

УДК 517.958:621.372.8

О СУЩЕСТВОВАНИИ БЕСКОНЕЧНОГО МНОЖЕСТВА ВЫТЕКАЮЩИХ КОМПЛЕКСНЫХ ВОЛН В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ СЛОЕ

© 2020 г. Ю. Г. Смирнов^{1,2}, Е. Ю. Смолькин^{1,2,*}

Представлено академиком Е.Е. Тыртышниковым 24.10.2019 г.

Поступило 24.10.2019 г.

После доработки 24.10.2019 г.

Принято к публикации 07.11.2019 г.

Рассматривается задача распространения ТЕ-поляризованных электромагнитных волн в диэлектрическом слое. Проведена классификация волн, существующих в исследуемой структуре. Строго доказано, что в диэлектрическом слое нет поверхностных комплексных ТЕ-волн и бесконечно много комплексных вытекающих ТЕ-волн.

Ключевые слова: электромагнитные волны, диэлектрический слой, бесконечный спектр

DOI: 10.31857/S2686954320010208

Анализ спектра вещественных и комплексных волн в открытых волноведущих структурах менее развит по сравнению с теорией экранированных волноводов, которая входит во многие учебники и монографии по электромагнетизму. Диэлектрический слой (ДС) является одной из наиболее хорошо изученных волноведущих структур в электродинамике [1–6]. Фактически ДС является самым простым волноводом (с геометрической точки зрения), и его дисперсионное уравнение (ДУ) можно записать в явном виде. С другой стороны, такая структура широко используется на практике (плоские оптические волноводы — линзы). Однако до сих пор нет точных доказательств наличия (или отсутствия) бесконечного числа вещественных или комплексных собственных волн, распространяющихся в ДС.

Актуальной задачей при изучении волноводов является классификация волн, существующих в структуре. В сообщении доказано, что в ДС нет поверхностных комплексных ТЕ-волн и бесконечно много комплексных вытекающих ТЕ-волн.

Рассмотрим трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$ с декартовой системой координат $Oxuz$. Пространство заполнено изотропной средой без источников с диэлектрической проницаемостью $\epsilon_1 \equiv \text{const}$, $\epsilon_1 > 0$. Рассматриваются электромагнитные волны, рас-

пространяющиеся через диэлектрический слой, расположенный между двумя полупространствами $x < -h$ и $x > h$. Волновод заполнен однородным материалом с диэлектрической проницаемостью $\epsilon_2 > \epsilon_1$. Среда предполагается изотропной и немагнитной.

Задача о нормальных ТЕ-поляризованных волнах ДС состоит в отыскании нетривиальных решений однородной системы уравнений Максвелла в виде бегущей волны, т.е. с зависимостью $e^{i\gamma z}$ от координаты z , вдоль которой структура регулярна. Поле поляризованной волны может быть представлено при помощи скалярной функции $u := E_y(x)$ (поля не зависят от y).

Имеем следующую задачу на собственные значения для касательной составляющей u [1–6]: найти $\gamma \in \mathbb{C}$ такие, что существуют нетривиальные решения дифференциального уравнения

$$u'' + (\tilde{\epsilon} - \gamma^2)u = 0, \quad (1)$$

где

$$\tilde{\epsilon} = \begin{cases} \epsilon_1, & x < -h \text{ и } x > h, \\ \epsilon_2, & -h \leq x \leq h, \end{cases} \quad (2)$$

причем должны быть удовлетворены следующие условия: ограниченность энергии поля в любом конечном объеме волновода, непрерывность касательных составляющих полей на границе раздела сред $x = -h$ и $x = h$

$$\begin{aligned} [u]_{x=-h} &= 0, & [u']_{x=-h} &= 0, \\ [u]_{x=h} &= 0, & [u']_{x=h} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

и условие на бесконечности.

¹Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

²Научно-технологический университет «Сириус», Сочи, Россия

*E-mail: e.g.smolkin@hotmail.com

Принята следующая классификация волн [1–6]. По параметру γ -постоянной распространения:

- 1) распространяющаяся волна характеризуется параметром γ таким, что $\text{Im } \gamma = 0$;
- 2) затухающая волна характеризуется параметром γ таким, что $\text{Re } \gamma = 0$;
- 3) комплексная волна характеризуется параметром γ таким, что $\text{Re } \gamma \text{Im } \gamma \neq 0$.

По условию на бесконечности:

- 1) поверхностная волна удовлетворяет условию: $u(x) \rightarrow 0, |x| \rightarrow \infty$;
- 2) вытекающая волна удовлетворяет условию: $u(x) \rightarrow \infty, |x| \rightarrow \infty$.

По симметрии поля:

- 1) четная волна удовлетворяет условию:

$$u(-x) = u(x);$$

- 2) нечетная волна удовлетворяет условию:

$$u(-x) = -u(x).$$

Решение уравнения (1) при $-h < x < h$ имеет вид $u(x; \lambda) = \sin \lambda x$ для нечетных волн и $u(x; \lambda) = \cos \lambda x$ для четных волн, где $\lambda^2 = \epsilon_2 - \gamma^2$ и λ – новый (комплексный) спектральный параметр.

При $x < -h$ и $x > h$ имеем для нечетных волн

$$\begin{aligned} u(x; \lambda) &= -\sin \lambda h e^{(x+h)\sqrt{\epsilon^2 - \lambda^2}}, & x < -h, \\ u(x; \lambda) &= \sin \lambda h e^{-(x-h)\sqrt{\epsilon^2 - \lambda^2}}, & x > h, \end{aligned}$$

и для четных волн

$$\begin{aligned} u(x; \lambda) &= \cos \lambda h e^{(x+h)\sqrt{\epsilon^2 - \lambda^2}}, & x < -h, \\ u(x; \lambda) &= \cos \lambda h e^{-(x-h)\sqrt{\epsilon^2 - \lambda^2}}, & x > h, \end{aligned}$$

где $\epsilon^2 = \epsilon_2 - \epsilon_1 > 0$. В приведенных решениях квадратный корень $\sqrt{\epsilon^2 - \lambda^2}$ – это двузначная комплексная функция.

Дисперсионные уравнения имеют вид [1–6]: для нечетных волн

$$\text{tg } \lambda h + \frac{\lambda}{\sqrt{\epsilon^2 - \lambda^2}} = 0 \quad (4)$$

и для четных

$$\text{ctg } \lambda h - \frac{\lambda}{\sqrt{\epsilon^2 - \lambda^2}} = 0. \quad (5)$$

Поверхностные волны. Для поверхностных волн имеем

$$\text{Re } \sqrt{\epsilon^2 - \lambda^2} > 0 \quad (6)$$

в силу условий на бесконечности.

Распространяющиеся поверхностные волны.

Утверждение 1. Пусть $\lambda = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, и выполнено (6). Если $m - \frac{1}{2} < \frac{\epsilon h}{\pi} \leq m + \frac{1}{2}$, то существуют $m \geq 1$ ненулевых положительных (и m ненулевых отрицательных) корней уравнения (4). Если $0 < \frac{\epsilon h}{\pi} \leq \frac{1}{2}$, то уравнение (4) не имеет корней.

Утверждение 2. Пусть $\lambda = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, и выполнено (6). Если $m - 1 < \frac{\epsilon h}{\pi} \leq m$, то существуют $m \geq 1$ ненулевых положительных (и m ненулевых отрицательных) корней уравнения (5).

Затухающие поверхностные волны.

Утверждение 3. Пусть $\lambda = i\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, и выполнено (6). Тогда уравнения (4) и (5) не имеют ненулевых решений.

Комплексные поверхностные нечетные волны. Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Перепишем уравнение (4)

$$\text{tg } \lambda h = -\frac{\lambda}{\sqrt{\epsilon^2 - \lambda^2}}. \quad (7)$$

Взяв квадраты от правой и левой частей в (7), получим $\sin^2 \lambda h = \frac{\lambda^2}{\epsilon^2}$, следовательно,

$$(\epsilon \sin \lambda h - \lambda) = 0 \quad \text{или} \quad (\epsilon \sin \lambda h + \lambda) = 0. \quad (8)$$

Предположим, что первое уравнение (8) имеет решение $\lambda_m = \alpha_m + i\beta_m$. Тогда $\sin \lambda_m h = \frac{\lambda_m}{\epsilon}$ и из (7) по-

лучаем $\text{Re } \sqrt{\epsilon^2 - \lambda_m^2} = -\text{Re } \lambda_m \text{ctg } \lambda_m h = -\epsilon \text{Re } \cos \lambda_m h = -\epsilon \cos \alpha_m h \text{ch } \beta_m h > 0$, следовательно $\cos \alpha_m h < 0$.

С другой стороны, $\text{Im } \sin \lambda_m h = \text{Im } \frac{\lambda_m}{\epsilon}$, следовательно, $\cos \alpha_m h = \beta_m \epsilon^{-1} \text{sh}^{-1} \beta_m h > 0$. Получаем противоречие, позволяющее сделать вывод, что первое уравнение (8) не имеет решения λ_m , удовлетворяющего условию $\text{Re } \sqrt{\epsilon^2 - \lambda_m^2} > 0$.

Повторяя приведенные выше рассуждения для второго уравнения (8), получаем тот же вывод. Таким образом, справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда уравнение (4) при условии (6) не имеет решений.

Комплексные поверхностные четные волны. Повторяя приведенные выше рас-

суждения для уравнения (5), получаем, что справедлива следующая

Теорема 2. Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда уравнение (5) при условии (6) не имеет решений.

Замечание 1. Таким образом, мы показали, что нет комплексных поверхностных четных и нечетных ТЕ-поляризованных волн, нет затухающих поверхностных четных и нечетных ТЕ-поляризованных волн, существует конечное число распространяющихся поверхностных четных и нечетных ТЕ-поляризованных волн, удовлетворяющих условию (6).

Вытекающие волны. Для вытекающих волн имеем

$$\operatorname{Re} \sqrt{\epsilon^2 - \lambda^2} < 0 \quad (9)$$

в силу условий на бесконечности. Это условие определяет вытекающие волны.

Распространяющиеся вытекающие волны.

Утверждение 4. Пусть $\lambda = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, и выполнено (9). Пусть $z_0^{(j)}$ j -й положительный корень уравнения $\operatorname{tg} z = z$ такой, что $z_0^{(j)} < z_0^{(j+1)}$, $j = 1, 2, \dots$, и $b_0^{(j)} = \sqrt{(z_0^{(j)})^2 + 1}$. Уравнение (4) не имеет решений при $0 < \epsilon h \leq 1$ и $\frac{\pi}{2} \leq \epsilon h < b_0^{(1)}$. Если $\epsilon h = b_0^{(n)}$, то существует $n \geq 1$ ненулевых положительных (и n ненулевых отрицательных) корней уравнения (4). Если $b_0^{(n)} < \epsilon h < \frac{\pi(2n+1)}{2}$, то существует $n+1$, $n \geq 1$ ненулевых положительных (и $n+1$ ненулевых отрицательных) корней уравнения (4). Если $\frac{\pi(2n+1)}{2} \leq \epsilon h < b_0^{(n+1)}$, то существует $n \geq 1$ ненулевых положительных (и n ненулевых отрицательных) корней уравнения (4).

Утверждение 5. Пусть $\lambda = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ и выполнено (9). Пусть $z_0^{(j)}$ j -й положительный корень уравнения $\operatorname{ctg} z = z$ такой, что $z_0^{(j)} < z_0^{(j+1)}$, $j = 1, 2, \dots$ и $b_0^{(j)} = \sqrt{(z_0^{(j)})^2 + 1}$. Уравнение (5) не имеет решений при $0 < \epsilon h < b_0^{(1)}$. Если $\epsilon h = b_0^{(n)}$, то существует $n \geq 1$ ненулевых положительных (и n ненулевых отрицательных) корней уравнения (5). Если $b_0^{(n)} < \epsilon h < \pi$, то существует $n+1$, $n \geq 1$ ненулевых положительных (и $n+1$ ненулевых отрицательных) корней уравнения (5). Если $\pi \leq \epsilon h < b_0^{(n+1)}$, то существует $n \geq 1$ ненулевых положительных (и n ненулевых отрицательных) корней уравнения (5).

Затухающие вытекающие волны.

Утверждение 6. Пусть $\lambda = i\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, и выполнено (9). Тогда уравнение (4) имеет два ненулевых решения, если $\epsilon h < 1$. Если $\epsilon h \geq 1$, то уравнение (4) не имеет ненулевых решений.

Утверждение 7. Пусть $\lambda = i\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, и выполнено (9). Тогда уравнение (5) не имеет ненулевых решений.

Комплексные вытекающие нечетные волны. Введем в рассмотрение следующую функцию: $f(z) := z \sin(z^{-1})$, где $z = \lambda^{-1} h^{-1}$. Функция $f(z)$ имеет изолированную существенно особую точку $z = 0$. Пусть $a := \epsilon h > 0$; рассмотрим уравнения $f(z) = a^{-1}$ и $f(z) = -a^{-1}$. Из теоремы Пикара (см. [7]) следует, что одно из этих уравнений имеет бесконечно много корней z_k ($z_k \neq 0$), $z_k \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$ в окрестности $z = 0$. Действительно, по теореме Пикара, может существовать только одно исключительное значение A такое, что уравнение $f(z) = A$ не будет иметь бесконечного числа корней.

Рассмотрим первое уравнение $\sin(z^{-1}) = a^{-1} z^{-1}$. Тогда

$$\cos(z^{-1}) = \pm \sqrt{1 - \sin^2(z^{-1})} = \pm \sqrt{1 - a^{-2} z^{-2}}. \quad (10)$$

Взяв вещественную часть $\cos(z^{-1})$, мы получим $\operatorname{Re} \cos(z^{-1}) = \cos(z' |z|^{-2}) \operatorname{ch}(z'' |z|^{-2})$, $z = z' + iz''$ ($z'' \neq 0$ поскольку нет вещественных решений уравнения $z \sin(z^{-1}) = a^{-1}$ при $|z| < a^{-1}$). Так как $\operatorname{ch}(z'' |z|^{-2}) > 0$, получаем $\operatorname{sign} \operatorname{Re} \cos(z^{-1}) = \operatorname{sign} \cos(z' |z|^{-2})$. С другой стороны, взяв мнимую часть от выражения $\sin(z^{-1})$, получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \sin(z^{-1}) &= \cos(z' |z|^{-2}) \operatorname{sh}(-z'' |z|^{-2}) = \\ &= -z'' a^{-1} |z|^{-2} \Rightarrow \cos(z' |z|^{-2}) = \frac{z''}{a |z|^2 \operatorname{sh}(z'' |z|^{-2})} > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $\operatorname{sign} \operatorname{Re} \cos(z^{-1}) > 0$. В соответствии с условием (9) мы получаем

$$\operatorname{Re} \sqrt{\epsilon^2 - \lambda^2} = \epsilon h \operatorname{Re} \sqrt{1 - a^{-2} z^{-2}} < 0,$$

т.е. мы должны выбрать знак корня в формуле (10) следующим образом: $\cos(z^{-1}) = -\sqrt{1 - a^{-2} z^{-2}}$ для того, что бы выполнить условие $\operatorname{sign} \operatorname{Re} \cos(z^{-1}) > 0$.

Пусть z_k — корень уравнения $f(z) = a^{-1}$; тогда $\sin(z_k^{-1}) = a^{-1} z_k^{-1}$, $\cos(z_k^{-1}) = -\sqrt{1 - a^{-2} z_k^{-2}}$. Далее

$$\operatorname{tg}(z_k^{-1}) + \frac{a^{-1} z_k^{-1}}{\sqrt{1 - a^{-2} z_k^{-2}}} = 0. \quad (11)$$

Таблица 1. Существование ТЕ-волн в диэлектрическом слое

Тип волн	Распространяющиеся	Затухающие	Комплексные
Поверхностные (четные и нечетные)	Конечное число	Нет	Нет
Вытекающие (четные и нечетные)	Конечное число	2 четных или нет	Бесконечное множество

Таким образом получаем, что уравнение

$$\operatorname{tg} \lambda_k h + \frac{\lambda_k h}{\sqrt{\epsilon^2 h^{-2} - \lambda_k^2 h^2}} = 0$$

имеет решение $\lambda_k = z_k^{-1} h^{-1}$.

Аналогично рассматривая уравнение $f(z) = -a^{-1}$, приходим к такому же выводу.

Поскольку одно из уравнений $f(z) = a^{-1}$ или $f(z) = -a^{-1}$ имеет бесконечно много корней в окрестности $z = 0$, получаем, что уравнение (4) также имеет бесконечное число корней, которые стремятся к бесконечности при условии (9).

Теорема 3. Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда уравнение (4) при условии (9) имеет бесконечно много корней, которые стремятся к бесконечности.

Комплексные вытекающие четные волны. Повторяя приведенные в предыдущем пункте рассуждения для уравнения (5), получаем, что справедлива следующая

Теорема 4. Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда уравнение (5) при условии (9) имеет бесконечно много корней, которые стремятся к бесконечности.

Замечание 2. Таким образом, мы показали, что существует бесконечное число комплексных вытекающих четных и нечетных ТЕ-поляризованных волн, существует не более конечного числа распространяющихся вытекающих четных и нечетных ТЕ-поляризованных волн, не существует затухающих вытекающих четных и нечет-

ных (или существует пара нечетных) ТЕ-поляризованных волн, удовлетворяющих условию (9).

Следующая таблица 1 объединяет все результаты, представленные в данной работе, и отвечает на вопрос, какие волны существуют в диэлектрическом слое.

Бликие результаты о существовании бесконечного множества вытекающих волн для цилиндрической структуры (линии Губо) получены в [8].

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-51004.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адамс М. Введение в теорию оптических волноводов. М.: Мир, 1984.
2. Снайдер А., Лав Дж. Теория оптических волноводов. М.: Радио и связь, 1987.
3. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988.
4. Маркузе Д. Оптические волноводы. М.: Мир, 1974.
5. Collin R.E. Field Theory of Guided Waves. Wiley-IEEE Press, 1990.
6. Felsen L.B., Marcuvitz N. Radiation and Scattering of Waves, Wiley-IEEE Press, 1994.
7. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1964.
8. Смирнов Ю.Г., Смолькин Е.Ю. О существовании бесконечного спектра затухающих вытекающих ТЕ-поляризованных волн открытого неоднородного цилиндрического металло-диэлектрического волновода // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 9. С. 1171–1178.

ON THE EXISTENCE OF AN INFINITE NUMBER OF LEAKY COMPLEX WAVES IN A DIELECTRIC LAYER

Yu. G. Smirnov^{1,2} and E. Yu. Smolkin^{1,2}

¹Penza State University, Penza, Russian Federation

²Sirius University of Science and Technology, Sochi, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS E.E. Tyrtshnikov October 24, 2019

Received October 24, 2019

The problem of propagation of TE-polarized electromagnetic waves in a dielectric layer is considered. The waves existing in the structure under study are classified. It is strictly proved in the article that in the dielectric layer there are no surface complex TE waves and infinitely many complex leaky TE waves.

Keywords: electromagnetic waves, dielectric layer, infinite spectrum