ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 490, с. 20–23

МАТЕМАТИКА

УДК 517.444

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ФУНКЦИЙ С НУЛЕВЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ ПО ШАРАМ ФИКСИРОВАННОГО РАДИУСА

© 2020 г. В. В. Волчков[1,*], Вит. В. Волчков[1]

Представлено академиком РАН С.В. Конягиным 25.09.2019 г.
Поступило 25.09.2019 г.
После доработки 25.09.2019 г.
Принято к публикации 29.10.2019 г.

Пусть $V_r(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$, – множество функций $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ с нулевыми интегралами по всем шарам из $\mathbb{R}^n$ радиуса r. В работе изучаются различные интерполяционные задачи для класса $V_r(\mathbb{R}^n)$. В случае, когда множество узлов интерполяции является конечным, получено решение кратной интерполяционной задачи при общих предположениях. Для задач с бесконечным множеством узлов найдены достаточные условия разрешимости. Указан также новый пример подмножества $\mathbb{R}^n$, на котором некоторая ненулевая вещественно аналитическая функция класса $V_r(\mathbb{R}^n)$ равна нулю.

Ключевые слова: интерполяционные задачи, сферические средние, периодичность в среднем

DOI: 10.31857/S268695432001021X

Пусть $\mathbb{R}^n$ – вещественное евклидово пространство размерности $n \geq 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$. Предположим, что $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и выполнено равенство

$$\int\limits_{|x|\leq r} f(x+y)dx = 0 \qquad (1)$$

при некотором фиксированном $r > 0$ и всех $y \in \mathbb{R}^n$. Верно ли, что $f = 0$? Этот вопрос был рассмотрен в 1929 г. известным румынским математиком Д. Помпейю, который утверждал, что при $n = 2$ ответ является положительным (см., например, обзор [1]). Однако спустя пятнадцать лет Л. Чакалов обнаружил (см. [1]), что доказательство Д. Помпейю содержит ошибку. Более того, он показал, что функция $f(x_1, x_2) = \sin(\lambda x_1)$ имеет нулевые интегралы по всем единичным кругам в $\mathbb{R}^2$, если число λ является нулем функции Бесселя J_1. Впоследствии выяснилось, что аналогичные примеры ненулевых функций с условием (1) можно построить, используя метод, предложенный И. Радоном еще в 1917 г. Этот метод основан на теореме о среднем для собственных функций оператора Лапласа и может быть распространен на произвольное двухточечно-однородное пространство X (см. [2, часть 2, п. 2.4]). Кроме того, он позволяет строить ненулевые функции на X, имеющие нулевые интегралы по всем сферам фиксированного радиуса.

Обозначим через $V_r(\mathbb{R}^n)$ множество функций $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих (1) при всех $y \in \mathbb{R}^n$. Данный класс функций, а также различные его аналоги и обобщения активно изучались в течение последних пятидесяти лет в работах Ф. Йона, Д. Дельсарта, Д. Смита, Л. Зальцмана, К.А. Беренстейна и других авторов (см. обзоры [1, 3, 4] и монографии [2, 5, 6], содержащие обширную библиографию). Перечислим основные направления в этих исследованиях.

1. Изучение нулевых множеств и соответствующие теоремы единственности для класса $V_r(\mathbb{R}^n)$ [2, 5–8]. Данное направление восходит к теореме единственности Ф. Йона [7, гл. 6] для функций с нулевыми сферическими средними.

2. Исследование допустимых ограничений на рост ненулевых функций класса $V_r(\mathbb{R}^n)$ и его аналогов на неограниченных областях (теоремы типа Лиувилля и Фрагмена–Линделефа [2, 5–11]).

3. Изучение функций с условиями типа (1), в которых r принадлежит заданному двухэлементному множеству [1–6, 8, 12] (теоремы о двух ради-

[1]*Донецкий национальный университет, Донецк, Украина*
**E-mail: valeriyvolchkov@gmail.com*

усах). Первым результатом в этом направлении является классическая теорема Д. Дельсарта о характеризации гармонических функций посредством уравнения средних значений, выполненного только для двух радиусов.

4. Описание функций класса $V_r(\mathbb{R}^n)$ в виде рядов по сферическим гармоникам [2, 5, 6, 13] (аналоги разложений Тейлора и Лорана из теории аналитических функций).

5. Проблема продолжения [2, 5, 6].

6. Теоремы о стирании особенностей [2, 5, 6, 13, 14].

7. Задачи интегральной геометрии о восстановлении функций из заданных классов по известным шаровым средним [1, 3–6, 15].

8. Аппроксимация функций с нулевыми шаровыми средними линейными комбинациями специальных функций [2, 5, 6].

9. Изучение аналогов и обобщений класса $V_r(\mathbb{R}^n)$ на различных однородных пространствах и группах (например, на римановых симметрических пространствах) [1–6, 12, 14, 15].

В данной работе впервые изучаются интерполяционные задачи для класса $V_r(\mathbb{R}^n)$. В случае, когда множество узлов интерполяции является конечным, получена теорема о существовании решения кратной интерполяционной задачи при общих предположениях (см. теорему 1 ниже). Дальнейшие результаты работы содержат различные достаточные условия разрешимости интерполяционных задач с бесконечным числом узлов (см. теоремы 2–4). Одним из промежуточных результатов работы является новый пример подмножества $\mathbb{R}^n$, на котором некоторая ненулевая вещественно аналитическая функция класса $V_r(\mathbb{R}^n)$ равна нулю (см. следствие 2).

ФОРМУЛИРОВКИ ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Как обычно, символами $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{C}$ обозначаются соответственно множества натуральных, целых неотрицательных и комплексных чисел. Пусть $\mathbb{Z}_+^n$ – множество n-мерных мультииндексов, т.е. векторов $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, у которых $\alpha_j \in \mathbb{Z}_+$ при любом $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Для мультииндекса $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ обозначим через

$$\partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$$

оператор частного дифференцирования соответствующего порядка.

Рассмотрим теперь кратную интерполяционную задачу для класса $V_r(\mathbb{R}^n)$ с конечным множеством узлов интерполяции.

Т е о р е м а 1. *Пусть $s, q \in \mathbb{N}$. Тогда для любого набора попарно различных точек $a_1, \ldots, a_q$ в $\mathbb{R}^n$ и любого набора констант*

$$b_{\alpha,k} \in \mathbb{C} \quad (\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n, \\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \le s,\ k = 1,\ldots,q)$$

существует вещественно аналитическая функция $f \in V_r(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая условиям

$$(\partial^\alpha f)(a_k) = b_{\alpha,k}. \tag{2}$$

Из теоремы 1 получаем следующее следствие, которое, в частности, показывает, что решение интерполяционной задачи (2) для класса $V_r(\mathbb{R}^n)$ не единственно.

С л е д с т в и е 1. *Пусть $s, q \in \mathbb{N}$. Тогда для любого набора попарно различных точек $a_1, \ldots, a_q$ в $\mathbb{R}^n$ существует ненулевая вещественно аналитическая функция $f \in V_r(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая условиям*

$$(\partial^\alpha f)(a_k) = 0$$

для всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n \le s$, $k \in \{1, \ldots, q\}$.

Отметим, что в теореме 1 существенно, что в определении класса $V_r(\mathbb{R}^n)$ рассматривается интегрирование по шарам. Можно показать, что аналог теоремы 1, в котором класс функций определяется наличием нулевых интегралов по всем сдвигам фиксированного многогранника в $\mathbb{R}^n$, является неверным. Действительно, всякая такая функция класса $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет некоторому линейному дифференциально-разностному уравнению, связывающему значения функции и ее частных производных в вершинах этого многогранника (см. [5, часть 4, п. 3.2]). Поэтому если взять в качестве узлов интерполяции вершины данного многогранника, то числа $b_{\alpha,k}$ в условии (2) не могут быть заданы произвольно.

Интерполяционные задачи для класса $V_r(\mathbb{R}^n)$ с бесконечным множеством узлов интерполяции в общем случае значительно сложнее, чем для конечного множества. Далее получен ряд достаточных условий, при которых решение существует.

Т е о р е м а 2. *Пусть $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ – последовательность точек в $\mathbb{R}^n$, такая что*

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k\ne\nu}}^{\infty} |a_k - a_\nu|^{\frac{1-n}{2}} < \lambda \tag{3}$$

для всех $\nu \in \mathbb{N}$ *и некоторой константы* λ, *не зависящей от* ν. *Тогда для любой последовательности* $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ *комплексных чисел, удовлетворяющей условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| < +\infty, \tag{4}$$

существует вещественно аналитическая функция $f \in V_r(\mathbb{R}^n)$, *такая что*

$$f(a_k) = b_k$$

при всех $k \in \mathbb{N}$.

Из доказательства теоремы 2 можно получить следующий аналог следствия 1.

Следствие 2. *Пусть последовательность* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ *точек в* $\mathbb{R}^n$ *удовлетворяет условию* (3). *Тогда существует ненулевая вещественно аналитическая функция* $f \in V_r(\mathbb{R}^n)$, *такая что* $f(a_k) = 0$ *при любом* $k \in \mathbb{N}$.

Следствие 2 дает новый пример подмножества в $\mathbb{R}^n$, на котором некоторая ненулевая вещественно аналитическая функция класса $V_r(\mathbb{R}^n)$ обращается в нуль. Такие множества интересны в связи с изучением точных условий в проблеме единственности для класса $V_r(\mathbb{R}^n)$ (см. [5, часть 2, п. 4]).

Доказательство теоремы 2 использует следующую лемму, представляющую самостоятельный интерес.

Пусть H — гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot,\cdot)}$. Для элемента $x \in H$ и непустого множества $E \subset H$ обозначим через $d(x, E)$ расстояние от x до E, т.е.

$$d(x, E) = \inf_{y \in E} \|x - y\|.$$

Лемма. *Пусть* $f_0, f_1, \ldots, f_m \in H$, $\|f_j\| = 1$ *для всех* $j \in \{0, \ldots, m\}$ *и*

$$\sum_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq k}}^{m} |(f_k, f_\nu)| \le \alpha < 1$$

для всех $k \in \{0, \ldots, m\}$ *и некоторого* α, *не зависящего от* k. *Пусть также* L *— линейное подпространство в* H, *порожденное элементами* $f_1, \ldots, f_m$. *Тогда*

$$d(f_0, L) > \sqrt{1 - \alpha^2}.$$

Рассмотрим теперь аналогичные интерполяционные задачи, в которых условие (4) ослабляется, а множество узлов интерполяции удовлетворяет некоторым другим требованиям, в том числе геометрического характера (а именно, содержится в $(n-1)$-мерной гиперплоскости). Введем соответствующие обозначения.

Пусть $r_0 = 0$ и $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ — строго возрастающая последовательность положительных чисел. Далее будем предполагать, что существует $\alpha > 0$, такое что

$$r_k = \alpha k + o\left(\frac{k}{\ln k}\right) \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{5}$$

Кроме того, предположим, что при всех $k \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$r_{k+1} - r_k \ge \exp(-\psi(k)), \tag{6}$$

где ψ — неотрицательная возрастающая функция на $[1, +\infty)$, удовлетворяющая условию

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\psi(k)}{k}\Big(1 + \max_{1\le m\le 2k} |r_m - \alpha m|\Big) = 0.$$

Для $m \in \mathbb{Z}_+$ обозначим

$$A_m = \left\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x| = r_m, x_n = 0\right\}.$$

Теорема 3. *Пусть* $\{a_m\}_{m=0}^{\infty}$ *— последовательность точек в* $\mathbb{R}^n$, *такая что* $a_m \in A_m$ *при всех* $m \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда для любой последовательности* $\{b_m\}_{m=0}^{\infty}$ *комплексных чисел, удовлетворяющей условию*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\ln(1 + |b_m|)}{m} = 0,$$

существует вещественно аналитическая функция $f \in V_r(\mathbb{R}^n)$, *такая что*

$$f(a_m) = b_m \quad \text{для всех} \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Метод доказательства теоремы 3 позволяет получать аналогичные результаты, в которых интерполирующие функции класса $V_r(\mathbb{R}^n)$ имеют дополнительные ограничения роста на бесконечности. При этом на последовательность $\{r_k\}_{k=0}^{\infty}$ накладываются соответствующие требования, которые являются более сильными, чем условия (5) и (6). В качестве одного из примеров рассмотрим следующий аналог теоремы 3, в котором интерполирующая функция класса $V_r(\mathbb{R}^n)$ имеет рост не выше степенного. Вместо условия (5) далее предполагается, что существуют $\alpha, \beta > 0$, такие что

$$|r_k - \alpha k| \le \beta \quad \text{для всех} \quad k \in \mathbb{N},$$

а вместо условия (6) требуется выполнение неравенства

$$r_{k+1} - r_k \ge (k+1)^{-\gamma}$$

для всех $k \in \mathbb{N}$ и некоторого $\gamma > 0$, не зависящего от k.

Теорема 4. *Пусть* $\{a_m\}_{m=0}^{\infty}$ *— последовательность точек в* $\mathbb{R}^n$, *такая что* $a_m \in A_m$ *при всех* $m \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда для любой последовательности* $\{b_m\}_{m=0}^{\infty}$ *комплексных чисел, такой что*

$$|b_m| \le (m+2)^l$$

для всех $m \in \mathbb{Z}_+$ *и некоторого* $l > 0$, *не зависящего от* m, *существует вещественно аналитическая функция* $f \in V_r(\mathbb{R}^n)$, *удовлетворяющая условиям*:

1) $f(a_m) = b_m$ *при любом* $m \in \mathbb{Z}_+$;

2) $|f(x)| \le (2+|x|)^q$ *для всех* $x \in \mathbb{R}^n$ *и некоторого* $q > 0$, *не зависящего от* x.

В заключение отметим, что доказательства теорем 1–4 являются конструктивными. Они позволяют построить функции класса $V_r(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющие требуемым условиям, в виде рядов по специальным функциям, сходящихся локально равномерно в $\mathbb{R}^n$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zalcman L.* // Approximation by Solutions of Partial Differential Equations. 1992. P. 185–194.
2. *Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.* Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces. Basel: Birkhäuser, 2013. 592 p.
3. *Беренстейн К.А., Струппа Д.* // Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундамент. направления. Т. 54. М.: ВИНИТИ, 1989. С. 5–111.
4. *Zalcman L.* // Contemp. Math. 2001. V. 278. P. 69–74.
5. *Volchkov V.V.* Integral geometry and convolution equations. Dordrecht: Kluwer, 2003. 454 p.
6. *Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.* Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group. L.: Springer, 2009. 671 p.
7. *Йон Ф.* Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. М.: ИЛ, 1958. 158 с.
8. *Smith J.D.* // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1972. V. 72. P. 403–416.
9. *Rawat R., Sitaram A.* // Israel J. Math. 1995. № 91. P. 307–316.
10. *Thangavelu S.* // J. Anal. Math. 1994. V. 63. P. 225–286.
11. *Евграфов М.А.* Асимптотические оценки и целые функции. М.: Физматгиз, 1962. 320 с.
12. *Schneider R.* // J. Math. Anal. Appl. 1969. V. 26. P. 381–384.
13. *Волчков В.В.* // Матем. сборник. 1997. Т. 188. № 9. С. 13–30.
14. *Волчков Вит.В., Волчкова Н.П.* // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58. № 3. С. 543–552.
15. *Berkani M., El Harchaoui, Gay R.* // Complex Variables. 2000. V. 43. P. 29–57.

INTERPOLATION PROBLEMS FOR FUNCTIONS WITH ZERO INTEGRALS OVER BALLS OF FIXED RADIUS

V. V. Volchkov[1] and Vit. V. Volchkov[1]

[1] *Donetsk National University, Donetsk, Ukraine*

Presented by Academician of the RAS S.V. Konyagin September 25, 2019

Received September 25, 2019

Let $V_r(\mathbb{R}^n)$, $n \ge 2$, be the set of functions $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ with zero integrals over all balls in $\mathbb{R}^n$ of radius r. Various interpolation problems for the class $V_r(\mathbb{R}^n)$ are studied. In the case when the set of interpolation nodes is finite we solve the multiple interpolation problem under general conditions. For the problems with infinite set of nodes some sufficient conditions of solvability are founded. Also we construct a new example of subset in $\mathbb{R}^n$ for which some nontrivial real analytic function of the class $V_r(\mathbb{R}^n)$ vanishes.

Keywords: interpolation problems, spherical means, mean periodicity