ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 490, с. 85–90

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.9+519.7

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ВНУТРЕННЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ФОРМАЦИЙ

 А. В. Лакеев*

Представлено академиком РАН С.Н. Васильевым 20.11.2019 г.
Поступило 21.11.2019 г.
После доработки 21.11.2019 г.
Принято к публикации 22.11.2019 г.

Получены необходимые и достаточные условия внутренней устойчивости формаций, динамика которых определяется линейными дифференциальными уравнениями. При этом в качестве классов допустимых управлений для лидеров выбраны программные управления, а для объектов, имеющих ведущих – аффинные обратные связи, зависящие от состояния самого объекта и состояний его ведущих. Полученные условия легко проверяемы и состоят из требований стабилизируемости пары матриц для уравнений ведомых объектов, гурвицевости и совпадения матриц для лидеров в случае многолидерности, разрешимости некоторых линейных уравнений и ограничений типа равенств на вектора, задающие требуемое взаимное расположение между ведомым и ведущим. Кроме того, описан весь класс управлений, обеспечивающих выполнение свойства линейной внутренней устойчивости. Опираясь на полученные условия, удалось показать, что внутренней устойчивостью могут обладать практически только однолидерные формации. В классе формаций с одним лидером выделен подкласс (формации граф которых является входящим деревом), в котором не возникает ограничений типа равенств, являющихся основным препятствием для внутренней устойчивости многолидерных формаций.

Ключевые слова: формация, устойчивость по входу-состоянию, ориентированный бесконтурный граф, гурвицева матрица, стабилизируемость

DOI: 10.31857/S2686954320010178

1. Введение. Понятие внутренней устойчивости формаций нескольких управляемых движущихся объектов возникло при изучении задачи управления группой автономных роботов [1]. Под формацией понимается конечное множество взаимосвязанных движущихся объектов, связи между которыми (типа “ведущий–ведомый”) задаются некоторым ориентированным бесконтурным графом. Каждой паре связанных объектов сопоставляется некоторый вектор, определяющий их требуемое (в идеале) взаимное расположение, которое реально может быть выдержано только с некоторой точностью. Изучается задача существования управлений, обеспечивающих малые отклонения формации от желаемого идеального состояния при малом начальном отклонении и малых возмущающих внешних воздействиях. Это свойство, названное внутренней устойчивостью формаций, видимо, впервые появилось в работах Г.Дж. Таннера, Дж.Дж. Паппаса и В. Кумара (H.G. Tanner, G.J. Pappas, V. Kumar) (2002) [2–5] (см. также [6, 7]).

В этих работах за оценку малости отклонения была выбрана концепция “устойчивости от входа к состоянию” (input to state stability). Данное понятие впервые появилось в работах Э.Д. Сонтага (E.D. Sontag) (1989) [8, 9] и активно исследовалось в работах многих авторов, при этом в основном использовался метод функций Ляпунова. Некоторые итоги этих более чем 20-летних исследований содержатся в обзоре [10].

Отметим, что имеются и различные другие подходы к исследованию поведения формаций. Например, в работах [11–13] также на основе метода функций Ляпунова изучается свойство типа диссипативности.

Однако практически во всех работах при исследовании внутренней устойчивости формаций вопрос существования управлений, обеспечивающих свойство внутренней устойчивости формации, в явном виде не ставился.

В данной работе мы будем рассматривать только формации, у которых динамика каждого объекта описывается линейным дифференциальным

Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск, Россия
**E-mail: lakeyev@icc.ru*

уравнением и управления ищутся в классе аффинных обратных связей.

2. Основные понятия и определения. Перейдем к точным формулировкам. Следующие определения взяты из работ [2–5].

Определение 1. Будем говорить, что задана формация из l взаимосвязанных объектов, если:

1) задан ориентированный бесконтурный граф $G = (V, E)$ без кратных ребер и петель с множеством вершин $V = \{1, 2, \ldots, l\}$ и множеством ребер $E \subseteq V \times V$, называемый в дальнейшем графом формаций. При этом вершины графа отождествляются с движущимися объектами формации, а ребра указывают на наличие взаимосвязей между некоторыми из них. Если $(i, j) \in E$, то i-й объект называется ведомым, а j-й объект – ведущим (ребро $(i, j) \in E$ считаем ориентированным от i к j);

2) динамика движения i-го объекта задается дифференциальным уравнением с управлением

$$\begin{aligned} &\dot{\mathrm{x}}_i = f_i(t, \mathrm{x}_i, \mathrm{u}_i), \quad \mathrm{x}_i \in R^n, \\ &\mathrm{u}_i \in R^m, \quad t \in R_0^1 = [0, +\infty); \end{aligned} \tag{1}$$

3) каждому ребру $(i, j) \in E$ сопоставлен вектор $d_{ij} \in R^n$, задающий требуемое взаимное расположение (в идеале) i-го и j-го объектов относительно друг друга, при этом в идеале хотелось бы иметь соотношение $\mathrm{x}_i + d_{ij} = \mathrm{x}_j$;

4) если динамика движения всех объектов задается линейным дифференциальным уравнением с управлением, т.е. $\dot{\mathrm{x}}_i = A_i\mathrm{x}_i + B_i\mathrm{u}_i$, где $A_i \in R^{n\times n}$ и $B_i \in R^{n\times m}$ – матрицы соответствующих размерностей, то формацию будем называть линейной.

Будем обозначать $L_i = \{j \in V \mid (i, j) \in E\} = \{j_{i1}, \ldots, j_{is_i}\}$ – множество ведущих для i-го объекта. Обозначим также $V_0 = \{i \in V \mid L_i = \phi\}$ – множество лидеров формации.

Если $(i, j) \in E$, то обозначим $\mathrm{z}_{i,j} = \mathrm{x}_i + d_{ij} - \mathrm{x}_j$ – отклонение (ошибку) от идеального состояния между i-м и j-м объектами и $\mathrm{z} = (\mathrm{z}_{i,j})$ – $(l \times l)$-матрица ошибок,

$$\mathrm{z}_{i,j} = \begin{cases} \mathrm{x}_i + d_{ij} - \mathrm{x}_j, & \text{если} \quad (i, j) \in E, \\ \mathbf{0}, & \text{если} \quad (i, j) \notin E. \end{cases}$$

Для оценки величины отклонений используем стандартные классы функций [14]:

1) $\mathcal{K}$ – класс функций Хана: $\gamma \in \mathcal{K}$, если $\gamma : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ непрерывная, строго возрастающая, $\gamma(0) = 0$;

2) функции класса $\mathcal{KL}$: $\beta \in \mathcal{KL}$, если $\beta : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $\beta(\cdot, t) \in \mathcal{K}$ при фиксированном t, $\lim\limits_{t\to\infty} \beta(a, t) = 0$, при фиксированном $a \in [0, +\infty)$, $\beta(a, t)$ непрерывна по (a, t).

Пусть для каждого $i \in V$ задан класс допустимых управлений $\mathcal{U}_i$ для i-го объекта.

Определение 2. Формация называется внутренне устойчивой, если существуют функции $\gamma_i \in \mathcal{K}$, $i \in V_0$ и функция $\beta \in \mathcal{KL}$ такие, что для любых допустимых управлений $u_i \in \mathcal{U}_i$, $i \in V_0$, найдутся управления $u_j \in \mathcal{U}_j$, $j \in V \backslash V_0$ такие, что при любых начальных значениях $\mathrm{x}_{0i} \in R^n$, $i = 1, 2, \ldots, l$ и любых $t \geq 0$ выполняется оценка

$$\|z(t)\| \leq \beta(\|z(0)\|, t) + \sum_{i\in V_0} \gamma_i(\sup_{\tau\in[0,t]} \|u_i\|), \tag{2}$$

где $z(t)$ – матрица ошибок, полученная на решениях уравнений (1) при заданных управлениях $u_i \in \mathcal{U}_i$ и заданных начальных значениях $x_i(0) = \mathrm{x}_{0i} \in R^n$, $i = 1, 2, \ldots, l$.

Здесь и всюду в дальнейшем нормы векторов и матриц считаются евклидовыми.

Для линейных формаций будем рассматривать следующие классы допустимых управлений:

1) если $i \in V_0$, то $\mathcal{U}_i = \mathcal{U}_i^{pr} = \{u_i \mid u_i: R_0^1 \to R^m$, u_i – непрерывно$\}$;

2) если $i \in V \backslash V_0$ и $L_i = \{j_{i1}, \ldots, j_{is_i}\}$, то $\mathcal{U}_i = \mathcal{U}_i^{aff} = \{u_i \mid u_i: R^{n(s_i+1)} \to R^m\}$,

$$\begin{aligned} &u_i(\mathrm{x}_i, \mathrm{x}_{j_{i1}}, \ldots, \mathrm{x}_{j_{is_i}}) = \\ &= S_i\mathrm{x}_i + \sum_{r=1}^{s_i} K_{ij_{ir}}\mathrm{x}_{j_{ir}} + k_i = S_i\mathrm{x}_i + \sum_{j\in L_i} K_{ij}\mathrm{x}_j + k_i, \end{aligned}$$

где $S_i, K_{ij} \in R^{m\times n}$, $k_i \in R^m$.

Определение 3. Линейную формацию будем называть линейно внутренне устойчивой (ЛВУ), если свойство из определения 2 выполняется при $\mathcal{U}_i = \mathcal{U}_i^{pr}$ для $i \in V_0$, и при $\mathcal{U}_i = \mathcal{U}_i^{aff}$ для $i \in V \backslash V_0$.

В кванторном виде это свойство более кратко можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} &(\text{ЛВУ}) \equiv (\exists \gamma_i \in \mathcal{K}:\ i \in V_0)(\exists \beta \in \mathcal{KL}) \times \\ &\times (\forall u_i \in \mathcal{U}_i^{pr}:\ i \in V_0)(\exists u_j \in \mathcal{U}_j^{aff}: j \in V \backslash V_0) \\ &(\forall \mathrm{x}_{0i} \in R^n:\ i \in V)(\forall t \geq 0)(\|z(t)\| \leq \beta(\|z(0)\|, t) + \\ &+ \sum_{i\in L_0} \gamma_i(\sup_{\tau\in[0,t]} \|u_i(\tau)\|)). \end{aligned}$$

Будем рассматривать еще два свойства линейных формаций:

$(\text{ЛВУ})_1$ – получается из (ЛВУ) перестановкой кванторов $(\forall u_i \in \mathcal{U}_i^{pr}\colon\ i \in V_0)$ и $(\exists u_j \in \mathcal{U}_j^{aff}\colon j \in V \backslash V_0)$ или в кванторном виде:

$$(\text{ЛВУ})_1 \equiv (\exists \gamma_i \in \mathcal{K}\colon i \in V_0)(\exists \beta \in \mathcal{KL}) \times \\ \times (\exists u_j \in \mathcal{U}_j^{aff}\colon j \in V \backslash V_0)(\forall u_i \in \mathcal{U}_i^{pr}\colon i \in V_0) \\ (\forall \mathrm{x}_{0i} \in R^n\colon i \in V)(\forall t \geq 0)\|z(t)\| \leq \beta(\|z(0)\|, t) + \\ + \sum_{i \in V_0} \gamma_i (\sup_{\tau \in [0,t]} \|u_i(\tau)\|);$$

$(\text{ЛВУ})_0$ – получается из (ЛВУ) при нулевых управлениях лидеров, т.е. $u_i(t) \equiv \mathbf{0}$ для всех $i \in V_0$ (при этом в неравенстве (2) второе слагаемое тождественно равно нулю), или в кванторном виде:

$$(\text{ЛВУ})_0 \equiv (\exists \beta \in \mathcal{KL})(\exists u_j \in \mathcal{U}_j^{aff}\colon j \in V \backslash V_0) \times \\ \times (\forall u_i \equiv \mathbf{0}\colon i \in V_0) \\ (\forall \mathrm{x}_{0i} \in R^n\colon i \in V)(\forall t \geq 0)\|z^0(t)\| \leq \beta(\|z^0(0)\|, t),$$

где $z^0(t)$ – матрица ошибок, полученная на решениях уравнений (1) при заданных управлениях $u_j \in \mathcal{U}_j^{aff}$ для $j \in V \backslash V_0$, $u_i(t) \equiv \mathbf{0}$ для $i \in V_0$ и заданных начальных значениях $x_i(0) = \mathrm{x}_{0i} \in R^n$, $i = 1, 2, \ldots, l$.

Очевидно, что

$$(\text{ЛВУ})_1 \Rightarrow (\text{ЛВУ}) \Rightarrow (\text{ЛВУ})_0.$$

Рассмотрим более подробно граф формации, при этом будем придерживаться терминологии из [15, глава 16].

Во-первых, нетрудно показать, что внутренняя устойчивость формации эквивалентна внутренней устойчивости всех подформаций, определяемых компонентами слабой связности графа G. Поэтому в дальнейшем без ограничения общности будем считать, что граф G – слабо связный.

Во-вторых, хорошо известно, что ориентированный граф $G = (V, E)$ является бесконтурным тогда и только тогда, когда он допускает перенумерацию вершин с нижней строго треугольной матрицей смежности [15, с. 235, теорема 16.3]. Поэтому с точностью до перенумерации вершин можно считать, что $L_i \subseteq \{1, 2, \ldots, i-1\}$. В частности всегда $L_1 = \phi$, т.е. $1 \in V_0$. Также будем считать, что $V_0 = \{1, 2, \ldots, l_0\}$.

В дальнейшем нам также понадобится функция $p: V \to V$, выбирающая для каждого $i > l_0$ одного из его ведущих. Для определенности будем считать, что это ведущий с наибольшим номером, а если $i \leq l_0$, то $p(i) = i$, т.е.

$$p(i) = \begin{cases} i, & \text{если} \quad i \leq l_0, \\ \max\{j \mid j \in L_i\}, & \text{если} \quad i > l_0. \end{cases}$$

Используя эту функцию, определим рекуррентным образом следующие вектора $D_i \in R^n$, которые также понадобятся нам в дальнейшем:

$$D_i = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{если} \quad i \leq l_0, \\ d_{ip(i)} + D_{p(i)}, & \text{если} \quad i > l_0. \end{cases}$$

3. Необходимые условия для свойства $(\text{ЛВУ})_0$.

Путь для формации выполняется свойство $(\text{ЛВУ})_0$. Выберем и зафиксируем до конца данного раздела функцию $\beta \in \mathcal{KL}$ и управления для объектов с номерами из $V \backslash V_0$, обеспечивающих это свойство, т.е. матрицы $S_i \in R^{m \times n}$, наборы матриц $\{K_{ij}\}_{j \in L_i}$, $K_{ij} \in R^{m \times n}$, и векторы $k_i \in R^m$ такие, что если обозначить $x_i^0(t, \mathrm{x}_{10}, \ldots, \mathrm{x}_{i0})$ – решения задачи Коши для следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered} \dot{\mathrm{x}}_i = A_i \mathrm{x}_i, \quad \text{если} \quad i = 1, 2, \ldots, l_0, \\ \dot{\mathrm{x}}_i = (A_i + B_i S_i)\mathrm{x}_i + \\ + B_i \left(\sum_{j \in L_i} K_{ij} \mathrm{x}_j + k_i \right), \quad \text{если} \quad i > l_0, \end{gathered} \tag{3}$$

с начальными условиями $x_i^0(0, \mathrm{x}_{10}, \ldots, \mathrm{x}_{i0}) = \mathrm{x}_{i0}$, $i = 1, 2, \ldots, l$, и, соответственно, ошибки $z_{i,j}^0(t) = z_{i,j}^0(t, \mathrm{x}_{10}, \ldots, \mathrm{x}_{i0}) = x_i^0(t, \mathrm{x}_{10}, \ldots, \mathrm{x}_{i0}) - x_j^0(t, \mathrm{x}_{10}, \ldots, \mathrm{x}_{j0}) + d_{ij}$, при $(i, j) \in E$, то для всех $t \geq 0$ выполняется оценка

$$\|z^0(t)\| \leq \beta(\|z^0(0)\|, t). \tag{4}$$

Из неравенства (4) получаем следующее

Необходимое условие 1. $\lim\limits_{t \to \infty} z_{i,j}^0(t) = 0$ при любых $x_i(0) = \mathrm{x}_{i0} \in R^n$, $i = 1, 2, \ldots, l$.

Рассмотрим теперь поведение решений системы (3) при нулевых начальных условиях. Обозначим эти решения $\tilde{x}_i^0(t) = x_i^0(t, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0})$. Так как очевидно, что $\tilde{x}_i^0(t) \equiv \mathbf{0}$ при $i = 1, 2, \ldots, l_0$, то индукцией по i из необходимого условия 1 получаем следующее.

Предложение 1. *Для всех $i = 1, 2, \ldots, l$ существует конечный предел $\lim\limits_{t \to \infty} \tilde{x}_l^0(t) = -D_i$, а если $j \in L_i$, то $\lim\limits_{t \to \infty} \tilde{x}_i^0(t) = -(d_{ij} + D_j)$ и, следовательно, $d_{ij} = D_i - D_j$.*

Замечание 1. Отметим, что из этого предложения получаем жесткое ограничение на d_{ij} в случае $|L_i| > 1$. Если же $|L_i| = 1$, то $L_i = \{p(i)\}$ и равенство $d_{ip(i)} = D_i - D_{p(i)}$ выполняется по определению D_i.

Получим теперь еще одно необходимое условие для того, чтобы выполнялось свойство $(\text{ЛВУ})_0$. Для этого при любом $x_0 \in R^n$ обозначим $x_{i0}^* = x_0 - D_i$, $x_i^*(t, x_0) = x_i^0(t, x_{10}^*, \ldots, x_{l0}^*)$ и $z_{i,j}^*(t, x_0) = x_i^*(t, x_0) - x_j^*(t, x_0) + d_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, l$, $(i, j) \in E$. Тогда из равенства $d_{ij} = D_i - D_j$ следует, что $z_{i,j}^*(0, x_0) = x_0 - D_i - (x_0 - D_j) + d_{ij} = \mathbf{0}$ и поэтому из неравенства (4) получаем следующее

Необходимое условие 2. $z_{i,j}^*(t, x_0) \equiv \mathbf{0}$ при любых $x_0 \in R^n$, $t \geq 0$, $i, j = 1, 2, \ldots, l$.

Дифференцируя это тождество по t и после этого подставляя $t = 0$, получаем следующее утверждение.

Предложение 2. *Если (i, j) — ребро графа G ($(i, j) \in E$), то матрицы $S_i, S_j \in R^{m\times n}$, векторы $k_i, k_j \in R^m$ и наборы матриц $\{K_{is}\}_{s\in L_i}$, $\{K_{j\nu}\}_{\nu\in L_j}$ K_{is}, $K_{j\nu} \in R^{m\times n}$, удовлетворяют следующей системе линейных уравнений*:

$$A_i + B_i\left(S_i + \sum_{s\in L_i} K_{is}\right) = A_j + B_j\left(S_j + \sum_{\nu\in L_j} K_{j\nu}\right),$$

$$B_i\left(k_i - S_iD_i - \sum_{s\in L_i} K_{is}D_s\right) - A_iD_i =$$

$$= B_j\left(k_j - S_jD_j - \sum_{\nu\in L_j} K_{j\nu}D_\nu\right) - A_jD_j,$$

где для $j \in V_0$ считаем, что $S_j = \mathbf{0}$, $\sum_{\nu\in L_j} K_{j\nu} = 0$, $k_j = \mathbf{0}$.

Из слабой связности графа G и предложения 2 получаем следующие

Предложение 3. *Для всех $i = 1, 2, \ldots, l_0$ все матрицы A_i одинаковы, т.е. $A_i = A_1$, а для $i > l_0$ матрицы $S_i \in R^{m\times n}$, векторы $k_i \in R^m$ и наборы матриц $\{K_{is}\}_{s\in L_i} K_{is} \in R^{m\times n}$ удовлетворяют следующей системе линейных уравнений*:

$$B_i\left(S_i + \sum_{s\in L_i} K_{is}\right) = A_1 - A_i, \tag{5}$$

$$B_i\left(k_i - S_iD_i - \sum_{s\in L_i} K_{is}D_s\right) = A_iD_i. \tag{6}$$

Из необходимых условий 1 и 2 получаем также следующее утверждение о свойствах матриц $\tilde{A}_i = A_i + B_iS_i$ и A_1.

Предложение 4. *Для всех $i > l_0, \ldots, l$ матрицы $\tilde{A}_i = A_i + B_iS_i$ — гурвицевы и, следовательно, пары матриц (A_i, B_i) — стабилизируемы, а если $l_0 > 1$, то и матрица A_1 — гурвицева.*

Замечание 2. Сделаем несколько замечаний о разрешимости уравнений (5), (6). Обозначая $N_i = S_i + \sum_{s\in L_i} K_{is}$ и $\tilde{k}_i = k_i - S_iD_i - \sum_{s\in L_i} K_{is}D_s$, получаем, что $N_i \in R^{m\times n}$ и $\tilde{k}_i \in R^m$ являются решениями следующих уравнений:

$$B_iN_i = A_1 - A_i,$$

$$B_i\tilde{k}_i = A_iD_i$$

для всех $i = 1, 2, \ldots, l$.

Обратно, если $N_i \in R^{m\times n}$ и $\tilde{k}_i \in R^m$ являются решениями предыдущих уравнений, $S_i \in R^{m\times n}$ — любая матрица, а набор матриц $\{K_{is}\}_{s\in L_i}$, $K_{is} \in R^{m\times n}$, удовлетворяет соотношению $\sum_{s\in L_i} K_{is} = N_i - S_i$, то, полагая $k_i = \tilde{k}_i + S_iD_i + \sum_{s\in L_i} K_{is}D_s$, получаем решение уравнений (5), (6).

4. Необходимые и достаточные условия линейной внутренней устойчивости.

Набор условий для наличия свойства $(\text{ЛВУ})_0$ из предложений 1–4 оказался не только необходимым, но и достаточным. Более точно, верно следующее утверждение.

Теорема. *Для линейной формации выполняется свойство линейной внутренней устойчивости тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия*:

1) *для всех $i > l_0$ пары матриц (A_i, B_i) — стабилизируемы, т.е. существуют $(m\times n)$-матрицы S_i такие, что матрицы $A_i + B_iS_i$ — гурвицевы*;

2) *для всех $i > l_0$ существует $(m\times n)$-матрица N_i и векторы $\tilde{k}_i \in R^m$, удовлетворяющие следующим линейным уравнениям*:

$$B_iN_i = A_1 - A_i, \tag{7}$$

$$B_i\tilde{k}_i = A_iD_i, \tag{8}$$

3) *если $(i, j) \in E$, то $d_{ij} = D_i - D_j$*;

4) *если $l_0 > 1$, то $A_i = A_1$ для всех $i = 1, 2, \ldots, l_0$ и матрица A_1 — гурвицева.*

При этом если S_i, N_i и $\tilde{k}_i$ удовлетворяют условиям 1), 2) *теоремы, то управления ведомых, обеспе-*

чивающие внутреннюю устойчивость, можно выбрать в виде

$$u_i(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_i) = S_i \mathrm{x}_i + \sum_{s \in L_i} K_{is} \mathrm{x}_s + k_i, \quad i > l_0,$$

где набор матриц $\{K_{is}\}_{s \in L_i}$, $K_{is} \in R^{m \times n}$, *удовлетворяет соотношению* $\sum_{s \in L_i} K_{is} = N_i - S_i$, *а* $k_i = \tilde{k}_i + S_i D_i + \sum_{s \in L_i} K_{is} D_s$ *независимо от управлений лидеров, т.е. удовлетворяет и свойству* (ЛВУ)$_1$.

Сформулируем ряд следствий из этой теоремы.

Так как все необходимые условия получены из свойства (ЛВУ)$_0$, то верно следующее утверждение.

С л е д с т в и е 1. *Свойства* (ЛВУ)$_1$, (ЛВУ) *и* (ЛВУ)$_0$ *эквивалентны*.

З а м е ч а н и е 3. Отметим также, что если перебирать все $(m \times n)$-матрицы S_i, стабилизирующие пары матриц (A_i, B_i) $(i > l_0)$, т.е. такие, что матрица $A_i + B_i S_i$ – гурвицева, а также все N_i, $\tilde{k}_i$, являющиеся решениями уравнений (7), (8) и все наборы матриц $\{K_{is}\}_{s \in L_i}$, $K_{is} \in R^{m \times n}$, удовлетворяющие соотношению $\sum_{s \in L_i} K_{is} = N_i - S_i$, то по формуле

$$u_i(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_i) = S_i(\mathrm{x}_i + D_i) + \sum_{s \in L_i} K_{is}(\mathrm{x}_s + D_s) + \tilde{k}_i$$

получим все управления, при которых выполняется свойство (ЛВУ)$_1$ (естественно, при выполнении условий 3) и 4) теоремы).

Далее заметим, что в случае, когда у формации больше одного лидера, то в теореме 1 условие 1) является следствием условий 2) и 4), так как можно взять $S_i = N_i$ и, кроме того, при этом можно взять $K_{is} = \mathbf{0} \in R^{m \times n}$ для всех $i > l_0$, $s \in L_i$. Тогда получаем следующее

С л е д с т в и е 2. *Для линейной формации, имеющей больше одного лидера, выполняется свойство линейной внутренней устойчивости тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия*:

1) $A_i = A_1$ *для всех* $i = 1, 2, \ldots, l_0$ *и матрица* A_1 – *гурвицева*;

2) *выполняются условия условий* 2) *и* 3) *теоремы* 1.

При этом если N_i *и* $\tilde{k}_i$ *удовлетворяют условию* 2) *теоремы* 1, *то управления ведомых, обеспечивающие внутреннюю устойчивость, можно выбрать в виде*

$$u_i(\mathrm{x}_i) = N_i(\mathrm{x}_i + D_i) + \tilde{k}_i, \quad i > l_0,$$

независимо от состояний ведущих и управлений лидеров.

З а м е ч а н и е 4. Рассмотрим самую простую среди формаций, имеющих больше одного лидера. Она состоит из трех объектов: 1-й и 2-й – лидеры и ведущие для 3-го. По следствию 2 необходимыми и достаточными условиями ее линейной внутренней устойчивости будут следующие (учитывая, что для этой формации $D_1 = D_2 = \mathbf{0}$, $p(3) = 2$ и $D_3 = d_{32}$):

1) $A_2 = A_1$ и матрица A_1 – гурвицева;

2) существуют решения уравнений $B_3 N_3 = A_1 - A_3$ и $B_3 \tilde{k}_3 = A_3 d_{32}$;

3) $d_{31} = d_{32}$.

Однако очевидно, что (необходимое) условие $d_{31} = d_{32}$ невыполнимо и бессмысленно для реальных объектов. Причем можно показать, что подобная коллизия будет возникать в любой формации, имеющей больше одного лидера. Еще одним странным (противоречащим интуиции) фактом является возможность обеспечить внутреннюю устойчивость (в случае ее наличия) управлением, не зависящим от состояний ведущих (как в следствии 2).

Таким образом, данная концепция внутренней устойчивости не подходит для многолидерных формаций. Причиной этого, видимо, является то, что мы пытаемся выдержать заданное расположение ведомого объекта одновременно относительно всех его ведущих (т.е. пытаемся угнаться сразу за несколькими зайцами). Возможно, более приемлемой в данном случае может оказаться концепция внутренней устойчивости из [5], в которой используется некоторое агрегированное отклонение i-го объекта от идеального состояния вида $e_i = \sum_{j \in L_i} P_{ij} \mathrm{z}_{i,j}$, где P_{ij} – некоторые матрицы-проекторы, и требуется выполнение оценки вида (2) для вектора, составленного из e_i, $i > l_0$, а не всей матрицы z.

Далее рассмотрим случай формаций, для которых условие 3) теоремы 1 отсутствует. Это формации, граф которых является входящим деревом [15, с. 235], т.е. слабо связным бесконтурным графом, не имеющим полуконтуров, со стоком. Согласно [15, с. 236, теорема 16.4'] у формации с таким графом будет один лидер и, кроме того, у всех остальных объектов будет единственный ведущий, т.е. $L_i = \{p(i)\}$ при $i > 1$. В этом случае условие 3) теоремы 1 всегда выполнено и набор матриц $\{K_{is}\}_{s \in L_i}$ состоит из одной матрицы $K_{ip(i)}$. Поэтому получаем следующее

С л е д с т в и е 3. *Для линейной формации, граф которой является входящим деревом, выполняется свойство линейной внутренней устойчивости тогда и только тогда, когда выполняются условия* 1), 2) *теоремы* 1.

При этом если S_i, N_i и $\tilde{k}_i$ удовлетворяют условиям 1), 2) *теоремы* 1, *то управления ведомых, обеспечивающие внутреннюю устойчивость, можно выбрать в виде*

$$u_i(\mathrm{x}_i, \mathrm{x}_{p(i)}) = S_i(\mathrm{x}_i + D_i) + \\ + (N_i - S_i)(\mathrm{x}_{p(i)} + D_{p(i)}) + \tilde{k}_i, \quad i > 1,$$

независимо от управления лидера.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 19–08–00746 и 19–01–00301).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Balch T., Arkin R.C.* Behavior-Based Formation Control for Multirobot // IEEE Transactions on Robotics and Automation. 1998. V. 14. № 6. P. 926–939.
2. *Tanner H.G., Pappas G.J.* Formation input-to-state stability // Proc. 15th IFAC World Congr. Autom. Control. Barcelona, 2002. P. 1512–1517.
3. *Tanner H.G., Kumar V., Pappas G.J.* Stability properties of interconnected vehicles // Proc. 15th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems. South Bend, Indiana, 2002. P. 1–12. Paper number 4615–2. [CD-ROM].
4. *Tanner H.G., Pappas G.J., Kumar V.* Input-to-state Stability on Formation Graphs // Proc. 41st IEEE Conference on Decision and Control. Las Vegas, NV, 2002. P. 2439–2444.
5. *Tanner H.G., Pappas G.J., Kumar V.* Leader-to-formation stability // IEEE Transactions on Robotics and Automation. 2004. V. 20. № 3. P. 443–455.
6. *Oh K.K., Park M.C., Ahn H.S.* A survey of multi-agent formation control // Automatica. 2015. V. 53. P. 424–440.
7. *Lü J., Chen F., Chen G.* Nonsmooth leader-following formation control of nonidentical multi-agent systems with directed communication topologies // Automatica. 2016. V. 64. P. 112–120.
8. *Sontag E.D.* Smooth stabilization implies coprime factorization // IEEE Trans. Automat. Control. 1989. V. 34. № 4. P. 435–443.
9. *Sontag E.D., Wang Y.* On characterizations of the input-to-state stability property // Systems & Control Letters. 1995. V. 24. № 5. P. 351–359.
10. *Дашковский С.Н., Ефимов Д.В., Сонтаг Э.Д.* Устойчивость от входа к состоянию и смежные свойства систем // АиТ. 2011. № 8. С. 3–40.
11. *Васильев С.Н., Козлов Р.И., Ульянов С.А.* Анализ координатных и других преобразований моделей динамических систем методом редукции // Труды института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. № 3. С. 38–55.
12. *Васильев С.Н., Козлов Р.И., Ульянов С.А.* Устойчивость многорежимных формаций // ДАН. 2014. Т. 455. № 3. С. 269–274.
13. *Ul'yanov S., Maksimkin N.* Formation path-following control of multi-AUV systems with adaptation of reference speed // Mathematics in Engineering, Science and Aerospace. 2019. V. 10. № 3. P. 487–500.
14. *Халил Х.К.* Нелинейные системы. М.: РХД, 2009.
15. *Харари Ф.* Теория графов. М.: Мир, 1973.

NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITIOS OF INTERNAL STABILITY OF LINEAR FORMATIONS

A. V. Lakeyev

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS S.N. Vassilyev November 20, 2019

Received November 21, 2019

The necessary and sufficient conditions of internal stability for the formations, whose dynamics is defined by linear differential equations, have been obtained. In this case, programmed controls have been chosen in the capacity of the classes of admissible controls for the leaders; while in the case of objects having leaders for them – affine feedbacks dependent on the state of the object itself and on the states of its leaders have been chosen. The conditions obtained may be easily verified and consist of the requirements of (i) stabilizability of the pair of matrices for the equations of the follower objects, (ii) Hurwitz character and (iii) coincidence of the matrices for the leaders in the case of numerous leaders (the mulileader case), (iv) solvability of some linear equations and constraints (of the type of equalities) upon the vectors defining the desired mutual location between the leader and the follower. Furthermore, the whole class of controls, which provide for satisfaction of the linear internal stability, has been described. While relying upon the conditions obtained, it was demonstrated that practically only one-leader formations can possess internal stability. We have identified a subclass (the formations whose graph is the input tree) inthe class with one leader, in which there are no constraints of the type of equalities, that represent the main problem (obstacle) for the internal stability of multi-leader formations.

Keywords: formation, input-to-state stability, acyclic digraph, Hurwitz matrix, stabilizability