ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 490, с. 81–84

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.9

ОБ УСПОКОЕНИИ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

© 2020 г. А. Ш. Адхамова[1,*], А. Л. Скубачевский[1,]**

Поступило 21.10.2019 г.
После доработки 21.10.2019 г.
Принято к публикации 28.10.2019 г.

Рассматривается линейная система управления, описываемая системой дифференциальных уравнений нейтрального типа с несколькими запаздываниями и переменными матричными коэффициентами. Установлена связь между вариационной задачей для нелокального функционала, описывающей многомерную систему управления с запаздываниями, и соответствующей краевой задачей для системы дифференциально-разностных уравнений. Доказаны существование и единственность обобщенного решения краевой задачи.

Ключевые слова: системы управления с последействием, дифференциально-разностные уравнения, обобщенные решения

DOI: 10.31857/S2686954320010038

1. Теория управляемых систем с последействием изучалась многими авторами [1, 3, 6–8]. Обычно предполагалось, что функционально-дифференциальные уравнения, описывающие систему, имеют запаздывающий или нейтральный тип, при этом в случае нейтрального типа старшие члены с запазыванием имели достаточно малые коэффициенты. Задача об успокоении системы управления с последействием, описываемая системой дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа, рассматривалась Н.Н. Красовским [1]. В работах [4, 9] эта задача обобщалась на случай, когда уравнение, описывающее управляемую систему, содержит также старшие производные с запаздыванием. Многомерная система с постоянными матричными коэффициентами исследовалась в [2, 5].

2. В данной работе мы рассмотрим линейную нестационарную систему управления, описываемую системой дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа

$$\sum_{m=0}^{M} A_m(t)y'(t-m\tau) + \\ + \sum_{m=0}^{M} B_m(t)y(t-m\tau) = u(t), \quad 0 < t < T, \tag{1}$$

где $y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))^{\mathrm{T}}$ — вектор-функция, описывающая состояние системы, $u(t) = (u_1(t), \ldots \ldots u_n(t))^{\mathrm{T}}$ — вектор-функция управления, $A_m(t) = \{a_{ij}^m(t)\}_{i,j=1,\ldots,n}$, $B_m = \{b_{ij}^m(t)\}_{i,j=1,\ldots,n}$ — матрицы порядка $n \times n$ с элементами $a_{ij}^m(t)$, $b_{ij}^m(t)$, которые являются непрерывно дифференцируемыми функциями, $\tau = \mathrm{const} > 0$ — запаздывание.

Предыстория системы определяется начальным условием

$$y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-M\tau, 0], \tag{2}$$

где $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))^{\mathrm{T}}$ — заданная вектор-функция.

Рассмотрим задачу о приведении системы (1)–(2) в положение равновесия при $t \geq T$. Найдем такое управление $u(t)$, $0 < t < T$, что

$$y(t) = 0, \quad t \in [T - M\tau, T], \tag{3}$$

где $T > (M+1)\tau$.

Из всевозможных управлений будем искать управление, доставляющее минимум функционалу $\int_0^T |u(t)|^2 dt \to \min$, где $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, мы получаем вариационную задачу о минимуме функционала энергии

[1] *Математический институт им. С.М. Никольского Российского университета дружбы народов, Москва, Россия*
**E-mail: ami_adhamova@mail.ru*
***E-mail: skub@lector.ru*

$$J(y) := \int_0^T \left| \sum_{m=0}^M A_m(t)y'(t - m\tau) + \right.$$
$$\left. + \sum_{m=0}^M B_m(t)y(t - m\tau) \right|^2 dt \to \min. \quad (4)$$

3. Введем некоторые вещественные функциональные пространства.

Обозначим через $W_2^k(a,b)$ пространство абсолютно непрерывных на $[a, b]$ функций, имеющих производную k-го порядка из $L_2(a,b)$ со скалярным произведением

$$(v, w)_{W_2^k(a,b)} = \sum_{i=0}^k \int_a^b v^{(i)}(t)w^{(i)}(t)dt.$$

Пусть $\mathring{W}_2^k(a,b) = \{w \in W_2^k(a,b)\colon w^{(i)}(a) = w^{(i)}(b) = 0,\ i = 0,1,\ldots,k-1\}$.

Введем пространства вектор-функций

$$L_2^n(a,b) = \prod_{i=1}^n L_2(a,b), \quad W_2^{k,n}(a,b) = \prod_{i=1}^n W_2^k(a,b),$$
$$\mathring{W}_2^{k,n}(a,b) = \prod_{i=1}^n \mathring{W}_2^k(a,b)$$

со скалярными произведениями

$$(v, w)_{L_2^n(a,b)} = \sum_{i=1}^n (v_i, w_i)_{L_2(a,b)},$$
$$(v, w)_{W_2^{k,n}(a,b)} = \sum_{i=1}^n (v_i, w_i)_{W_2^k(a,b)},$$

где $v = (v_1,\ldots,v_n)^{\mathrm{T}}$, $w = (w_1, \ldots, w_n)^{\mathrm{T}}$.

4. Пусть $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ – решение вариационной задачи (2)–(4), где $\varphi \in W_2^{1,n}(-M\tau, 0)$.

Введем пространства $\tilde{W} = \{v \in W_2^{1,n}(-M\tau,T)\colon v(t) = 0,\ t \in (-M\tau,0) \cup (T - M\tau,T)\}$ и $\tilde{L} = \{v \in L_2^n(-M\tau, T)\colon v(t) = 0, t \in (-M\tau,0) \cup (T - M\tau, T)\}$.

В дальнейшем будем отождествлять пространство $\tilde{W}$ с $\mathring{W}_2^{1,n}(0,T - M\tau)$, не оговаривая этого специально. Пусть $v \in \tilde{W}$ – произвольная фиксированная функция. Тогда функция $y + sv \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ и удовлетворяет краевым условиям (2), (3) для каждого $s \in \mathbb{R}$. Обозначим $J(y + sv) = F(s)$. Поскольку $J(y + sv) \geq J(y) (s \in \mathbb{R})$, мы имеем $\left.\dfrac{dF}{ds}\right|_{s=0} = 0$. Отсюда получим

$$B(y,v) := \int_0^T \left(\sum_{m=0}^M A_m(t)y'(t - m\tau) + \right.$$
$$\left. + \sum_{m=0}^M B_m(t)y(t - m\tau) \right)^{\mathrm{T}} \times$$
$$\times \left(\sum_{l=0}^M A_l(t)v'(t - l\tau) + \sum_{l=0}^M B_l(t)\, v(t - l\tau) \right) d\tau = 0. \quad (5)$$

В слагаемых, содержащих $v'(t - l\tau)$ или $v(t - l\tau)$, сделаем замену переменной $\xi = t - l\tau$, а затем положим $t = \xi$. Учитывая краевые условия $v(t) = 0$, $t \in (-M\tau,0) \cup (T - M\tau,T)$ и интегрируя по частям, получим

$$B(y,v) = \int_0^{T-M\tau} \sum_{l,m=0}^M \{(A_m(t + l\tau) \times$$
$$\times\, y'(t + (l - m)\tau))^{\mathrm{T}}(A_l(t + l\tau)v'(t)) +$$
$$+ \left[(A_m(t + l\tau)\, y'(t + (l - m)\tau))^{\mathrm{T}} B_l(t + l\tau) - \right.$$
$$- ((B_m(t + l\tau)y(t + (l - m)\tau))^{\mathrm{T}} A_l(t + l\tau))' +$$
$$\left. + (B_m(t + l\tau)y(t + (l - m)\tau))^{\mathrm{T}}\, B_l(t + l\tau)\right] v(t)\} dt = 0. \quad (6)$$

Из (6) и определения обобщенной производной следует, что

$$\sum_{l,m=0}^M A_l^{\mathrm{T}}(t + l\tau)A_m(t + l\tau) \times$$
$$\times\, y'(t + (l - m)\tau) \in W_2^{1,n}(0,T - M\tau). \quad (7)$$

В силу (7) мы можем проинтегрировать по частям в тождестве (6) члены, содержащие сомножитель $v'(t)$. Тогда мы получим

$$-\left(\sum_{l,m=0}^M A_l^{\mathrm{T}}(t + l\tau)A_m(t + l\tau)y'(t + (l - m)\tau) \right)' +$$
$$+ \sum_{l,m=0}^M \{B_l^{\mathrm{T}}(t + l\tau)A_m(t + l\tau)y'(t + (l - m)\tau) -$$
$$-\left(\sum_{l,m=0}^M A_l^{\mathrm{T}}(t + l\tau)B_m(t + l\tau)y(t + (l - m)\tau) \right)' +$$
$$+ \sum_{l,m=0}^M B_l^{\mathrm{T}}(t + l\tau)B_m(t + l\tau) \times$$
$$\times\, y(t + (l - m)\tau)\} = 0 \ (t \in (0,T - M\tau). \quad (8)$$

Определение 1. Вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ называется *обобщенным решением задачи* (8), (2), (3), если выполняется условие (7) и $y(t)$ удовлетворяет системе уравнений (8) почти всюду на $(0,T - M\tau)$, а также краевым условиям (2), (3).

Вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ является обобщенным решением задачи (8), (2), (3) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет интегральному тождеству (6) для всех $v \in \mathring{W}_2^{1,n}(0, T - M\tau)$ и краевым условиям (2), (3). Таким образом, было доказано, что если на функции $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ достигается минимум функционала (4) с краевыми условиями (2), (3), то она является обобщенным решением задачи (8), (2), (3).

С другой стороны, если $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ – обобщенное решение задачи (8), (2), (3), то для любых $v \in \tilde{W}$

$$J(y + v) = J(y) + 2B(y, v) + J(v) \geq J(y).$$

Таким образом, доказана следующая

Т е о р е м а 1. *Пусть* $\varphi \in W_2^{1,n}(-M\tau, 0)$. *Функция* $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ *доставляет минимум функционалу* (4) *с краевыми условиями* (2), (3) *тогда и только тогда, когда она является обобщенным решением краевой задачи* (8), (2), (3).

5. Введем оператор $R_0\colon \tilde{L} \to L_2^n(0, T - M\tau)$ по формуле

$$(R_0 v)(t) = \sum_{k=0}^{M} A_k(t) v(t - k\tau). \tag{9}$$

Рассмотрим функционал

$$J_0(v) = \int_0^T ((R_0 v')(t))^2 dt, \quad v \in \tilde{W}. \tag{10}$$

Л е м м а 1. *Пусть* $\det A_0(t) \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$. *Тогда для всех* $w \in \tilde{W}$

$$J_0 \geq c_0 \|w\|^2_{W_2^{1,n}(0, T - M\tau)}, \tag{11}$$

где $c_0 > 0$ – *постоянная, не зависящая от* w.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (i) Предположим противное: для любого $k \in \mathbb{N}$ существует $w_k \in \tilde{W}$ такое, что

$$J_0(w_k) \leq \frac{1}{k} \|w_k\|^2_{W_2^{1,n}(0, T - M\tau)}. \tag{12}$$

Не ограничивая общности, будем считать, что

$$\|w_k\|^2_{W_2^{1,n}(0, T - M\tau)} = 1.$$

Тогда в силу компактности вложения $\tilde{W}$ в $L_2^n(0, T - M\tau)$ существует подпоследовательность $\{w_{k_m}\} \subset \tilde{W}$, сходящаяся в $L_2^n(0, T - M\tau)$ при $m \to \infty$ к некоторой вектор-функции $w_0 \in L_2^n(0, T - M\tau)$. В силу предположения $\|w_{k_m}\|_{W_2^{1,n}(0, T - M\tau)} = 1$ имеем $w_0 \neq 0$.

(ii) Пусть $0 < t < \tau$. Тогда выражение $(R_0 w'_{k_m})(t)$ примет вид

$$(R_0 w'_{k_m})(t) = A_0(t) w'_{k_m}(t).$$

Следовательно, в силу невырожденности матрицы $A_0(t)$ и неравенства (12) получим $w'_{k_m} \to 0$ в $L_2^n(0, \tau)$ при $m \to \infty$.

(iii) Пусть теперь $\tau < t < 2\tau$. Тогда

$$(R_0 w'_{k_m})(t) = A_0(t) w'_{k_m}(t) + A_1(t) w_{k_m}(t - \tau).$$

Отсюда в силу неравенства (12) и (ii) имеем $(R_0 w'_{k_m})(t) \to 0$ и $A_1(t) w'_{k_m}(t - \tau) \to 0$ в $L_2^n(\tau, 2\tau)$ при $m \to \infty$. Следовательно, поскольку матрица $A_0(t)$ невырождена, то $w'_{k_m}(t) \to 0$ в $L_2^n(\tau, 2\tau)$ при $m \to \infty$.

(iv) Аналогично за конечное число шагов докажем, что $w'_{k_m} \to 0$ в $L_2^n(l\tau, L)$ для любого $l \in \mathbb{N}$ такого, что $2\tau \leq l\tau < L$, где $L = \min\{(l + 1)\tau, T - M\tau\}$. Таким образом, $w_0 \in \mathring{W}_2^{1,n}(0, T - M\tau)$ и $w_0 = \mathrm{const} \neq 0$. Полученное противоречие доказывает лемму 1.

Из леммы 1 вытекает следующий результат.

Л е м м а 2. *Пусть* $\det A_0(t) \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$. *Тогда для всех* $w \in \tilde{W}$

$$J(w) \geq c_1 \|w\|^2_{W_2^{1,n}(0, T - M\tau)}, \tag{13}$$

где $c_1 > 0$ – *постоянная, не зависящая от* w.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $\det A_0(t) \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$. *Тогда для любого* $\varphi \in W_2^{1,n}(-M\tau, 0)$ *существует единственное обобщенное решение* $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ *краевой задачи* (8), (2), (3), *при этом*

$$\|y\|_{W_2^{1,n}(-M\tau, T)} \leq c \|\varphi\|_{W_2^{1,n}(-M\tau, 0)}, \tag{14}$$

где $c > 0$ *не зависит от* φ.

Для доказательства теоремы 2 однородная система дифференциально-разностных уравнений (8) с неоднородными краевыми условиями (2), (3) сводится к неоднородной системе уравнений с однородными краевыми условиями. Затем в силу леммы 2 в пространстве $\mathring{W}_2^{1,n}(0, T - M\tau)$ вводится эквивалентое скалярное произведение по формуле $(x, v)'_{\mathring{W}_2^{1,n}(0, T - M\tau)} = B(x, v)$ и применяется теорема Рисса об общем виде функционала в гильбертовом пространстве.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН “5-100” (Теорема 1) и гранта РФФИ № 20-01-00288 (Теорема 2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
2. *Леонов Д.Д.* К задаче об успокоении системы управления с последействием / Современная математика. Фундаментальные направления. 2010. Т. 37. С. 28–37.
3. *Осипов Ю.С.* О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. № 5. С. 605–618.
4. *Скубачевский А.Л.* К задаче об успокоении системы управления с последействием // ДАН. 1994. Т. 335. № 2. С. 157–160.
5. *Adkhamova A.S., Skubachevskii A.L.* Damping Problem for Multidimensional Control System with Delays // Distributed Computer and Communication Networks, Switzerland. 2016. V. 678. P. 612–623.
6. *Banks H.T., Kent G.A.* Control of Functional Differential Equations of Retarded and Neutral Type to Target Sets in Function Space // SIAM J. Control. 1972. V. 10. № 4. P. 567–593.
7. *Halanay A.* Optimal Controls for Systems with Time Lag // SIAM J. Control. 1968. V. 6. P. 213–234.
8. *Kent G.A.* A Maximum Principle for Optimal Control Problems with Neutral Functional Differential Systems // Bull. Amer. Math. Soc. 1971. V. 77. № 4. P. 565–570.
9. *Skubachevskii A.L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications, Operator Theory // Advances and Applications, Basel, Boston, Berlin: Birkhauser, 1997. V. 91.

ON A DAMPING PROBLEM FOR NEUTRAL CONTROL SYSTEM WITH DELAY

A. Sh. Adkhamova and A. L. Skubachevskii

Nikolskii Mathematical Institute of Peoples Friendship University of Russia, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS Yu.S. Osipov October 18, 2019

Received October 21, 2019

We consider linear control system described by the system of differential-difference equations of neutral type with several delays and variable matrix coefficients. We establish the relationship of the variational problem for the nonlocal functional, which describes multidimensional control system with delays, and the corresponding boundary value problem for system of differential-difference equations. It is proved the existence and uniqueness of generalized solution to this boundary value problem.

Keywords: control system with delay, difference-differential equations, generalized solutions