ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 490, с. 5–8

МАТЕМАТИКА

УДК 512.544.33

МНОГООБРАЗИЯ СТЕПЕННЫХ *MR*-ГРУПП

© 2020 г. М. Г. Амаглобели*

Представлено академиком РАН Ю.Л. Ершовым 25.09.2019 г.
Поступило 27.09.2019 г.
После доработки 27.09.2019 г.
Принято к публикации 31.10.2019 г.

В работе вводятся понятия многообразия степенных *MR*-групп и тензорного пополнения групп в многообразии. Изучается связь между свободными группами данного многообразия при различных кольцах скаляров. Описаны абелевы многообразия *MR*-групп. Кроме того, в категории *MR*-групп вводятся различные аналоги понятия n-ступенно нильпотентной *MR*-группы и приведено их сравнение в этой категории. Получено, что пополнение 2-ступенно нильпотентной *MR*-группы является 2-ступенно нильпотентной.

Ключевые слова: линдонова R-группа, *MR*-группа, многообразие *MR*-групп, R-коммутант, тензорное пополнение, нильпотентная *MR*-группа

DOI: 10.31857/S2686954320010105

Понятие степенной R-группы, где R – произвольное ассоциативное кольцо с единицей, введено Р. Линдоном в [1]. А.Г. Мясников и В.Н. Ремесленников в [2] уточнили понятие R-группы, введя дополнительную аксиому. В частности, новое понятие R-группы является непосредственным обобщением понятия R-модуля на случай некоммутативных групп. В честь А.Г. Мясникова R-группы с дополнительной аксиомой в статье М.Г. Амаглобели и В.Н. Ремесленникова [3] названы *MR*-группами (R-кольцо). Хорошо известна роль тензорного расширения кольца скаляров для модулей. Авторы работы [2] определили точный аналог этой конструкции для произвольной *MR*-группы – тензорное пополнение. В работе М.Г. Амаглобели [4] предложен конкретный способ построения тензорного пополнения данной *MR*-группы. Систематическое изучение *MR*-групп начато в работах [3–9]. Отметим, что результаты этих работ оказались весьма полезны при решении известных проблем Тарского.

В определении многообразия *MR*-групп мы следуем стандартной схеме. Существенное отличие изучаемого случая от классического в том, что, во-первых, понятие многообразия расслаивается в зависимости от кольца скаляров, во-вторых, вербальная подгруппа, вообще говоря, не порождается значениями слов, определяющих многообразие. К счастью, функтор тензорного пополнения связывает слои многообразий по различным кольцам скаляров.

Напомним основные определения и факты, следуя работе [2]. Зафиксируем произвольное ассоциативное кольцо R с единицей 1, а также группу G. Результат действия $\alpha \in R$ на $g \in G$ будем записывать в виде g^{α}. Рассмотрим аксиомы:

$$g^1 = g, \quad g^0 = e, \quad e^{\alpha} = e, \tag{1}$$

$$g^{\alpha+\beta} = g^{\alpha} g^{\beta}, \quad g^{\alpha\beta} = (g^{\alpha})^{\beta}, \tag{2}$$

$$(h^{-1}gh)^{\alpha} = h^{-1}g^{\alpha}h, \tag{3}$$

$$(MR\text{-аксиома})\,\forall\, g,h \in G, \quad \alpha \in R, \quad [g,h] = e \to (gh)^{\alpha} = g^{\alpha}h^{\alpha}, \tag{4}$$

где $[g,h] = g^{-1}h^{-1}gh$.

Определение 1 [2]. Группу G будем называть *степенной R-группой по Линдону*, если выполнены аксиомы (1)–(3), и *степенной MR-группой*, если выполнены аксиомы (1)–(4).

Пусть $\mathbf{L}_R$ и $\mathbf{M}_R$ – классы всех степенных R-групп по Линдону и всех *MR*-групп. Очевидно, что $\mathbf{L}_R \supseteq \mathbf{M}_R$. Существуют примеры, показывающие, что это включение строгое (см. [1]). Кроме того, выполнено свойство: каждая абелева *MR*-группа является R-модулем и наоборот. Большинство естественных примеров R-групп лежат в классе $\mathbf{M}_R$. Например, свободная R-группа по

Тбилисский государственный университет им. Ив. Джавахишвили, Тбилиси, Грузия
**E-mail: mikheil.amaglobeli@tsu.ge*

Линдону является MR-группой, унипотентная группа над полем K нулевой характеристики является MK-группой, произвольная про-p-группа является $M\mathbb{Z}_p$-группой над кольцом целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$ и т.д. (см. другие примеры в [2]).

Стандартным образом вводятся понятия MR-подгруппы, MR-порождаемости, нормальной MR-подгруппы и т.д. Ясно, что этот класс является квазимногообразием в сигнатуре $\langle \cdot\, , ^{-1}, f_\alpha \mid \alpha \in R\rangle$, где f_α – унарная операция возведения в степень α, т.е. $f_\alpha(g) = g^\alpha$ и в нем есть понятие свободной MR-группы, R-гомоморфизма и т.д. В частности, гомоморфизм R-групп $\varphi\colon G \to G^*$ называется R-гомоморфизмом, если $\varphi(g^\alpha) = \varphi(g)^\alpha$ для любых $g \in G$, $\alpha \in R$. Ядра R-гомоморфизмов в категории $\mathbf{M}_R$ могут быть охарактеризованы как так называемые $\mathbf{M}_R$-идеалы. Для $g, h \in G$, $\alpha \in R$ элемент $(g,h)_\alpha = h^{-\alpha}g^{-\alpha}(gh)^\alpha$ назовем α-коммутатором элементов g и h. Очевидно, что α-коммутатор $(g,h)_\alpha$ при $\alpha = -1$ совпадает с обычным коммутатором $[h^{-1}, g^{-1}]$. Ясно, что $(gh)^\alpha = g^\alpha h^\alpha (g,h)_\alpha$ и $G \in \mathbf{M}_R \leftrightarrow ([g,h] = e \to (g,h)_\alpha = e)$. Последняя эквивалентность приводит к определению $\mathbf{M}_R$-идеала.

Определение 2 [2]. Нормальная MR-подгруппа $H \trianglelefteq G$, $G \in \mathbf{L}_R$, называется $\mathbf{M}_R$-идеалом, если $(g,h)_\alpha \in H$ для любых $g, h \in G$, $\alpha \in R$.

В [2] показано, что если $\varphi\colon G \to G^*$ – R-гомоморфизм групп из $\mathbf{M}_R$, то $\operatorname{Ker}\varphi$ – $\mathbf{M}_R$-идеал в G, и если H – $\mathbf{M}_R$-идеал в G, то $G/H \in \mathbf{M}_R$.

Многообразия MR-групп. Многообразия тесно связаны со свободными группами, поскольку тождества – это элементы свободных групп. Пусть $X = \{x_i \mid i \in I\}$ – бесконечный счетный алфавит, R – кольцо с единицей, $F_R(X)$ – свободная MR-группа с базой X (см. [4]). Элемент $w(\bar{x}) = w(x_1,\ldots,x_n) \in F_R(X)$ будем называть R-словом в алфавите X. Если $G \in \mathbf{M}_R$ и $\bar{g} = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$, то отображение $x_i \mapsto g_i$ продолжается до R-гомоморфизма $\varphi\colon F_R(X) \to G$. Образ $w(x_1, \ldots, x_n)^\varphi = w(g_1,\ldots,g_n) \in G$ будем называть значением R-слова w при подстановке $x_1 = g_1, \ldots, x_n = g_n$. Обозначим через $w(G) = \{w(\bar{g}) \mid \bar{g} \in G^n\}$. R-слово $w(\bar{g})$ будем называть тождеством в группе $G \in \mathbf{M}_R$, если $w(G) = e$. Пусть W – произвольное множество R-слов в алфавите X. Тогда W определяет многообразие MR-групп $\mathbf{N} = \mathbf{N}(W) = \{G \in \mathbf{M}_R \mid w(G) = e\ \forall\ w \in W\}$. R-слово $u(\bar{x})$ назовем следствием множества слов $W \subseteq F_R(X)$, если $u(G) = e$ для любой группы $G \in \mathbf{N}(W)$. Множества R-слов W_1 и W_2 эквивалентны, если каждое R-слово из W_1 является следствием из W_2 и наоборот. В частности, два R-слова, получаемые одно из другого переименованием букв, эквивалентны.

Определение 3. $\mathbf{M}_R$-идеал в G, порожденный множеством значений всех R-слов из множества W, будем называть W-вербальным идеалом в G. Далее W-вербальный идеал обозначается через $W(G)$.

Предложение 1. *W-вербальный идеал в $F_R(X)$, порожденный множеством R-слов $W \subseteq F_R(X)$, состоит в точности из всех следствий множества W в $F_R(X)$.*

В каждом многообразии $\mathbf{N}(W)$ есть свободные относительно этого многообразия группы.

Теорема 1. *Свободной группой в многообразии MR-групп $\mathbf{N}(W)$ является группа*

$$F_{W,R}(X) = F_R(X)/W(F_R(X)).$$

Теорема 2. *Класс MR-групп $\mathbf{N}$ является многообразием тогда и только тогда, когда $\mathbf{N}$ замкнут относительно взятия MR-подгрупп, декартовых R-произведений и R-гомоморфных образов.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству классической теоремы Биркгофа для многообразий алгебраических систем.

Замечание 1. При определении многообразий MR-групп мы следуем монографии [10], где есть объяснение, как понимать многообразие групп внутри квазимногообразия групп. В подходящей сигнатуре класс $\mathbf{L}_R$ является многообразием R-групп, а класс $\mathbf{M}_R$ – квазимногообразием R-групп и включение $\mathbf{L}_R \supseteq \mathbf{M}_R$ строгое. Пусть $\mathbf{N}$ – некоторое многообразие R-групп из $\mathbf{L}_R$. Рассмотрим пересечение $\mathbf{N}_R = \mathbf{N} \cap \mathbf{M}_R$. Согласно определению из [10, гл. 2, параграф 2.5] этот класс является биркгофовым классом, т.е. в нем справедливы известные теоремы Биркгофа. В частности, для этого класса существует теория определяющих соотношений, понятие MR-подгруппы и понятие MR-фактор-группы. Поэтому естественно класс $\mathbf{N}_R$ называть многообразием MR-групп внутри квазимногообразия групп $\mathbf{M}_R$.

Тензорные пополнения. Пусть $\mathbf{N}_R$ и $\mathbf{N}_S$ – многообразия MR-групп и MS-групп, заданные множеством слов W.

Определение 4. Группу G_W^S будем называть тензорным S-пополнением G в многообразии $\mathbf{N}_S$, если существует R-гомоморфизм $\lambda : G \to G_W^S$ такой, что $\lambda(G)$ S-порождает G_W^S, т.е. $\langle\lambda(G)\rangle_S = G_W^S$, и для любой группы H из $\mathbf{N}_S$ и любого R-гомоморфизма $\varphi : G \to H$ существует S-гомоморфизм $\psi : G_W^S \to H$, замыкающий до коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & G_W^S \arrow[dl, dashed, "\exists\psi"] \\ & H & \end{tikzcd}$$

Отметим, что в отличие от [2] мы рассматриваем только ситуацию, когда $\mu : R \to S$ — вложение колец, а потому μ не участвует в определении и обозначениях. Это ограничение не по существу и сделано только ради упрощения обозначений.

Теорема 3. *Пусть $G \in \mathbf{N}_R$. Тогда тензорное S-пополнение G_W^S относительно $\mathbf{N}_S$ существует, причем $G_W^S = G^S / W(G^S)$.*

Теорема 4. *Пусть $R \subseteq S$ — кольца, $F_{W,R}(X)$ — свободная группа в многообразии $\mathbf{N}_R$. Тогда $(F_{W,R}(X))_W^S$ — свободная группа в многообразии $\mathbf{N}_S$, т.е. $(F_{W,R}(X))_W^S \cong F_{W,S}(X)$.*

***R*-коммутант и абелевы многообразия *MR*-групп.** Пусть $G \in \mathbf{M}_R$. MR-подгруппу $(G, G)_R = \langle (g,h)_\alpha \mid g,h \in G, \alpha \in R \rangle_R$ будем называть R-коммутантом группы G.

Предложение 2. *Для любой MR-группы G R-коммутант является вербальной* MR*-подгруппой, определяемой словом $[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy$; R-коммутант — это наименьший $\mathbf{M}_R$-идеал, фактор-группа по которому абелева.*

Как мы уже отмечали, обычный коммутатор является (-1)-коммутатором. Какие еще α-коммутаторы порождают R-коммутант как вербальную MR-подгруппу? Мы ответим на этот вопрос в случае, когда R — поле.

Предложение 3. *Пусть R — поле. Тогда α-коммутатор $(x,y)_\alpha$ порождает R-коммутант как вербальную MR-подгруппу при условии $\alpha \neq 0,1$.*

Теорема 5. *Любое множество R-слов V в алфавите $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ эквивалентно множеству R-слов $W = \{x_1^{\alpha_i}, u_j \mid \alpha_i \in R, i \in I, j \in J\}$, где u_j — слова из R-коммутанта группы $F_R(X)$.*

Следующие результаты характеризуют абелевы многообразия MR-групп.

Теорема 6. *Свободная абелева MR-группа с базой X является свободным R-модулем и R-изоморфна фактор-группе свободной MR-группы с базой X по ее R-коммутанту.*

Теорема 7. *Существует взаимно-однозначное соответствие между решеткой двусторонних идеалов кольца R и решеткой вербальных MR-подгрупп свободного R-модуля.*

Следствие 1. *При $R = \mathbb{Z}$ любое собственное подмногообразие абелевых групп есть многообразие абелевых групп периода $n \geq 2$.*

Нильпотентные многообразия *MR*-групп. Выше было определено понятие R-коммутанта группы $G \in \mathbf{M}_R$. Будем называть его первым R-коммутантом и обозначать через $G^{(1,R)}$. R-коммутант $G^{(2,R)}$ от $G^{(1,R)}$ будем называть вторым R-коммутантом и т.д. Возникает убывающий ряд R-коммутантов

$$G = G^{(0,R)} \geq G^{(1,R)} \geq G^{(2,R)} \geq \cdots \geq G^{(n,R)} \geq \cdots \qquad (5)$$

Степенную MR-группу будем называть R-разрешимой, если существует натуральное число n такое, что $G^{(n,R)} = e$. Индукцией по n нетрудно доказывается, что обычный n-й коммутант $G^{(n)}$ содержится в $G^{(n,R)}$. Поэтому n-ступенно разрешимая группа в категории $\mathbf{M}_R$ является n-ступенно разрешимой в категории групп.

Перейдем к определению нижнего центрального ряда в категории $\mathbf{M}_R$. Первым членом этого ряда будет R-коммутант группы G, который мы в этом случае обозначим через $G_{(1,R)}$. Пусть уже определен n-й член нижнего центрального ряда $G_{(n,R)}$. Тогда $G_{(n+1,R)} = \mathrm{id}([G, G_{(n,R)}])$, т.е. $G_{(n+1,R)}$ — это $\mathbf{M}_R$-идеал, порожденный взаимным коммутантом G и $G_{(n,R)}$. Возникает нижний центральный ряд

$$G = G_{(0,R)} \geq G_{(1,R)} \geq G_{(2,R)} \geq \cdots \geq G_{(n,R)} \geq \cdots \qquad (6)$$

Степенную MR-группу будем называть нижне-R-нильпотентной, если существует такое натуральное число n, что $G_{(n,R)} = e$. Наименьшее число n с таким свойством называется ступенью нижней R-нильпотентности.

Так как обычный член нижнего центрального ряда $G_{(n)}$ содержится в $G_{(n,R)}$, то n-ступенно нижне-нильпотентная группа в категории $\mathbf{M}_R$ является нильпотентной группой ступени $\leq n$ в категории групп. Из определения рядов (5), (6) и определения вербальной MR-подгруппы непосредственно следует, что для любого натурального n и кольца R группы $G^{(n,R)}$ и $G_{(n,R)}$ являются вербальными MR-подгруппами. В связи с этими определениями возникают следующие вопросы.

Вопрос 1. Верно ли, что $G^{(n,R)} = \mathrm{id}(G^{(n)})$ и $G_{(n,R)} = \mathrm{id}(G_{(n)})$, т.е. порождается ли вербальная

MR-подгруппа $G^{(n,R)}$ словом $v_n = [v_{n-1}(\bar{x}), v_{n-1}(\bar{y})]$, где $v_1 = [x,y]$, и порождается ли вербальная MR-подгруппа $G_{(n,R)}$ коммутатором $[x_1,\ldots, x_n]$?

Вопрос 2. Будет ли n-ступенно разрешимая MR-группа n-ступенно R-разрешимой? Будет ли n-ступенно нильпотентная MR-группа n-ступенно нижне-R-нильпотентной?

Ряды (5), (6) можно продолжить для любого ординала α. Если α не предельный ординал, то $G^{(\alpha,R)}$ получается из $G^{(\alpha-1,R)}$ описанным выше способом. Если же α — предельный ординал, то $G^{(\alpha,R)} = \bigcap_{\beta<\alpha} G^{(\beta,R)}$, $G_{(\alpha,R)} = \bigcap_{\beta<\alpha} G_{(\beta,R)}$.

Вопрос 3. Пусть $F = F_R(X)$ — свободная MR-группа с базой X. Для любого ли кольца R существуют ординалы α и β, зависящие от R, такие что $F^{(\alpha,R)} = e$ и $F_{(\beta,R)} = e$?

Обозначим класс нижне-R-нильпотентных групп ступени n через $\underline{\mathbf{N}}_{n,R}$. Введем также и другие определения нильпотентности в категории MR-групп. Для этого индукцией по n определим понятие простого $\bar{\alpha}$-коммутатора веса n, где $\bar{\alpha} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})$. Если $n = 2$, то $\bar{\alpha} = (\alpha)$ — это α-коммутатор $(g_1,g_2)_\alpha$ элементов g_1, g_2 из G, определенный выше. Пусть при $n \geq 2$ простые $\bar{\alpha}$-коммутаторы веса n уже определены. Тогда простой $(\bar{\alpha},\alpha_n)$-коммутатор есть элемент $(x, g_n)_{\alpha_n}$, где x — простой $\bar{\alpha}$-коммутатор. Далее, пусть $X = \{x_1, x_2,\ldots\}$ — множество букв. Обозначим через W_n множество $\{(\cdots((x_1,x_2)_{\alpha_1},x_3)_{\alpha_2},\ldots,x_{n+1})_{\alpha_n} \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in R\}$ всех простых $\bar{\alpha}$-коммутаторов веса $n+1$ от букв $x_1, \ldots, x_{n+1}$. Многообразие групп, определяемое множеством R-слов W_n, обозначим через $\mathbf{N}_{n,R}$. Группы этого многообразия будем называть R-нильпотентными MR-группами ступени n. Введем еще одно определение нильпотентности. Обозначим через $\bar{\mathbf{N}}_{n,R}$ многообразие MR-групп, определяемое словом $v_n = [\cdots[[x_1,x_2],\ldots,x_3], \ldots, x_{n+1}]$. Группы этого многообразия будем называть верхне-R-нильпотентными ступени n. Ясно, что имеют место включения $\underline{\mathbf{N}}_{n,R} \subseteq \mathbf{N}_{n,R} \subseteq \bar{\mathbf{N}}_{n,R}$.

Теорема 8. *При $n = 1, 2$ все три определения нильпотентности совпадают. Вопрос о совпадении этих понятий при $n > 2$ остается открытым.*

В [2] отмечено, что тензорные пополнения абелевых MR-групп являются абелевыми MR-группами. В общем случае тензорное пополнение в категории всех MR-групп строится с помощью свободных конструкций (см. [4]), а потому, как правило, в некоммутативном случае содержит свободные подгруппы. Тем не менее справедлива

Теорема 9. *Если G — нильпотентная MR-группа ступени нильпотентности 2, то ее тензорное пополнение G^S также является нильпотентной MS-группой ступени 2.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lyndon R.C.* // Trans. Amer. Math. Soc. 1960. V. 96. P. 518–533.
2. *Мясников А.Г., Ремесленников В.Н.* // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35. № 5. С. 1106–1118.
3. *Амаглобели М.Г., Ремесленников В.Н.* // ДАН. 2012. Т. 443. № 4. С. 410–413.
4. *Амаглобели М.Г.* // Алгебра и логика. 2018. Т. 57. № 2. С. 137–148.
5. *Myasnikov A.G., Remeslennikov V.N.* // Intern. J. Algebra Comput. 1996. № 6. P. 687–711.
6. *Baumslag G., Myasnikov A., Remeslennikov V.* // Geom. Dedicata. 2002. V. 92. P. 115–143.
7. *Амаглобели М.Г., Ремесленников В.Н.* // Сиб. матем. журн. 2013. Т. 54. № 1. С. 8–19.
8. *Amaglobeli M., Remeslennikov V.* // Georgian Math. J. 2015. V. 22. № 4. P. 441–449.
9. *Амаглобели М.Г.* // ДАН. 2019. Т. 486. № 2. С. 147–150.
10. *Горбунов В.А.* Алгебраическая теория квазимногообразий. Новосибирск: Науч. книга, 1999.

VARIETIES OF EXPONENTIAL *MR*-GROUPS

M. G. Amaglobeli

Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia

Presented by Academician of the RAS Yu.L. Ershov September 25, 2019

Received September 27, 2019

In this paper we introduce the notion of a variety of exponential MR-groups and tensor completions of groups in varieties. We study relationships between free groups of a given variety under different rings of scalars and describe varieties of abelian MR-groups. Moreover, in the category of MR-groups, we consider several analogs of n-class nilpotent groups. We got that the completion of a 2-class nilpotent group is a 2-class nilpotent.

Keywords: Lyndon's R-groups, MR-groups, variety of MR-groups, α-commutator, R-commutant, tensor completion, nilpotent MR-group