text{на } \omega_h, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \left(\tau B_h + \frac{1}{2} h_t B_{1h} + \sigma h_t^2 A_h \right) \delta_t v^0 + \\ & + \frac{1}{2} h_t A_h v^0 = \tau u_1 + \frac{1}{2} h_t f^0 \quad \text{в } H_h \end{aligned} \quad (5)$$

с искомой функцией $v: \bar{\omega}_h \rightarrow H_h$ и заданными $v^0, u_1 \in H_h$, $f: \{t_m\}_{m=0}^{M-1} \rightarrow H_h$; для краткости их зависимость от h, h_t не указываем. В МКЭ операторам B_h, B_{1h} соответствуют матрицы масс (которые могут быть и диагональными после их сосредоточения), а A_h — матрица жесткости.

Пусть ниже выполнены условия либо $\sigma \geq \frac{1}{4}$ и $\varepsilon_0 = 1$, либо

$$\sigma < \frac{1}{4}, \quad h_t \alpha_h \leq 2 \left(\frac{1 - \varepsilon_0^2}{1 - 4\sigma} \right)^{1/2} \tau^{1/2} \quad (6)$$

с некоторым $0 < \varepsilon_0 < 1$.

Тогда можно ввести норму

$$\|w\|_{0,\tau,h} = \left[\tau \|w\|_{B_h}^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4} \right) h_t^2 \|w\|_{A_h}^2 \right]^{1/2}$$

с $\mathbf{h} := (h, h_t)$, причем верно неравенство $\varepsilon_0 \sqrt{\tau} \|w\|_{B_h} \leq \|w\|_{0,\tau,h}$ для всех $w \in H_h$.

З а м е ч а н и е 1. Если операторам B_h и B_{1h} отвечают диагональные матрицы, то при $\sigma = 0$ метод (4), (5) становится явным. При $\sigma = 0$ условие (6) принимает вид $h_t \alpha_h \leq 2\varepsilon_1 \tau^{1/2}$ с $0 < \varepsilon_1 := \sqrt{1 - \varepsilon_0^2} < 1$. Если взять $\tau = c_1/\alpha_h$, то имеем $h_t \alpha_h^{3/2} \leq 2\varepsilon_1 \sqrt{c_1}$, или $h_t \leq 2\varepsilon_1 (c_1^{1/2}/c_0^{3/2}) h_{\min}^{3/2}$ при $\alpha_h = c_0/h_{\min}$ и $\tau = (c_1/c_0) h_{\min}$. Условие такого типа известно из [8].

Введем норму

$$\|y\|_{L_h^p(H_h)} = \left[\frac{1}{4} h_t \|y^0\|_h^p + I_h^{M-1} (\|y\|_h^p) \right]^{1/p},$$

$p = 1, 2$, для $y: \{t_m\}_{m=0}^{M-1} \rightarrow H_h$. Следующая теорема о равномерной по τ и T устойчивости является аналогом [6, теорема 2.1, п. 2] (см. также раздел 6 там). Родственные утверждения можно найти в [9]. Кроме того, дифференциальный прототип теоремы приведен в [1, оценка (8)].

Т е о р е м а 1. Для решения метода (4), (5) справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \max \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \max_{1 \leq m \leq M} \left[\tau \|\bar{\delta}_t v^m\|_{B_h}^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4} \right) h_t^2 \|\bar{\delta}_t v^m\|_{A_h}^2 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \|\bar{s}_t v^m\|_{A_h}^2 \right]^{1/2}, \|B_{1h}^{1/2} \delta_t v\|_{L_h^2(H_h)} \right\} \leq \\ & \leq \frac{1}{\sqrt{2}} (\|v^0\|_{A_h}^2 + \varepsilon_0^{-2} \tau \|B_h^{-1/2} u_1\|_h^2)^{1/2} + \|B_{1h}^{-1/2} f\|_{L_h^2(H_h)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Указанную норму f можно заменить на

$$\sqrt{2} I_h^{M-1} \|A_h^{-1/2} \bar{\delta}_t f\|_h + \frac{3}{\sqrt{2}} \max_{0 \leq m \leq M-1} \|A_h^{-1/2} f^m\|_h.$$

Доказательство. Скалярное умножение уравнения (4) на $\delta_t v$ с учетом формул (3) приводит к энергетическому равенству

$$\frac{1}{2} \delta_t \left[\tau \|\bar{\delta}_t v\|_{B_h}^2 + \|\bar{s}_t v\|_{A_h}^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4} \right) h_t^2 \|\bar{\delta}_t v\|_{A_h}^2 \right] + \|\delta_t v\|_{B_h}^2 = (f, \delta_t v)_h.$$

Применив к нему оператор $2I_h^{m-1}$, получим

$$\begin{aligned} & \|(\check{v}, v)^m\|_{\mathcal{E}_{\tau,h}}^2 + 2I_h^{m-1} (\|\delta_t v\|_{B_h}^2) = \\ & = \|(v^0, v^1)\|_{\mathcal{E}_{\tau,h}}^2 + 2I_h^{m-1} (f, \delta_t v)_h, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\|(\check{v}, v)^m\|_{\mathcal{E}_{\tau,h}} := (\|\bar{\delta}_t v^m\|_{0,\tau,h}^2 + \|\bar{s}_t v^m\|_{A_h}^2)^{1/2}$. Заметим, что

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} h_t^2 \|\bar{\delta}_t v\|_{A_h}^2 + \|\bar{s}_t v\|_{A_h}^2 &= (A_h \check{v}, v)_h = \\ &= \frac{1}{2} h_t (A_h \check{v}, \bar{\delta}_t v)_h + (A_h \check{v}, \bar{s}_t v)_h. \end{aligned}$$

Эта формула и результат скалярного умножения уравнения (5) на $\delta_t v^0 = \bar{\delta}_t v^1$ дают

$$\begin{aligned} \|(v^0, v^1)\|_{\mathcal{E}_{\tau,h}}^2 &= ((\tau B_h + \sigma h_t^2 A_h) \bar{\delta}_t v^1 + \\ &+ \frac{1}{2} h_t A_h \check{v}^1, \bar{\delta}_t v^1)_h + (A_h \check{v}^1, \bar{s}_t v^1)_h = \\ &= -\frac{1}{2} h_t \|\bar{\delta}_t v^1\|_{B_h}^2 + \left(\tau u_1 + \frac{1}{2} h_t f^0, \bar{\delta}_t v^1 \right)_h + (A_h v^0, \bar{s}_t v^1)_h. \end{aligned}$$

Поэтому равенство (8) влечет соотношения

$$\begin{aligned} & \|(\check{v}, v)^m\|_{\mathcal{E}_{\tau,h}}^2 + 2 \left[\frac{1}{4} h_t \|\bar{\delta}_t v^1\|_{B_h}^2 + I_h^{m-1} (\|\delta_t v\|_{B_h}^2) \right] = \\ &= (A_h v^0, \bar{s}_t v^1)_h + (\tau u_1, \bar{\delta}_t v^1)_h + \\ &+ \frac{1}{2} h_t (f^0, \bar{\delta}_t v^1)_h + 2I_h^{m-1} (f, \delta_t v)_h \leq \\ &\leq (\|v^0\|_{A_h}^2 + \varepsilon_0^{-2} \tau \|B_h^{-1/2} u_1\|_{A_h}^2)^{1/2} (\|\bar{s}_t v^1\|_{A_h}^2 + \varepsilon_0^2 \tau \|\bar{\delta}_t v^1\|_{B_h}^2)^{1/2} + \\ &+ 2\|B_h^{-1/2} f\|_{L_h^2(H_h)} \left(\frac{1}{4} h_t \|\bar{\delta}_t v^1\|_{B_h}^2 + I_h^{m-1} \|\delta_t v\|_{B_h}^2 \right)^{1/2}, \\ &1 \leq m \leq M. \end{aligned}$$

При $f=0$, взяв максимум левой части по m , с учетом неравенства $\varepsilon_0^2 \tau \|w\|_{B_h}^2 \leq \|w\|_{0,\tau,h}^2$ выведем оценку (7). При $v^0 = u_1 = 0$, взяв $m = M$, получим сначала оценку

$$\|B_{1h}^{1/2} \delta_t v\|_{L_h^2(H_h)} \leq \|B_{1h}^{-1/2} f\|_{L_h^2(H_h)},$$

а затем, взяв максимум по m , выведем и оценку (7).

Чтобы вывести эту оценку с другой указанной в условии теоремы нормой f , достаточно с помощью формулы $\delta_t = \delta_t \bar{s}_t$ и суммирования по частям при $v^0 = 0$ записать

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} h_t (f^0, \bar{\delta}_t v^1)_h + 2I_h^{m-1} (f, \delta_t v)_h = \\ &= -2I_h^{m-1} (\bar{\delta}_t f, \bar{s}_t v)_h + 2(f^{m-1}, \bar{s}_t v^m)_h - (f^0, \bar{s}_t v^1)_h \leq \\ &\leq (2I_h^{m-1} \|A_h^{-1/2} \bar{\delta}_t f\|_h + 2\|A_h^{-1/2} f^{m-1}\|_h + \\ &+ \|A_h^{-1/2} f^0\|_h) \max_{1 \leq l \leq m} \|\bar{s}_t v^l\|_{A_h}. \end{aligned}$$

Установим также оценку v в более слабой норме через более слабые нормы данных типа [6, теорема 2.1, п. 1], с иным доказательством. Дифференциальный прототип оценки связан с [1, теорема 1]. Пусть $\|y\|_{\tilde{L}_h^p(H_h)} = [I_h^M (\|y\|_h^p)]^{1/p}$, $p = 1, 2$.

Теорема 2. Для решения метода (4), (5) с $f = \delta_t g$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \max \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \max_{0 \leq m \leq M} [\tau \|v^m\|_{B_h}^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4} \right) h_t^2 \|v^m\|_{A_h}^2]^{1/2}, \right. \\ & \left. \frac{1}{\sqrt{2}} \max_{1 \leq m \leq M} \|I_h^m \bar{s}_t v\|_{A_h}, \|B_{1h}^{1/2} \bar{s}_t v\|_{L_h^2(H_h)} \right\} \leq \\ & \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\tau \|v^0\|_{B_h}^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4} \right) h_t^2 \|v^0\|_{A_h}^2 \right]^{1/2} + \\ & + \sqrt{2} (\|A_h^{-1/2} B_{1h} v^0\|_h + \tau \|A_h^{-1/2} u_1\|_h) + \\ & + \|B_{1h}^{-1/2} (g - s_t g^0)\|_{\tilde{L}_h^2(H_h)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Указанную в ней норму $f = \delta_t g$ можно заменить на $\sqrt{2} \|A_h^{-1/2} f\|_{L_h^1(H_h)}$.

Доказательство. При $1 \leq m \leq M$ применение оператора I_h^{m-1} к уравнению (4) дает

$$\begin{aligned} & \tau B_h \bar{\delta}_t v^m + B_{1h} \bar{s}_t v^m + A_h I_h^{m-1} (v^{(\sigma)}) = \\ &= \tau B_h \delta_t v^0 + B_{1h} s_t v^0 + I_h^{m-1} f. \end{aligned} \quad (10)$$

Положим $V = I_h \bar{s}_t v$. Непосредственно проверяется формула

$$\bar{s}_t V^m = I_h^{m-1} (v^{(1/4)}) + \frac{1}{2} h_t s_t v^0.$$

Также $v^{(\sigma)} = v^{(1/4)} + \left(\sigma - \frac{1}{4} \right) h_t^2 \bar{\delta}_t \bar{\delta}_t v$ (см. (3)) и $\frac{1}{4} h_t^2 \delta_t v - \frac{1}{2} h_t s_t v = -\frac{1}{2} h_t \check{v}$, поэтому

$$\begin{aligned} & I_h^{m-1} (v^{(\sigma)}) = I_h^{m-1} (v^{(1/4)}) + \left(\sigma - \frac{1}{4} \right) h_t^2 (\bar{\delta}_t v^m - \delta_t v^0) = \\ &= \bar{s}_t V^m + \left(\sigma - \frac{1}{4} \right) h_t^2 \bar{\delta}_t v^m - \sigma h_t^2 \delta_t v^0 - \frac{1}{2} h_t v^0. \end{aligned}$$

Подставив эту формулу в (10) и учитывая, что

$s_t v = v + \frac{1}{2} h_t \delta_t v$, в силу уравнения (5) выведем

$$\begin{aligned} \tau B_h \bar{\delta}_t v^m + B_{1h} \bar{s}_t v^m + \left(\sigma - \frac{1}{4} \right) h_t^2 A_h \bar{\delta}_t v^m + A_h \bar{s}_t v^m = \\ = \left(\tau B_h + \frac{1}{2} h_t B_{1h} + \sigma h_t^2 A_h \right) \delta_t v^0 + B_{1h} v^0 + \\ + \frac{1}{2} h_t A_h v^0 + I_h^{m-1} f = B_{1h} v^0 + \tau u_1 + \frac{1}{2} h_t f^0 + I_h^{m-1} f. \end{aligned}$$

Скалярное умножение выведенного уравнения на $\bar{s}_t v^m = \bar{\delta}_t V$ приводит к “слабому” энергетическому равенству

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \bar{\delta}_t \left[\tau \|v\|_{B_h}^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4} \right) h_t^2 \|v\|_{A_h}^2 + \|V\|_{A_h}^2 \right] + \|\bar{s}_t v\|_{B_h}^2 = \\ = (B_{1h} v^0 + \tau u_1, \bar{s}_t v)_h + \left(\frac{1}{2} h_t f^0 + \check{I}_h f, \bar{s}_t v \right)_h \end{aligned}$$

на $\{t_m\}_{m=1}^M$, где $\check{I}_h f = I_h^{m-1} f$. Применим к нему оператор $2I_h^m$ и получим

$$\begin{aligned} \|v^m\|_{0,\tau,h}^2 + \|V^m\|_{A_h}^2 + 2I_h^m (\|\bar{s}_t v\|_{B_h}^2) = \\ = \|v^0\|_{0,\tau,h}^2 + 2(B_{1h} v^0 + \tau u_1, V^m)_h + \\ + 2I_h^m \left[\left(\frac{1}{2} h_t f^0 + \check{I}_h f, \bar{s}_t v \right)_h \right] \leq \\ \leq \|v^0\|_{0,\tau,h}^2 + 2\|A_h^{-1/2} (B_{1h} v^0 + \tau u_1)\|_h \|V^m\|_{A_h} + \\ + 2\|B_{1h}^{-1/2} (g - s_t g^0)\|_{L_h^2(H_h)} [I_h^m (\|\bar{s}_t v\|_{B_h}^2)]^{1/2}, \end{aligned}$$

так как $\frac{1}{2} h_t f^0 + \check{I}_h f = g - s_t g^0$ при $f = \delta_t g$. При $f = 0$ отсюда следуют оценки

$$\begin{aligned} \|V^m\|_{0,\tau,h}^2 + 2I_h^m (\|\bar{s}_t v\|_{B_h}^2) \leq \\ \leq \|v^0\|_{0,\tau,h}^2 + \|A_h^{-1/2} (B_{1h} v^0 + \tau u_1)\|_h^2, \\ \|V^m\|_{A_h} \leq \|v^0\|_{0,\tau,h} + 2\|A_h^{-1/2} (B_{1h} v^0 + \tau u_1)\|_h \end{aligned}$$

и тем более оценка (9). При $v^0 = u_1 = 0$ она выводится так же, как и в теореме 1.

Для вывода этой оценки с другой указанной в условии нормой f с помощью формулы

$$I_h^m (\check{I}_h f, y)_h = I_h^{m-1} (f, (I_h^m - I_h) y)_h$$

достаточно записать

$$\begin{aligned} I_h^m \left[\left(\frac{1}{2} h_t f^0 + \check{I}_h f, \bar{s}_t v \right)_h \right] = \\ = \left(\frac{1}{2} h_t f^0, V^m \right)_h + I_h^{m-1} (f, V^m - V)_h \leq \\ \leq \frac{1}{2} h_t \|A_h^{-1/2} f^0\|_h \|V^m\|_{A_h} + 2I_h^{m-1} \|A_h^{-1/2} f\|_h \max_{1 \leq l \leq m} \|V^l\|_{A_h} \leq \\ \leq 2\|A_h^{-1/2} f\|_{L_h^1(H_h)} \max_{1 \leq l \leq m} \|V^l\|_{A_h}. \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 2. В оценке (9) каждое из слагаемых $\sqrt{2}(\|A_h^{-1/2} B_{1h} v^0\|_h + \tau \|A_h^{-1/2} u_1\|_h)$ можно заменить на $\sqrt{T} \|v^0\|_{B_h}$, $\sqrt{T} \tau \|B_{1h}^{-1/2} u_1\|_h$ соответственно. Для обоснования этого вместо использованной в доказательстве оценки надо воспользоваться другой:

$$\begin{aligned} 2(B_{1h} v^0 + \tau u_1, V^m)_h \leq \\ \leq 2(\|v^0\|_{B_h} + \tau \|B_{1h}^{-1/2} u_1\|_h) \sqrt{T [I_h^m (\|\bar{s}_t v\|_{B_h}^2)]}. \end{aligned}$$

Известно, что каждая из оценок (7) и (9) влечет существование и единственность решения метода (4), (5) при любых $v^0, u_1 \in H_h, f: \{t_m\}_{m=0}^{M-1} \rightarrow H_h$ (см. подобное, например, в [10, следствие 9.1]). Это же относится к оценкам для других методов ниже.

Представляет интерес также случай, когда в уравнении в (1) параметр τ стоит и перед $\text{div}(\mathcal{A} \nabla u_\tau)$. Тогда в уравнениях (4), (5) имеем $A_h = \tau A_{0h}$ с $A_{0h} = A_{0h}^* > 0$, $A_{0h} \leq \alpha_h^2 B_h$. Теоремы 1 и 2 можно применить, и оценки (7), (9) (с учетом замечания 2) принимают вид

$$\begin{aligned} \max \left\{ \sqrt{\frac{\tau}{2}} \max_{1 \leq m \leq M} [\|\bar{\delta}_t v^m\|_{B_h}^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4} \right) h_t^2 \|\bar{\delta}_t v^m\|_{A_{0h}}^2 + \right. \\ \left. + \|\bar{s}_t v^m\|_{A_{0h}}^2]^{1/2}, \|B_{1h}^{1/2} \bar{\delta}_t v\|_{L_h^2(H_h)} \right\} \leq \\ \leq \sqrt{\frac{\tau}{2}} (\|v^0\|_{A_{0h}}^2 + \varepsilon_0^{-2} \|B_h^{-1/2} u_1\|_h^2)^{1/2} + \|B_{1h}^{-1/2} f\|_{L_h^2(H_h)}, \\ \max \left\{ \sqrt{\frac{\tau}{2}} \max_{0 \leq m \leq M} \|v^m\|_{B_h}^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4} \right) h_t^2 \|v^m\|_{A_{0h}}^2 \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{\tau}{2}} \max_{1 \leq m \leq M} \|I_h^m \bar{s}_t v\|_{A_{0h}}, \|B_{1h}^{1/2} s_t v\|_{L_h^2(H_h)} \right\} \leq \\ \leq \sqrt{\frac{\tau}{2}} [\|v^0\|_{B_h}^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4} \right) h_t^2 \|v^0\|_{A_{0h}}^2]^{1/2} + \\ + \sqrt{T} \|v^0\|_{B_h} + \sqrt{2} \tau \|A_{0h}^{-1/2} u_1\|_h + \\ + \|B_{1h}^{-1/2} (g - s_t g^0)\|_{L_h^2(H_h)}; \end{aligned}$$

во второй оценке можно заменить $\sqrt{2} \tau \|A_{0h}^{-1/2} u_1\|_h$ на $\sqrt{T} \tau \|B_{1h}^{-1/2} u_1\|_h$. В условии (6) следует убрать множитель $\tau^{1/2}$, и при $\sigma = 0$ оно принимает вид $h_t \alpha_h \leq 2\varepsilon_1$, или $h_t \leq 2(\varepsilon_1/c_0) h_{\min}$ при $\alpha_h = c_0/h_{\min}$, что типично для явных схем для гиперболических уравнений.

Кроме того, при $\tau = 0$ метод (4), (5) переходит в трехслойный метод с весом σ для параболической задачи (2):

$$B_{1h} \bar{\delta}_t v + A_h v^{(\sigma)} = f \quad \text{в } H_h \quad \text{на } \omega_h, \quad (11)$$

$$(B_{1h} + 2\sigma h_t A_h) \delta_t v^0 + A_h v^0 = f^0 \quad \text{в } H_h \quad (12)$$

с искомой функцией $v: \bar{\omega}_{h_i} \rightarrow H_h$ и заданными $v^0 \in H_h$, $f: \{t_m\}_{m=0}^{M-1} \rightarrow H_h$ (слагаемые с B_h и u_1 исчезают). При $\tau = 0$ и $\sigma \geq \frac{1}{4}$ результаты теорем 1, 2 сохраняют силу и упрощаются, а именно, для решения метода (11), (12) верны оценки

$$\begin{aligned} & \max \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \max_{1 \leq m \leq M} \left[\left(\sigma - \frac{1}{4} \right) h_i^2 \|\bar{\delta}_i v^m\|_{A_h}^2 + \|\bar{s}_i v^m\|_{A_h}^2 \right]^{1/2}, \right. \\ & \left. \|B_{1h}^{1/2} \delta_i v^0\|_{L_h^2(H_h)} \right\} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|v^0\|_{A_h} + \|B_{1h}^{-1/2} f\|_{L_h^2(H_h)}, \\ & \max \left\{ \sqrt{\frac{1}{2}} \left(\sigma - \frac{1}{4} \right) h_i \max_{0 \leq m \leq M} \|v^m\|_{A_h}, \right. \\ & \left. \frac{1}{\sqrt{2}} \max_{1 \leq m \leq M} \|I_h^m \bar{s}_i v\|_{A_h}, \|B_{1h}^{1/2} \bar{s}_i v\|_{L_h^2(H_h)} \right\} \leq \\ & \leq \sqrt{\frac{1}{2}} \left(\sigma - \frac{1}{4} \right) h_i \|v^0\|_{A_h} + \sqrt{2} \|A_h^{-1/2} B_{1h} v^0\|_h + \\ & + \|B_{1h}^{-1/2} (g - s_i g^0)\|_{L_h^2(H_h)} \end{aligned}$$

(во второй из оценок $f = \delta_i g$), причем возможность замен норм f также сохраняет силу.

Остановимся отдельно на случае $\sigma = \frac{1}{4}$, когда слагаемые с множителем $\sigma - \frac{1}{4}$ в выписанных выше нормах в оценках и энергетических равенствах исчезают. Нам потребуется стандартный симметричный двухслойный метод для задачи (2)

$$B_{1h} \bar{\delta}_i v + A_h \bar{s}_i v = \tilde{f} \quad \text{в } H_h \quad \text{на } \{t_m\}_{m=1}^M \quad (13)$$

с заданными $v^0 \in H_h$, $\tilde{f}: \{t_m\}_{m=1}^M \rightarrow H_h$. Нетрудно видеть, что он эквивалентен трехслойному методу (11), (12) с весом $\sigma = \frac{1}{4}$, а также $f^m = s_i \tilde{f}^m$, $1 \leq m \leq M-1$ и $f^0 = \tilde{f}^1$. В частности, применение s_i к уравнению (13) влечет (11) с $\sigma = \frac{1}{4}$, а при $m = 1$ уравнение (13) эквивалентно (12) с $\sigma = \frac{1}{4}$.

Выведем оценку разности решений методов (4), (5) и (11), (12), ср. с [1, оценка (10)].

Теорема 3. Пусть $bB_h \leq B_{1h}$ с $b > 0$. При $\sigma = \frac{1}{4}$ и $f^m = s_i \tilde{f}^m$ на ω_{h_i} , $f^0 = \tilde{f}^1$ для разности $r_\tau = v_\tau - v_0$ решений $v = v_\tau$ метода (4), (5) и $v = v_0$ метода (11), (12) справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \max \left\{ \sqrt{\frac{\tau}{2}} \max_{0 \leq m \leq M} \|r_\tau^m\|_{B_h}, \right. \\ & \left. \frac{1}{\sqrt{2}} \max_{1 \leq m \leq M} \|I_h^m \bar{s}_i r_\tau\|_{A_h}, \|B_{1h}^{1/2} \bar{s}_i r_\tau\|_{L_h^2(H_h)} \right\} \leq \end{aligned}$$

$$\leq \tau \left(b^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} \|v^0\|_{A_h} + \sqrt{2} \|A_h^{-1/2} u_1\|_h + b^{-1} \|B_{1h}^{-1/2} \tilde{f}\|_{L_h^2(H_h)} \right). \quad (14)$$

Доказательство. При $b > 0$ неравенство $bB_h \leq B_{1h}$ эквивалентно $bB_{1h}^{-1} \leq B_h^{-1}$. Применение обоих влечет неравенство

$$\|B_{1h}^{-1/2} B_h w\|_h^2 \leq b^{-1} \|B_h^{1/2} w\|_h^2 \leq b^{-2} \|B_{1h}^{1/2} w\|_h^2 \quad \forall w \in H_h. \quad (15)$$

Как следует из уравнений (4), (5) и (11), (12), разность r_τ удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} & \tau B_h \delta_i \bar{\delta}_i r_\tau + B_{1h} \bar{\delta}_i r_\tau + A_h r_\tau^{(\sigma)} = \\ & = -\tau B_h \delta_i \bar{\delta}_i v_0 \quad \text{на } \omega_{h_i}, \\ & \left(\tau B_h + \frac{1}{2} h_i B_{1h} + \sigma h_i^2 A_h \right) \delta_i r_\tau^0 + \\ & + \frac{1}{2} h_i A_h r_\tau^0 = \tau u_1 - \tau B_h \delta_i v_0^0 \end{aligned}$$

и $(r_\tau)^0 = 0$. В силу теоремы 2 с $f = \delta_i g$, $g^m = -\tau B_h \bar{\delta}_i v_0$, $1 \leq m \leq M$ и $\frac{1}{2} h_i \delta_i g^0 = -\tau B_h \delta_i v_0^0$, т.е. $g^0 = 2\tau B_h \delta_i v_0^0 + g^1 = -g^1$ и $s_i g^0 = 0$, а также неравенства (15) имеем

$$\begin{aligned} & \max \left\{ \sqrt{\frac{\tau}{2}} \max_{1 \leq m \leq M} \|r_\tau^m\|_{B_h}, \right. \\ & \left. \frac{1}{\sqrt{2}} \max_{1 \leq m \leq M} \|I_h^m \bar{s}_i r_\tau\|_{A_h}, \|B_{1h}^{1/2} \bar{s}_i r_\tau\|_{L_h^2(H_h)} \right\} \leq \\ & \leq \sqrt{2} \tau \|A_h^{-1/2} u_1\|_h + \tau \|B_{1h}^{-1/2} B_h \bar{\delta}_i v_0\|_{L_h^2(H_h)} \leq \\ & \leq \sqrt{2} \tau \|A_h^{-1/2} u_1\|_h + \tau b^{-1} \|B_{1h}^{1/2} \bar{\delta}_i v_0\|_{L_h^2(H_h)}. \quad (16) \end{aligned}$$

Для решения метода (13) верна оценка

$$\begin{aligned} & \max \left\{ \|B_{1h}^{1/2} \bar{\delta}_i v\|_{L_h^2(H_h)}, \frac{1}{\sqrt{2}} \max_{0 \leq m \leq M} \|v^m\|_{A_h} \right\} \leq \\ & \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|v^0\|_{A_h} + \|B_{1h}^{-1/2} \tilde{f}\|_{L_h^2(H_h)} \end{aligned}$$

(напомним, что она следует из энергетического равенства $\|\bar{\delta}_i v\|_{B_{1h}}^2 + \frac{1}{2} \bar{\delta}_i (\|v\|_{A_h}^2) = (\tilde{f}, \bar{\delta}_i v)_h$). Ее применение в (16) завершает доказательство.

Запишем теперь симметричный векторный двухслойный метод решения задачи (1) и изучим его устойчивость, следуя [6, раздел 8]. В нем искомыми являются две функции $v, \dot{v}: \bar{\omega}_{h_i} \rightarrow H_h$, аппроксимирующие u_τ и $\partial_t u_\tau$ и удовлетворяющие системе уравнений 1-го порядка по t

$$\begin{aligned} & \tau B_h \bar{\delta}_i \dot{v} + B_{1h} \bar{s}_i \dot{v} + A_h \bar{s}_i v = f, \\ & \bar{\delta}_i v - \bar{s}_i \dot{v} = 0 \quad \text{в } H_h \quad \text{на } \{t_m\}_{m=1}^M \end{aligned} \quad (17)$$

при заданных $v^0, \dot{v}^0 \in H_h$, $f: \{t_m\}_{m=1}^M \rightarrow H_h$. Его тесная связь с трехслойным методом с весом $\sigma = \frac{1}{4}$ и реализация описаны в [6]. При $\tau = 0$ этот метод переходит просто в симметричный двухслойный метод (13) с $\tilde{f} = f$ для параболической задачи (2).

При анализе устойчивости (и выводе оценок погрешности) второе уравнение (17) следует брать неоднородным вида $\bar{\delta}_t v - \bar{s}_t \dot{v} = g$ с заданной $g: \{t_m\}_{m=1}^M \rightarrow H_h$. Назовем такой двухслойный метод обобщенным.

Теорема 4. Для решения обобщенного двухслойного метода справедлива оценка

$$\begin{aligned} \max \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \max_{0 \leq m \leq M} (\tau \|\dot{v}^m\|_{B_h}^2 + \|v^m\|_{A_h}^2)^{1/2}, \|B_{1h}^{1/2} \bar{s}_t \dot{v}\|_{\tilde{L}_h^2(H_h)} \right\} \leq \\ \leq \frac{1}{\sqrt{2}} (\tau \|\dot{v}^0\|_{B_h}^2 + \|v^0\|_{A_h}^2)^{1/2} + \\ + \|B_{1h}^{-1/2} f\|_{\tilde{L}_h^2(H_h)} + \sqrt{2} \|A_h^{1/2} g\|_{\tilde{L}_h^1(H_h)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Указанную в ней норму f можно заменить на $\sqrt{2} (\max_{1 \leq m \leq M} \|A_h^{-1/2} f^m\|_h + \|A_h^{-1/2} \bar{\delta}_t f\|_{\tilde{L}_h^1(H_h)})$.

В случае $B_{1h} = bB_h$ с $b > 0$ справедлива также оценка

$$\begin{aligned} \max \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \max_{0 \leq m \leq M} (\tau \|A_h^{-1/2} B_h \dot{v}^m\|_h^2 + \|v^m\|_{B_h}^2)^{1/2}, \right. \\ \left. b^{1/2} \|A_h^{-1/2} B_h \bar{s}_t \dot{v}\|_{\tilde{L}_h^2(H_h)} \right\} \leq \\ \leq \frac{1}{\sqrt{2}} (\tau \|A_h^{-1/2} B_h \dot{v}^0\|_h^2 + \|v^0\|_{B_h}^2)^{1/2} + \\ + b^{-1/2} \|A_h^{-1/2} f\|_{\tilde{L}_h^2(H_h)} + \sqrt{2} \|B_h^{1/2} g\|_{\tilde{L}_h^1(H_h)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Доказательство. 1. Скалярное умножение первого уравнения (17) на $\bar{s}_t \dot{v}$, уравнения $\bar{\delta}_t v - \bar{s}_t \dot{v} = g$ на $A_h \bar{s}_t v$ и сложение результатов приводит к энергетическому равенству

$$\frac{1}{2} \bar{\delta}_t (\tau \|\dot{v}\|_{B_h}^2 + \|v\|_{A_h}^2) + \|\bar{s}_t \dot{v}\|_{B_h}^2 = (f, \bar{s}_t \dot{v})_h + (A_h g, \bar{s}_t v)_h.$$

Применив к нему оператор $2I_h^m$, получим

$$\begin{aligned} \tau \|\dot{v}^m\|_{B_h}^2 + \|v^m\|_{A_h}^2 + 2I_h^m (\|\bar{s}_t \dot{v}\|_{B_h}^2) = \\ = \tau \|\dot{v}^0\|_{B_h}^2 + \|v^0\|_{A_h}^2 + 2I_h^m [(f, \bar{s}_t \dot{v})_h + (A_h g, \bar{s}_t v)_h] \leq \\ \leq \tau \|\dot{v}^0\|_{B_h}^2 + \|v^0\|_{A_h}^2 + 2\|B_{1h}^{-1/2} f\|_{\tilde{L}_h^2(H_h)} [I_h^m (\|\bar{s}_t \dot{v}\|_{B_h}^2)]^{1/2} + \\ + 2\|A_h^{1/2} g\|_{\tilde{L}_h^1(H_h)} \max_{1 \leq l \leq m} \|\bar{s}_t v^l\|_{A_h} \end{aligned}$$

на $\{t_m\}_{m=1}^M$. Поскольку $\|\bar{s}_t v\|_{A_h} \leq \bar{s}_t (\|v\|_{A_h})$, то вывод оценки (18) завершается подобно теореме 2.

Чтобы установить эту оценку с другой нормой f , заметим, что при $v^0 = 0$, $g = 0$ имеем

$$\begin{aligned} I_h^m (f, \bar{s}_t \dot{v})_h = I_h^m (f, \bar{\delta}_t v)_h = (f^m, v^m)_h - I_h^m (\bar{\delta}_t f, \dot{v})_h \leq \\ \leq \|A_h^{-1/2} f^m\|_h \|v^m\|_{A_h} + I_h^m (\|A_h^{-1/2} \bar{\delta}_t f\|_h) \max_{1 \leq l \leq m-1} \|v^l\|_{A_h} \leq \\ \leq (\max_{1 \leq m \leq M} \|A_h^{-1/2} f^m\|_h + \|A_h^{-1/2} \bar{\delta}_t f\|_{\tilde{L}_h^1(H_h)}) \max_{1 \leq l \leq m} \|v^l\|_{A_h}. \end{aligned}$$

2. Скалярное умножение первого уравнения (17) на $A_h^{-1} B_h \bar{s}_t \dot{v}$, уравнения $\bar{\delta}_t v - \bar{s}_t \dot{v} = g$ на $B_h \bar{s}_t v$ и сложение результатов приводит при $B_{1h} = bB_h$ с $b > 0$ к соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \bar{\delta}_t (\tau \|A_h^{-1/2} B_h \dot{v}\|_h^2 + \|v\|_{B_h}^2) + b \|A_h^{-1/2} B_h \bar{s}_t \dot{v}\|_h^2 = \\ = (f, A_h^{-1} B_h \bar{s}_t \dot{v})_h + (B_h g, \bar{s}_t v)_h \leq \\ \leq \|A_h^{-1/2} f\|_h \|A_h^{-1/2} B_h \bar{s}_t \dot{v}\|_h + \|B_h^{1/2} g\|_h \|\bar{s}_t v\|_{B_h}. \end{aligned}$$

Далее рассуждения уже стандартного типа влекут оценку (19).

Возможно обобщение выведенных оценок на случай неравномерной сетки $\bar{\omega}_h$ (см. [6]).

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект 19-11-00104.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chetverushkin B.N., Zlotnik A.A. // Appl. Math. Lett. 2018. V. 83. P. 116–122.
2. Четверушкин Б.Н. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: МАКС Пресс, 2004.
3. Злотник А.А., Четверушкин Б.Н. // ЖВМиМФ. 2008. Т. 48. № 3. С. 445–472.
4. Четверушкин Б.Н. // Матем. моделирование. 2018. Т. 30. № 2. С. 81–98.
5. Шашков А.Г., Бубнов В.А., Яновский С.Ю. Волновые явления теплопроводности. 2-е изд. М.: Едиториал УРСС, 2004.
6. Злотник А.А. // В сб.: Вычисл. процессы и системы / под ред. Г.И. Марчука. В. 8. М.: Наука, 1991. С. 116–167.
7. Čiegis R., Mirinavičius A. // Cent. Eur. J. Math. 2011. V. 9. № 5. P. 1164–1170.
8. Четверушкин Б.Н., Гулин А.В. // ДАН. 2012. Т. 446. № 5. С. 501–503.
9. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
10. Злотник А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Изд. дом МЭИ, 2012.

STABILITY OF NUMERICAL METHODS FOR SOLVING 2nd ORDER HYPERBOLIC EQUATIONS WITH A SMALL PARAMETER

A. A. Zlotnik^{1,2} and Academician of the RAS B. N. Chetverushkin²

¹National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russian Federation

²Federal Research Center Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

Received September 6, 2019

We study the symmetric three-level with a weight and vector two-level in time methods for solving the initial-boundary value problem for a 2nd order hyperbolic equation with a small parameter $\tau > 0$ in front of the higher time derivative which is a perturbation of the corresponding parabolic equation. We prove theorems on the uniform in τ and time stability of solutions in two norms with respect to the initial data and the right-hand side of the equation. We also cover the case where τ stands also in front of the elliptic part of the equation. The spacial discretization can be accomplished both by the finite-difference method and finite element method.

Keywords: 2nd order hyperbolic equations, small parameter, three-level and two-level methods, uniform in small parameter and time stability