ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 490, с. 55–58

МАТЕМАТИКА

УДК 517.984.54

ЕДИНСТВЕННОСТЬ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА *n*-ГО ПОРЯДКА С НЕРАСПАДАЮЩИМИСЯ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ПО НЕСКОЛЬКИМ СПЕКТРАМ

© 2020 г. Академик В. А. Садовничий[1], Я. Т. Султанаев[1,2,*], А. М. Ахтямов[3,4,**]

Поступило 10.10.2019 г.
После доработки 10.10.2019 г.
Принято к публикации 29.10.2019 г.

Доказана теорема единственности восстановления дифференциального оператора *n*-го порядка с нераспадающимися краевыми условиями по нескольким спектрам. Эта теорема опирается на результаты Е.А. Барановой.

Ключевые слова: восстановление дифференциального оператора *n*-го порядка, обратная спектральная задача с нераспадающимися краевыми условиями, обратная задача восстановления дифференциального оператора по нескольким спектрам

DOI: 10.31857/S2686954320010075

Обратным спектральным задачам с распадающимися краевыми условиями посвящено большое число работ (см., например, [1–7]). Обратная задача с нераспадающимися краевыми условиями изучалась в работах И.В. Станкевича, В.А. Садовничего, В.А. Юрко, В.А. Марченко, О.А. Плаксиной, М.Г. Гасымова, И.М. Гусейнова, И.М. Набиева и др. (см., например, [8–14]). Однако все рассмотренные обратные задачи с нераспадающимися краевыми условиями представляли собой обратные задачи для дифференциального оператора второго порядка. В настоящем сообщении рассмотрена обратная задача с нераспадающимися краевыми условиями для дифференциального оператора шестого порядка.

[1]*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2]*Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, Уфа, Республика Башкортостан, Россия*
[3]*Башкирский государственный университет, Уфа, Республика Башкортостан, Россия*
[4]*Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, Уфа, Республика Башкортостан, Россия*
**E-mail: sultanaevyt@gmail.com*
***E-mail: akhtyamovam@mail.ru*

Рассмотрим обыкновенный дифференциальный оператор шестого порядка, который задается дифференциальным выражением вида

$$ly \equiv y^{(n)} + \sum_{m=0}^{n-2} p_m(x) y^{(m)}(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{1}$$

где p_m $(m = 0,1, ..., 4)$ – комплекснозначные функции, $p_m^{(m)} \in L_1(0,1)$, и краевыми условиями вида

$$u_i(y) \equiv y^{(i)}(0) + \sum_{k=0}^{i-1} a_k^i y^{(k)}(0) = 0, \quad i = 0,1,\ldots,n-1, \tag{2}$$

$$v_i(y) \equiv y^{(i)}(1) + \sum_{k=0}^{j-1} b_k^j y^{(k)}(1) = 0, \quad j = 0,1,\ldots,n-1, \tag{3}$$

где a_k^i, b_k^j – комплексные числа.

З.Л. Лейбензоном [3] было доказано, что выражение (1) и условия (2), (3) однозначно определяют системы краевых задач $\{S_k\}$, $k = 1,2,\ldots,n-1$, каждая из которых задается уравнением

$$ly = \lambda y \tag{4}$$

и краевыми условиями

$$u_i(y) = 0, \quad i = k,\ldots,n-1, \qquad v_j(y) = 0, \quad j = n-k,\ldots,n-1. \tag{5}$$

В качестве спектральных данных в [3] в случае простых собственных значений берутся собственные значения $\{\lambda_{km}\}$ задачи S_k при всех k и m, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, $m = 1, 2, \ldots$, и отвечающие им весовые числа σ_{km}:

$$\sigma_{km} = \int_0^1 \varphi_{km}(x)\overline{f_{km}(x)}dx,$$

где $\varphi_{km}(x)$ – собственная функция задачи S_k, отвечающая собственному значению λ_{km}, $f_{km}(x)$ – собственная функция сопряженнной задачи S_k^*, отвечающая $\overline{\lambda_{km}}$; эти функции нормированы условиями $u_{k-1}(\varphi_{km}) = u_{6-k-1}^*(f_{km}) = 1$.

В настоящей работе рассматривается задача для уравнения (4) с краевыми условиями

$$U_i(y) \equiv \sum_{k=1}^{n} a_{ik} y^{(k)}(0) + \sum_{k=n+1}^{2n} a_{ik} y^{(k)}(1) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Рассмотрим следующие краевые условия, связанные с условиями (6):

$$u_i(y) \equiv y^{(i)}(0) + \sum_{k=0}^{i-1} a_{6,k+1}^{i} y^{(k)}(0) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{7}$$

$$v_j(y) \equiv y^{(i)}(1) + \sum_{k=0}^{j-1} a_{6,k+1}^{j} y^{(k)}(1) = 0, \quad j = n, n+1, \ldots, 2n, \tag{8}$$

где $a_{2n,k+1}^{i} = a_{2n,k+1}$, $a_{2n,k+1}^{j} = a_{2n,k+1}$. Индексы i, j берутся только для выбора задач S_k в (5).

Задачу (4), (6) будем обозначать через L.

Покажем, что задача L может быть восстановлена по спектру задачи L и $4n-6$ спектрам вспомогательных задач.

В работе Е.А. Барановой [4] система задач S_k $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ восстанавливалась по $(4n - 6)$ спектрам. Пусть l^* – дифференциальное выражение, формально сопряженное выражению (1), а u_i^*, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, v_j^*, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, – краевые условия, сопряженные условиям (2), (3). Формула Лагранжа имеет в нашем случае вид

$$\int_0^1 ly \cdot \bar{z}dx = u_0(y)u_{n-1}^*(z) + \ldots + u_{n-1}(y)u_0^*(z) + $$
$$+ v_0(y)v_{n-1}^*(z) + \ldots + v_{n-1}(y)v_0^*(z) + \int_0^1 y \cdot \overline{l^*z}dx,$$

где

$$u_i^*(z) \equiv (-1)^{i+1}\bar{z}^i(0) + \sum_{k=0}^{i-1} \gamma_k^j \bar{z}^{(k)}(0) = 0,$$

$$v_i^*(z) \equiv (-1)^j \bar{z}^j(1) + \sum_{k=0}^{i-1} \delta_k^i \bar{z}^{(k)}(1) = 0.$$

Числа γ_k^j, δ_k^i определяются единственным образом по числам a_k^i, b_k^j и коэффициентам выражения (1).

Тогда задача S_k^*, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, задается уравнением

$$l^*z = \bar{\mu}z$$

и краевыми условиями

$$u_i^*(z) = 0, \quad i = n-k, \ldots, n-1, \qquad v_j^*(z) = 0, \quad j = k, \ldots, n-1. \tag{9}$$

Заменив в (9) условие $u_{n-1}^*(z) = 0$ условием

$$\hat{u}_{n-1}^*(z) \equiv (-1)^{n-1}\bar{z}^{(n-1)}(1) + \sum_{k=1}^{n-2} \delta_k^{n-1}\bar{z}^{(k)} + \hat{\delta}_0^{n-1}\bar{z}(1) = 0, \tag{10}$$

где $\hat{\delta}_0^{n-1} \neq \delta_0^{n-1}$, получим новую задачу $\hat{S}_k^*$. Можно показать, что достаточно большие по модулю собственные значения задач S_k^* и $\hat{S}_k^*$ не совпадают.

Аналогично с задачей S_k рассмотрим задачу S_k', которая задается дифференциальным уравнением (4) и краевыми условиями

$$u_i(y) = 0, \quad i = k-1, \ldots, n-1, \qquad v_j(y) = 0, \quad j = k, \ldots, n-2.$$

Можно показать, что при достаточно больших по модулю λ спектры задач S_k и S_k' (соответственно $\hat{S}_k^*$ и $S_k^{*\prime}$) лежат в разных полуплоскостях λ-плоскости.

Т е о р е м а (Е.А. Б а р а н о в а) [4]. *Пусть все собственные значения задач* $\{S_k\}$ *и* $\{\hat{S}_k^*\}$, $k = 1, \ldots$ $\ldots$ $n-1$ *являются простыми; тогда по спектрам задач* $\{S_k\}$, $k = 1, \ldots, n-1$, $\{S_k'\}$, $k = 2, \ldots, n-1$, $\{\hat{S}_k^*\}$, $k = 1, \ldots, n-1$, $\{S_k^{*\prime}\}$, $k = 1, \ldots, n-2$, *дифференциальное выражение вида* (1) *и краевые условия* (2), (3), (10) *определяются единственным образом.*

Т е о р е м а. *Пусть все собственные значения задач* $\{S_k\}$ *и* $\{\hat{S}_k^*\}$, $k = 1, \ldots, n-1$, *являются простыми; тогда по* $C_{2n}^n - 1 = \dfrac{(2n)!}{n!n!} - 1$ *собственным значе-*

ниям задачи L, *по спектрам задач* $\{S_k\}$, $k = 1, \ldots$ $\ldots n-1$, $\{S_k'\}$, $k = 2,\ldots,n-1$, $\{\hat{S}_k^*\}$, $k = 1,\ldots,n-1$, $\{S_k^{*\prime}\}$, $k = 1,\ldots,n-2$, *задача* L *определяется единственным образом.*

Схема доказательства. Единственность восстановления дифференциального выражения вида (1) и краевых условий (2), (3), (10) получается как в доказательстве теоремы Е.А. Барановой [4]. Далее, характеристический определитель задачи L имеет следующий вид

$$\begin{gathered}\Delta(\lambda) \equiv A_{1,2,3,\ldots,n-1,n}Y_{1,2,3,\ldots,n-1,n} + \\ + A_{1,2,3,\ldots,n-1,n+1}Y_{1,2,3,\ldots,n-1,n+1} + \ldots \\ \ldots + A_{1,2,3,\ldots,n-1,2n}Y_{1,2,3,\ldots,n-1,2n} + \ldots \\ \ldots + A_{1,2,3,\ldots,n-2,n,n+1}Y_{1,2,3,\ldots,n-2,n,n+1} + \\ + A_{1,2,3,\ldots,n-2,n,n+2}Y_{1,2,3,\ldots,n-2,n,n+2} + \ldots \\ \ldots + A_{1,2,3,\ldots,n-2,n,2n}Y_{1,2,3,\ldots,n-2,n,2n} + \ldots \\ \ldots + A_{1,2,3,\ldots,n-2,2n-1,2n}Y_{1,2,3,\ldots,n-2,2n-1,2n} + \\ + A_{1,2,3,\ldots,n-3,n-1,n}Y_{1,2,3,\ldots,n-3,n-1,n} + \ldots \\ \ldots + A_{1,2,3,\ldots,n-3,n,n+1}Y_{1,2,3,\ldots,n-3,n,n+2} + \ldots \\ \ldots + A_{1,2,3,\ldots,n-3,n,2n}Y_{1,2,3,\ldots,n-3,n,2n} + \ldots \\ \ldots + A_{n+1,n+2,\ldots,2n-1,2n}Y_{n+1,n+2,\ldots,2n-1,2n}.\end{gathered}$$

Можно показать, что все функции $Y_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$ линейно независимы. Матрица A имеет $C_{2n}^n = \dfrac{(2n)!}{n!n!}$ миноров n-го порядка. Поэтому система $C_{2n}^n - 1$ уравнений $\Delta(\lambda_j) = 0$ $(j = 1,2,\ldots,C_{2n}^n - 1)$ имеет C_{2n}^n решений (миноров), определяемых с точностью до постоянного множителя. По этим минорам однозначно определяется матрица A с точностью до линейных преобразований строк, а значит, и краевые условия (6), что и требовалось доказать.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа третьего автора (Ахмятов А.М.) выполнена с использованием средств государственного бюджета по госзаданию на 2019–2022 годы (№ 0246-2019-0088), работа второго автора (Султанаев Я.Т.) проводилась при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Башкортостан (проект 18–51–06002-Аз_а, 18–01–00250-а, 17–41–020230-р_а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Марченко В.А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977.
2. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.
3. *Лейбензон З.Л.* Обратная задача спектрального анализа обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков // Тр. Моск. матем. о-ва. 1966. Т. 15. С. 70–145.
4. *Баранова Е.А.* О восстановлении дифференциальных операторов высших порядков по системе их спектров // ДАН СССР. 1972. Т. 205. № 6. С. 1271–1273.
5. *Коротяев Е.Л., Челкак Д.С.* Обратная задача Штурма–Лиувилля со смешанными краевыми условиями // Алгебра и анализ. 2009. Т. 21. № 5. С. 114–137.
6. *Panakhov E.S., Koyunbakan H., Unal Ic.* Reconstruction Formula for the Potential Function of Sturm-Liouville Problem with Eigenparameter Boundary Condition // Inverse Problems in Science and Engineering. 2010. V. 18. № 1. P. 173–180.
7. *Савчук А.М., Шкаликов А.А.* Обратные задачи для оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева. Равномерная устойчивость // Функц. анализ и его приложения. 2010. Т. 44. № 4. С. 34–53.
8. *Садовничий В.А.* Единственность решения обратной задачи в случае уравнения второго порядка с нераспадающимися условиями, регуляризованные суммы части собственных чисел. Факторизация характеристического определителя // ДАН СССР. 1972. Т. 206. № 2. С. 293–296.
9. *Плаксина О.А.* Обратные задачи спектрального анализа для операторов Штурма–Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями. I // Матем. сборник. Т. 131. № 1. С. 3–26.
10. *Плаксина О.А.* Обратные задачи спектрального анализа для операторов Штурма–Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями. II // Матем. сборник. 1988. Т. 136. № 1. С. 140–159.
11. *Yurko V.A.* The Inverse Spectral Problems for Differential Operators with Nonseparated Boundary Conditions // J. Mathematical Analysis and Applications. 2000. V. 250. P. 266–289.
12. *Гасымов М.Г., Гусейнов И.М., Набиев И.М.* Обратная задача для оператора Штурма–Лиувилля с неразделенными самосопряженными граничными условиями // Сиб. матем. журнал. 1990. Т. 31. № 6. С. 46–54.
13. *Akhtyamov A.M., Mamedov Kh.R.* Uniqueness Theorem for Inverse Sturm–Liouville Problem with Nonseparated Boundary Conditions // Proc. Mavlyutov Institute of Mechanics. 2016. V. 11. № 2. P. 167–170.
14. *Sadovnichii V.A., Sultanaev Ya.T., Akhtyamov A.M.* General Inverse Sturm–Liouville Problem with Symmetric Potential // Azerbaijan J. Mathematics. 2015. V. 5. № 2. P. 96–108.
15. *Akhtyamov A., Amram M., Mouftakhov A.* On Reconstruction of a Matrix by Its Minors // International J. Mathematical Education in Science and Technology. 2018. V. 49. № 2. P. 268–321.

UNIQUENESS OF RECONSTRUCTIONOF AN n^{th}-ORDER DIFFERENTIAL OPERATOR WITH NONSEPARATED BOUNDARY CONDITIONS BYSEVERAL SPECTRA

Academician of the RAS V. A. Sadovnichiy[1], Y. T. Sultanaev[1,2], and A. M. Akhtyamov[3,4]

[1] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*
[2] *Bashkir State Pedagogical University n.a. M. Akmulla, Ufa, Russian Federation*
[3] *Bashkir State University, Ufa, Russian Federation*
[4] *Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa Branch of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russian Federation*

Received October 10, 2019

The uniqueness theorem for the restoration of an n^{th}-order differential operator with nonseparated boundary conditions by several spectra is proved. This theorem is based on the results of E.A. Baranova.

Keywords: reconstruction of an n^{th}-order differential operator, inverse spectral problem with nonseparated boundary conditions, inverse problem of reconstructing a differential operator by several spectra