

© 2022 г. А.В. КАРПОВ (akarпов@hse.ru)
(Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Москва;
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова, Москва)

СТРУКТУРИРОВАННЫЕ ПРЕДПОЧТЕНИЯ: ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ¹

Проведен обзор работ по практически значимым ограничениям на профиль предпочтений коллектива: однопиковые предпочтения, сепарабельные предпочтения, предпочтения со свойством единственного пересечения, евклидовы предпочтения и их расширения. Рассмотрены как ординальные, так и дихотомические предпочтения. Для структурированных предпочтений представлена характеристика через запрещенные подпрофили и вероятность появления профиля с заданным свойством. Для сепарабельных предпочтений описан алгоритм построения иерархического дерева. Отдельно рассмотрены структурированные предпочтения, приводящие к единственному устойчивому паросочетанию в задаче о браке.

Ключевые слова: домен предпочтений, паросочетания, однопиковость.

DOI: 10.31857/S000523102209001X, **EDN:** AIIVES

1. Введение

Существует множество подходов к моделированию предпочтений и постановке задачи их агрегирования [1]. Базовой моделью предпочтения является строгий линейный порядок. Кортж линейных порядков всех агентов называется профилем предпочтений. Стандартной постановкой задачи коллективного выбора является определение общественного выбора (предпочтения) как функции от профиля предпочтений.

Одной из основных теоретических проблем в данной области является парадокс Кондорсе: предпочтение коллектива, построенное на основе правила простого большинства, может иметь циклы. Данный парадокс возникает при трех и более альтернативах. К. Эрроу [2] сформулировал ряд аксиом, которым должна обладать процедура агрегирования предпочтений коллектива. Система аксиом оказалась несовместной при трех и более альтернативах. А. Гиббард и М. Саттертуэйт [3, 4] показали, что при аналогичных предположениях любое правило агрегирования является манипулируемым, т.е.

¹ Работа частично профинансирована Программой фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

допускает наличие выгоды для участника от искажения собственного предпочтения.

Одним из решений парадоксов невозможности является сужение области применения правил агрегирования. На области профилей предпочтений, не создающих циклов при использовании правила простого большинства, правило простого большинства удовлетворяет аксиомам К. Эрроу, и любое правило, отличающееся от правила простого большинства на этой области, будет нарушать условия, близкие к аксиомам К. Эрроу [5, 6]. Правило простого большинства имеет несколько аксиоматических обоснований [7–11], несложно с вычислительной точки зрения и интуитивно понятно участникам голосования.

Задача нахождения всех профилей предпочтений, для которых правило простого большинства дает ациклическое отношение сравнения альтернатив, решена только для случая трех и четырех альтернатив [12]. Для трех альтернатив найдено компактное необходимое и достаточное условие на профиль предпочтений: одна из альтернатив должна быть первой у не менее чем половины агентов или одна из альтернатив должна быть последней у не менее чем половины агентов [13].

Необходимость сужения области рассматриваемых профилей предпочтений привела к теории доменов предпочтений. Под доменом предпочтений понимается подмножество линейных порядков на фиксированном множестве альтернатив. Домен генерирует профили предпочтений, состоящие только из линейных порядков, составляющих домен.

Ограничение предпочтений членов общества предпочтениями из некоторого домена является упрощением, но так как предпочтения в обществе формируются не независимо, то значительная часть его членов имеет ограниченный набор линейных порядков, и ограничение на домен предпочтений представляется разумной предпосылкой для моделирования коллективного выбора. Домены как ограничения на рациональность рассмотрены в [14].

Доменом Кондорсе называется такое подмножество предпочтений, что любой профиль предпочтений с нечетным числом агентов приводит к ациклическому решению по правилу простого большинства. Для трех, четырех и пяти альтернатив найдены все домены Кондорсе [15, 16]. Они значительно отличаются по структуре и размеру. Для 6 альтернатив домен Кондорсе максимального размера содержит 45 линейных порядков, для 7 — 100 линейных порядков. Для большего числа альтернатив задача нахождения домена Кондорсе максимального размера остается нерешенной [17]. Последние результаты о максимальных доменах Кондорсе представлены в [18–20]. Некоторое обобщение понятия домена Кондорсе обсуждается в [21, 22].

Некоторые домены Кондорсе представляют собой естественные, хорошо интерпретируемые ограничения на область задания предпочтений. К. Инада [23, 24] и А. Сен [25] описали домены однопиковых предпочтений, однолунковых предпочтений, сепарабельных предпочтений. Дж. Миррлис и К. Робертс

[26, 27] предложили концепцию предпочтений со свойством единственного пересечения. Различные ограничения на профиль предпочтений получили название *структурированных предпочтений* [28]. Все упомянутые выше виды структурированных предпочтений имеют множество полезных свойств и приложений, которые разобраны в данном обзоре.

Кроме гарантии существования решения задачи агрегирования в постановке К. Эрроу, структурированные предпочтения снижают вычислительную сложность многих задач теории коллективного выбора, создают удобное графическое представление предпочтений, имеют аксиоматическое обоснование.

В данном обзоре представлены результаты по характеристике структурированных профилей предпочтений через запрещенные подпрофили и по нахождению числа профилей с заданными свойствами. Характеризация структурированных предпочтений важна для выявления ключевых внутренних структур и для построения алгоритмов распознавания структурированных предпочтений. Количество структурированных профилей предпочтений дает возможность найти вероятность возникновения таких профилей в модели дискретного равновероятного распределения. Хотя такое распределение не отражает реальные данные, нахождение вероятностей представляет интерес для сравнения вероятностей разных видов предпочтений между собой.

В рамках модели равновероятного распределения общие формулы (для произвольного числа агентов и альтернатив) получены для сепарабельных предпочтений [29] и некоторых подклассов однопиковых предпочтений и предпочтений со свойством единственного пересечения [30]. Для малого числа альтернатив задача подсчета числа однопиковых профилей предпочтений решена в [31–33].

Кроме доменов Кондорсе в литературе представлены работы по изучению диктаторских доменов, т.е. доменов, для которых единственной процедурой, удовлетворяющей аксиомам К. Эрроу [2], является диктаторская процедура. Примерами диктаторских доменов являются домены циклической группы [34], круговые домены [35], топ-круговые домены [36], однопиковые на окружности домены [37]. Диктаторский домен минимального размера содержит только 6 типов линейных порядков при любом количестве альтернатив [38]. Диктаторские домены имеют гораздо меньше приложений, чем домены Кондорсе, и не будут рассмотрены в данном обзоре.

Кроме структурированных доменов в задаче агрегирования ординальных предпочтений в обзоре рассмотрены структурированные профили предпочтений в задаче о марьяже (обобщенные паросочетания) и структурированные дихотомические предпочтения.

Структура обзора следующая. Раздел 2 вводит основные понятия и теорию максимальных доменов Кондорсе. Раздел 3 посвящен структурированным ординальным предпочтениям. Раздел 4 содержит анализ структурированных

профилей предпочтений в задаче о марьяже. Раздел 5 исследует дихотомические предпочтения. Раздел 6 содержит заключение.

2. Основные понятия

В данной статье приняты следующие обозначения: множество альтернатив обозначается через $A = \{1, \dots, m\}$, а множество агентов через $\mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$. Каждый агент $i \in \mathcal{N}$ имеет линейный порядок предпочтения P_i на множестве A (далее, если не оговорено иное, под предпочтением подразумевается линейный порядок). Максимальный элемент в этом порядке является наилучшим, минимальный — наихудшим. Для $aP_i c$ и $bP_i c$ вводится обозначение $\{a, b\}P_i c$. Пусть $\mathcal{L}(A)$ будет множеством всех возможных линейных порядков на множестве X . Кортеж из n линейных порядков является профилем предпочтений: $\mathcal{P} = (P_1, \dots, P_n) \in \mathcal{L}(A)^n$.

Доменом предпочтений называется подмножество линейных порядков. Профиль предпочтений порожден доменом, если предпочтения всех агентов принадлежат домену. Под доменом структурированных предпочтений здесь понимается максимальный домен структурированных предпочтений, т.е. при добавлении к такому домену любого дополнительного линейного порядка домен теряет ключевое свойство, например, свойство однопиковости.

В качестве единственной модели распределения вероятностей в данной работе используется предпосылка о независимом и равновероятном появлении каждого линейного порядка предпочтения у каждого агента. Количество элементарных событий (профилей предпочтений) равно $(m!)^n$. Подсчитав количество профилей предпочтений с определенным свойством $\#structured(m, n)$, можно рассчитать вероятность появления структурированного профиля предпочтений как $\frac{\#structured(m, n)}{(m!)^n}$.

2.1. Максимальные домены Кондорсе

Парадокс Кондорсе представляет собой ситуацию, в которой предпочтение коллектива, построенное по правилу простого большинства, содержит цикл. Простейшим примером является профиль предпочтений с тремя агентами и тремя альтернативами (предпочтения записаны в столбец без знака бинарного отношения P)

1	3	2
2	1	3
3	2	1.

Далее в работе будут определены различные конфигурации — определенные фрагменты доменов, наличие или отсутствие которых будут определять свойства доменов.

Конфигурация 1 (цикл Кондорсе). Существуют три агента $i, j, k \in \mathcal{N}$ и три альтернативы $a, b, c \in A$ такие, что выполнено $aP_i bP_i c$, $cP_j aP_j b$, $bP_k cP_k a$.

Если домен предпочтений содержит конфигурации 1, то среди профилей предпочтений, порожденных данным доменом, найдется профиль с парадоксом Кондорсе. Определение домена Кондорсе через ациклическое отношение коллективных предпочтений, построенных по правилу простого большинства, неоперационально, поэтому для практического применения используют эквивалентные формулировки, представленные в теореме 1.

Теорема 1 [25]. Существуют следующие эквивалентные определения домена Кондорсе:

- (i) *Домен предпочтений является доменом Кондорсе тогда и только тогда, когда он не содержит конфигурации 1;*
- (ii) *Домен предпочтений является доменом Кондорсе тогда и только тогда, когда для каждой тройки альтернатив существует альтернатива из этой тройки, для которой верно, что она либо никогда не стоит на первом месте в сужении домена на данную тройку, либо никогда не стоит на втором месте в сужении домена на данную тройку, либо никогда не стоит на третьем месте в сужении домена на данную тройку.*

Условие (ii) теоремы 1 отражает три способа избежать конфигурацию 1, где каждая альтернатива находится и на первом, и на втором, и на третьем месте. Больше число эквивалентных определений домена Кондорсе можно найти в обзоре [39].

Одним из больших доменов Кондорсе является домен Фишберна [40], который удовлетворяет следующей перемежающей схеме. При упорядочении альтернатив a_1, \dots, a_m для каждой тройки альтернатив a_i, a_j, a_k верно, что если медиана чисел $i \leq j \leq k$ четна (нечетна), то альтернатива a_j никогда не стоит на первом месте в сужении домена на эту тройку, и если медиана чисел $i \leq j \leq k$ нечетна (четна), то альтернатива a_j никогда не стоит на последнем месте в сужении домена на эту тройку. Домен Фишберна связан со многими комбинаторными структурами: проволочными диаграммами [17], ромбическими паркетами [41], с конечными группами Коксетера [42].

Количество линейных порядков в домене Фишберна равно [17]:

$$|F_m| = (m + 3) 2^{m-3} - \begin{cases} m - \frac{3}{2} \left(\frac{m-2}{2} - 1 \right) & \text{для четных } m; \\ \frac{m-1}{2} \left(\frac{m-1}{2} \right) & \text{для нечетных } m. \end{cases}$$

Домен Фишберна обладает максимальным размером среди всех доменов Кондорсе при числе альтернатив, не превышающем семи, и является основой для построения больших доменов Кондорсе для любого числа альтернатив [20, 40], но данный домен не имеет ясной интерпретации и не имеет практиче-

ского применения. Известно, что при большом m существует домен Кондорсе, содержащий не менее $2,189^m$ линейных порядков [20]. Раздел 3 исследует домены меньшего размера, но с хорошо интерпретируемой структурой.

3. Структурированные ординальные предпочтения

3.1. Однопиковые предпочтения

Однопиковые предпочтения предполагают некоторое упорядочение альтернатив вдоль так называемой оси (под *осью* понимается линейный порядок альтернатив, понятие расстояния между альтернативами не вводится). Каждый агент имеет идеальную альтернативу на этой оси. Если две альтернативы расположены по одну сторону от идеальной альтернативы, включая возможное совпадение с идеальной, то та альтернатива, которая находится ближе к идеальной точке, предпочитается альтернативе, находящейся дальше. Альтернативы с разных сторон от идеальной могут быть упорядочены любым способом.

Оси с прямым порядком альтернатив и с обратным порядком альтернатив соответствуют идентичным друг другу однопиковым доменам. В этом смысле данные оси эквивалентны. Например, оси 1234 и 4321 эквивалентны. Таким образом, существуют $m!/2$ различных осей и доменов однопиковых предпочтений. Домены однопиковых предпочтений содержат по 2^{m-1} линейных порядков [43]. Например, ось 1234 задает следующий домен из восьми линейных порядков:

1	2	2	2	3	3	3	4
2	1	3	3	2	2	4	3
3	3	1	4	1	4	2	2
4	4	4	1	4	1	1	1.

Однопиковые домены могут иметь непустое пересечение. Для однопикового профиля предпочтений нельзя однозначно определить, каким однопиковым доменом он порожден. Например, профиль $(123, 123, 213)$ может быть порожден как однопиковым доменом $\{123, 213, 231, 321\}$ с осью 123, так и однопиковым доменом $\{312, 132, 123, 213\}$ с осью 312. Алгоритмы распознавания однопиковых профилей предпочтений [44, 45] отвечают на вопрос о возможности построения подходящей оси и конструируют одну из возможных осей.

Однопиковые предпочтения имеют массу приложений в экономике, психологии, политических науках. Причиной этого являются теоретические свойства однопиковых предпочтений. Во-первых, однопиковые предпочтения хорошо интерпретируемы и допускают удобную визуализацию. В политической науке распространена шкала правых-левых кандидатов, партий, в маркетинге агентов различают по лояльности к тому или иному бренду таким образом, что они выстраиваются в линию. Во-вторых, теорема о медианном избирателе [46], гласящая, что политическая позиция двух кандидатов при свободной

конкуренции будет стремиться к позиции медианного избирателя, дает дополнительное обоснование правилу простого большинства. В-третьих, многие вычислительные проблемы теории коллективного выбора значительно упрощаются при однопиковых предпочтениях [47, 48], например упрощаются задачи манипулирования (подробнее о задачах манипулирования см. [49]). В-четвертых, однопиковые предпочтения имеют аксиоматическое обоснование [50]. Домен однопиковых предпочтений для каждой альтернативы имеет хотя бы один линейный порядок с данной альтернативой на первом месте. Все линейные порядки в этом домене связаны друг с другом, т.е. один линейный порядок можно получить из другого с помощью последовательного обращения пар соседних альтернатив линейных порядков, при этом все промежуточные линейные порядки тоже принадлежат тому же домену. Кроме того, в этом домене существует пара линейных порядков, которые имеют обратный порядок альтернатив по отношению друг к другу. Таким образом, домен однопиковых предпочтений состоит из достаточно близких предпочтений, но в то же время достаточно разнообразен, так как содержит пару противоположных предпочтений.

Однолунковые предпочтения являются полной противоположностью однопиковых предпочтений. Все альтернативы также находятся на оси, только каждый агент имеет свою наихудшую альтернативу на этой оси и чем дальше от этой альтернативы, тем лучше. В экономике данные предпочтения встречаются при моделировании предпочтений относительно общественного антиблага (например, предпочтения местных жителей относительно расположения на побережье загрязняющего предприятия). Анализ, проведенный для однопиковых предпочтений, практически всегда можно применить к однолунковым, поэтому далее в статье однолунковые предпочтения исследоваться не будут.

Наихудшей альтернативой для каждого из агентов при однопиковых предпочтениях является один из концов оси. Таким образом, профиль предпочтений не может иметь трех агентов с разными наихудшими альтернативами.

Конфигурация 2. Существуют три агента $i, j, k \in \mathcal{N}$ и три альтернативы $a, b, c \in A$ такие, что выполнено $\{a, b\}P_i c$, $\{a, c\}P_j b$, $\{b, c\}P_k a$.

Конфигурация 2 уточняет условие (ii) из теоремы 1: в каждой тройке альтернатив существует альтернатива из этой тройки, для которой верно, что она никогда не стоит на третьем месте в сужении домена на данную тройку. Профиль предпочтений, который не содержит конфигурацию 2, называется однопиковым по Эрроу (подробнее о данных предпочтениях см. в [2, 20, 31, 51, 52]).

Конфигурация 3. Существуют два агента $i, j \in \mathcal{N}$ и четыре альтернативы $a, b, c, d \in A$ такие, что выполнено $\{a, d\}P_i b P_i c$, $\{c, d\}P_j b P_j a$.

Конфигурация 3 задает ограничение на пары агентов. При фиксации одного из агентов множество возможных предпочтений второго агента соответствует некоторому паттерну перестановок, который задается через запре-

ценные комбинации (подробнее о паттернах перестановок см. в [53]). Число перестановок в паттерне дает число профилей с двумя агентами.

Теорема 2 [54]. Профиль предпочтений является однопиковым тогда и только тогда, когда он не содержит конфигураций 2 и 3.

Теорема 3 [31]. Количество однопиковых профилей предпочтений асимптотически равно

$$\#SP(m, n) \approx \frac{m!}{2} 2^{(m-1)n}.$$

Точное количество однопиковых профилей известно для двух агентов и произвольного количества альтернатив [33], трех, четырех [31], пяти альтернатив [32] и произвольного количества агентов.

Однопиковые предпочтения имеют множество расширений. Одним из направлений является рассмотрение разных классов графов вместо оси альтернатив. Примерами такого расширения являются однопиковые на деревьях предпочтения [55], однопиковые на окружности предпочтения [37], однопиковые на произвольном графе предпочтения [56, 57].

В модели однопиковых на деревьях предпочтений альтернативы являются вершинами связного ациклического графа (дерева) и каждый путь представляет собой ось для соответствующего подпрофиля однопиковых предпочтений. В силу разнообразия деревьев данные предпочтения очень разнообразны. Существуют алгоритмы нахождения дерева, представляющего данный профиль [58, 59], а также алгоритмы для нахождения дерева с некоторыми нужными свойствами, например с малым количеством листьев [60]. Специальная форма деревьев облегчает нахождение комитета в задаче пропорционального представительства [61].

Однопиковые на окружности предпочтения определяются аналогично классическим однопиковым предпочтениям. Все альтернативы располагаются на окружности. Каждый агент имеет свою наилучшую альтернативу и наихудшую альтернативу. Вдоль пути от наихудшей альтернативы до наилучшей альтернативы упорядочены по возрастанию предпочтительности. Альтернативы с разных сторон от наилучшей (наихудшей) альтернативы могут быть упорядочены любым способом.

Всего существуют $\frac{(m-1)!}{2}$ доменов однопиковых на окружности предпочтений, в каждом из которых $m2^{m-2}$ линейных порядков. Следующие три конфигурации характеризуют однопиковые на окружности предпочтения.

Конфигурация 4. Существуют два агента $i, j \in \mathcal{N}$ и пять альтернатив $a, b, c, d, e \in A$ такие, что выполнено $\{a, b\}P_i c P_i \{d, e\}$, $\{a, e\}P_j c P_j \{b, d\}$.

Конфигурация 4 задает паттерн перестановок, называемый квадратными перестановками [62].

Конфигурация 5. Существуют три агента $i, j, k \in \mathcal{N}$ и четыре альтернативы $a, b, c, d \in A$ такие, что выполнено $\{a, b\}P_i \{c, d\}$, $\{a, c\}P_j \{b, d\}$, $\{a, d\}P_k \{b, c\}$.

Конфигурация 6. Существуют три агента $i, j, k \in \mathcal{N}$ и четыре альтернативы $a, b, c, d \in A$ такие, что выполнено $\{a, b\}P_i\{c, d\}$, $\{b, c\}P_j\{a, d\}$, $\{c, a\}P_k\{b, d\}$.

Теорема 4 [37]. Профиль предпочтений является однопиковым на окружности тогда и только тогда, когда он не содержит конфигураций 4, 5 и 6.

Зная количество доменов и количество линейных порядков в каждом домене, получим приблизительное число однопиковых на окружности профилей предпочтений.

Теорема 5. Количество однопиковых на окружности профилей предпочтений асимптотически равно

$$\#SPC(m, n) \approx \frac{(m-1)!}{2} (m2^{m-2})^n.$$

Однопиковые на окружности предпочтения имеют главным образом вычислительные приложения в области задачи пропорционального представительства [37].

Еще более широкий класс предпочтений моделируется предпочтениями, близкими к однопиковым. Это класс предпочтений, которые сводятся к однопиковым предпочтениям после удаления либо k альтернатив, либо k агентов, либо разбиения множества агентов или альтернатив на k частей, либо трансформации предпочтений через k парных инверсий последовательно стоящих альтернатив в некоторых предпочтениях и т.д. Параметр k в данном определении служит мерой, характеризующей расстояние данного профиля до ближайшего однопикового профиля. Для разных целей такое расстояние можно определить по-разному (удаление агентов, удаление альтернатив и т.д.). Основной проблемой данного подхода является сложность определения принадлежности профиля к тому или иному классу предпочтений. Значительное число таких задач являются NP-трудными [63], но существуют алгоритмы аппроксимации [64]. В то же время некоторые классы предпочтений, близких к однопиковым, выявляются просто и позволяют снизить сложность задач манипулирования и контроля исхода голосования [65–72], задач пропорционального представительства [73], задачи ранжирования по Кемени [74].

Еще одним расширением однопиковых предпочтений являются однопиковые предпочтения при неполных данных [75]. Если исходные данные являются частичными порядками, а не линейными, то задача возможного восстановления предпочтений до однопикового профиля предпочтений является NP-трудной. Если исходные данные представляют собой слабый порядок, то существует алгоритм полиномиальной сложности для определения возможности восстановления профиля предпочтений до однопикового.

3.2. Сепарабельные предпочтения

К. Инада [23, 24] ввел свойство сепарабельности следующим образом. Профиль предпочтений является *сепарабельным*, если для любого подмножества

$X \subseteq A$, $|X| \geq 2$ существует его разбиение на такие непустые подмножества X' , $X \setminus X'$, что для каждого агента $i \in \mathcal{N}$ имеем либо $aP_i b$ для каждого $a \in X'$, $b \in X \setminus X'$, либо $bP_i a$ для каждого $a \in X'$, $b \in X \setminus X'$. Примерами максимальных доменов сепарабельных предпочтений являются

$$D_1 = \left\{ \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 4 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right\}, \quad D_2 = \left\{ \begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 3 & 4 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 3 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right\}.$$

Все максимальные домены однопиковых предпочтений одинаково устроены, т.е. при фиксированном количестве альтернатив один домен можно получить из другого через переименование альтернатив. В отличие от однопиковых, максимальные сепарабельные домены структурно отличаются друг от друга и не могут быть сведены к одному домену через переименование альтернатив (см. вышеприведенные примеры).

Множество сепарабельных профилей предпочтений замкнуто по отношению к операции удаления альтернатив из профиля. Таким образом, сужение сепарабельного профиля предпочтений на любое подмножество альтернатив является сепарабельным.

Множество альтернатив $X \subseteq A$ называется *множеством клонов* для профиля \mathcal{P} , если в предпочтении каждого агента альтернативы из X стоят последовательно. Назовем *нетривиальными* множества клонов, состоящие из более чем одной альтернативы и не совпадающие с множеством всех альтернатив. К примеру, множества $\{1, 2\}$ и $\{3, 4\}$ являются нетривиальными множествами клонов для D_1 . Для D_2 такими множествами являются множества $\{3, 4\}$ и $\{2, 3, 4\}$. Множества клонов объединяют альтернативы, которые в некотором смысле близки друг к другу для каждого агента. Множества клонов являются устоявшимся инструментом анализа в теории коллективного выбора [76, 77].

Ациклический ориентированный граф, в котором только одна вершина не имеет входящих дуг, а остальные вершины имеют единственную входящую дугу, является исходящим деревом. Вершина, не имеющая входящих дуг, является корнем. Вершины, не имеющие исходящих дуг, являются терминальными. Вершинно-индуцированным поддеревом является часть исходящего дерева, которая содержит некоторую вершину дерева, всех потомков этой вершины и соединяющие их дуги. Терминальные вершины и само исходящее дерево являются вершинно-индуцированными поддеревьями.

Исходящее дерево T , в котором альтернативы являются листьями этого дерева, а исходящие дуги каждой вершины упорядочены, будем называть *иерархическим деревом*, представляющим профиль сепарабельных предпочтений \mathcal{P} , если для каждого множества клонов X профиля \mathcal{P} верно, что существуют вершина и множество вершинно-индуцированных поддеревьев, в корни которых ведут последовательные исходящие дуги этой вершины, такие,

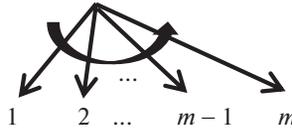


Рис. 1. Иерархическое дерево для линейного порядка $12 \dots m$.

что множеством листьев поддеревьев является множество X . Для каждой вершины определен порядок исходящих дуг и, соответственно, порядок дочерних вершин и вершинно-индуцированных поддеревьев, для которых данные вершины являются корневыми.

Планарное представление иерархического дерева отображает не только дуги и вершины, но и порядок дуг. К примеру, рис. 1 представляет иерархическое дерево для профиля предпочтений, состоящего из одного линейного порядка $12 \dots m$. Полуокруглая стрелка отображает порядок дуг. В данном профиле предпочтений все множества вида $\{i, \dots, j\}$, где $i < j$, являются множествами клонов. Каждое множество клонов образует последовательность терминальных вершин. Таким образом, для каждого множества клонов существует множество вершинно-индуцированных поддеревьев, в корни которых ведут последовательные исходящие дуги, такое, что множеством листьев поддеревьев является данное множество клонов. Инверсия порядка исходящих дуг не нарушает возможность нахождения нужной последовательности исходящих дуг для каждого множества клонов. Способность иерархического дерева и его планарного представления представлять профиль предпочтений инвариантна к операции инверсии порядка исходящих дуг. Произвольная перестановка дуг может привести к невозможности нахождения множества последовательных дуг для некоторого множества клонов. Рассматриваемый вид деревьев является частным случаем PQ-деревьев, см. [78].

Классу бинарных иерархических деревьев со всевозможными порядками исходящих дуг однозначно соответствует бинарное дерево с неупорядоченными дугами. Поэтому каждому максимальному сепарабельному домену соответствует бинарное дерево с неупорядоченными дугами. Построить это дерево для заданного домена можно следующим образом. Берется произвольный линейный порядок из домена. Последовательно строятся иерархические деревья для двух, трех и т.д. лучших альтернатив выбранного линейного порядка. Алгоритм останавливается после построения иерархического дерева для m альтернатив. Для двух альтернатив иерархическое дерево состоит из корня и двух листьев. На каждом шаге это дерево дополняется новой нетерминальной вершиной и новой терминальной вершиной следующим образом. В дереве, построенном на предыдущем шаге, находятся вершина и соответствующее ей вершинно-индуцированное поддерево такое, что множество листьев (альтернатив) этого поддерева соседствует с новой альтернативой во всех сужениях линейных порядков домена на множество альтернатив

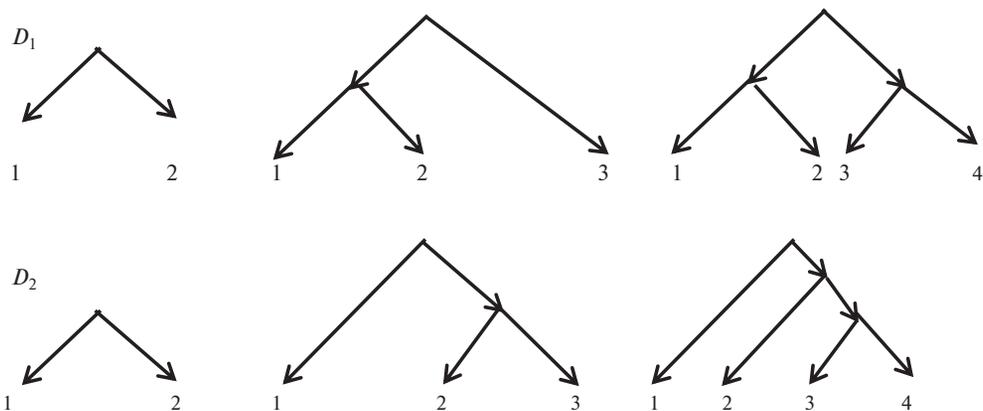


Рис. 2. Пример реализации алгоритма построения иерархического дерева альтернатив для домена D_1 и домена D_2 .

строящегося дерева (множество альтернатив предыдущего шага, объединенное с новой альтернативой). Если найденная вершина не является корневой, то новая вершина делит входящую дугу найденной вершины на две дуги, иначе к дереву достраиваются новый корень и дуга, соединяющая новый корень со старым. Дополнительная дуга соединяет новую нетерминальную вершину с новой терминальной вершиной.

Иллюстрация к алгоритму построения иерархических деревьев для доменов D_1 и D_2 , определенных в начале данного раздела, приведена на рис. 2. В данном примере за основу взят линейный порядок 1234.

По иерархическому дереву можно восстановить максимальный сепарабельный домен. Для выбранного планарного представления дерева линейный порядок, принадлежащий домену, можно построить рекурсивно, выполняя поиск в глубину, начав от корня (согласно порядку исходящих дуг перебираем исходящие дуги; для вершины, в которую ведет дуга, запускаем тот же алгоритм; при нахождении терминальной вершины добавляем ее в линейный порядок и возвращаемся к вершине, у которой еще остались нерассмотренные дуги). Далее необходимо перебрать все инверсии интервалов построенного линейного порядка, соответствующих всем вершинно-индуцированным поддеревьям, и все построенные таким образом линейные порядки будут принадлежать сепарабельному домену. Каждый максимальный домен сепарабельных предпочтений соответствует последовательному разбиению альтернатив на два подмножества.

Для профиля сепарабельных предпочтений и для немаксимального домена итеративный алгоритм построения иерархического дерева модифицируется. Для описания алгоритма введем новое понятие. *Минимальным покрытием множества клонов X для профиля \mathcal{P} является множество клонов $C(X)$, которое содержит множество X , не совпадает с множеством X и не содержит в качестве подмножества другое нетривиальное множество клонов, содержащее*

множество X . Минимальное покрытие может быть не единственным, но количество минимальных покрытий не может превышать двух [77]. Например, для профиля предпочтений, состоящего из одного линейного порядка 123, имеем $C(\{1\}) = \{1, 2\}$, а для множества $\{2\}$ минимальных покрытий будет два: $\{1, 2\}$ и $\{2, 3\}$.

Алгоритм построения иерархического дерева начинается с выбора одного (произвольного) линейного порядка из профиля предпочтений или из немаксимального домена и построения иерархического дерева для сужения профиля предпочтений на множество из двух лучших альтернатив выбранного предпочтения. Для двух альтернатив иерархическое дерево состоит из корня и двух листьев. Порядок дуг для данного дерева выбирается произвольно. Далее на каждом шаге строится сужение профиля предпочтений на новое подмножество альтернатив, добавляя следующую по предпочтению альтернативу в выбранном линейном порядке. Таким образом, построен сепарабельный профиль предпочтений на некотором множестве альтернатив, в котором одна из альтернатив является новой (альтернатива x). Эта альтернатива является худшей в одном из линейных порядков. Существует единственное минимальное покрытие множества, состоящего из альтернативы x .

Согласно определению сепарабельных предпочтений построенное минимальное покрытие $C(\{x\})$ можно разбить на два множества клонов. В силу построения минимального покрытия данным разбиением являются множества $\{x\}$ и $C(\{x\}) \setminus x$.

Количество минимальных покрытий множества $C(\{x\}) \setminus x$ может быть равно одному или двум. В первом случае верно, что $C(\{x\}) = C(C(\{x\}) \setminus x)$. В этом случае дерево достраивается новой нетерминальной вершиной, новой терминальной вершиной (альтернатива x) и новыми дугами способом, описанным в алгоритме построения иерархического дерева для максимального сепарабельного домена. Порядок исходящих дуг новой нетерминальной вершины выбирается произвольно. Если дерево было бинарным, то оно останется бинарным. Во втором случае дерево достраивается новой терминальной вершиной и новой дугой таким образом, что новая терминальная вершина является дочерней к той же вершине, что и вершина, являющаяся корневой для вершинно-индуцированного поддерева, листьями которого является множество $C(\{x\}) \setminus x$. Кроме того, новая терминальная вершина будет одновременно соседней к вершине, являющейся корневой для вершинно-индуцированного поддерева, листьями которого является множество $C(\{x\}) \setminus x$, и крайней (первой или последней) в соответствующем порядке дочерних вершин. В этом случае итоговое иерархическое дерево не будет бинарным.

Алгоритм останавливается после выполнения шага для наихудшей альтернативы в выбранном линейном порядке.



Рис. 3. Иерархическое дерево альтернатив, взято из [79].

Разные профили сепарабельных предпочтений, как и разные немаксимальные домены сепарабельных предпочтений, могут иметь одинаковые иерархические деревья. В работе П. Фалишевского и др. [79] найдено количество профилей сепарабельных предпочтений с фиксированным количеством агентов и альтернатив, приводящих к заданному иерархическому дереву, и описан алгоритм равновероятной генерации таких профилей.

Пример иерархического дерева альтернатив представлен на рис. 3. Множество альтернатив соответствует множеству листьев дерева. Вершины дерева соответствуют категориям альтернатив, которые далее делятся на подкатегории. Согласно рис. 2 все множество напитков делится на холодные и горячие. Каждый агент предпочитает все холодные напитки всем горячим, или, наоборот, все горячие напитки всем холодным. Для каждого последующего разбиения альтернатив одна подкатегория лучше другой того же уровня.

Каждый из $(2m - 3)!$ максимальных сепарабельных доменов содержит 2^{m-1} предпочтений. Каждый максимальный сепарабельный домен содержит такое же количество линейных порядков, как и максимальный домен однопиковых предпочтений, но так как количество сепарабельных доменов больше количества однопиковых, то количество сепарабельных профилей предпочтений превышает количество однопиковых профилей предпочтений.

Теорема 6 [29]. Количество сепарабельных профилей предпочтений асимптотически равно

$$\#GS(m, n) \approx (2m - 3)!2^{(m-1)n}.$$

Конфигурация 7. Существуют три агента $i, j, k \in \mathcal{N}$ и три альтернативы $a, b, c \in A$ такие, что выполнено $(aP_i bP_i c$ или $cP_i bP_i a)$, $(bP_j cP_j a$ или $aP_j cP_j b)$, $(bP_k aP_k c$ или $cP_k aP_k b)$.

Конфигурация 7 обеспечивает разнообразие медианных альтернатив. Запрет на конфигурацию 7 ограничивает двумя количество альтернатив в любой тройке, что соответствует одному из способов реализации ограничения (ii) из теоремы 1.

Конфигурация 8. Существуют два агента $i, j \in \mathcal{N}$ и четыре альтернативы $a, b, c, d \in A$ такие, что выполнено $aP_i bP_i cP_i d$ и ($bP_j dP_j aP_j c$ или $cP_j aP_j dP_j b$).

Конфигурация 8 задает паттерн перестановок, называемый сепарабельными перестановками (подробнее о сепарабельных перестановках см. в [80]).

Теорема 7 [54]. Профиль предпочтений является сепарабельным тогда и только тогда, когда он не содержит конфигураций 7 и 8.

Конфигурация 9. Существуют два агента $i, j \in \mathcal{N}$ и четыре альтернативы $a, b, c, d \in A$ такие, что выполнено $aP_i bP_i cP_i d$ и ($bP_j aP_j dP_j c$ или $cP_j dP_j aP_j b$).

Конфигурация 9 используется в определении усиленно сепарабельных предпочтений, чья характеристика представлена в теореме 9.

Теорема 8 [81]. Профиль предпочтений является усиленно сепарабельным тогда и только тогда, когда он не содержит конфигураций 7, 8 и 9.

Усиленно сепарабельные предпочтения представляют интерес прежде всего с точки зрения их комбинаторных свойств [81].

Сепарабельные предпочтения упрощают классические задачи теории коллективного выбора только в случае иерархических деревьев ограниченной высоты [79]. Сепарабельные предпочтения создают условия для существования решения задачи случайного распределения неделимых объектов [82]. При ограничении домена до лестничных предпочтений решение задачи становится единственным [83].

Домен предпочтений является *лестничным*, если существует слабый порядок на множестве альтернатив, такой что каждый класс эквивалентности состоит из одной или двух альтернатив, и предпочтения, входящие в домен, являются линеаризацией данного слабого порядка. Лестничный домен максимального размера содержит $2^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$ предпочтений. Лестничный домен предпочтений не является максимальным доменом Кондорсе, но в задаче распределения неделимых объектов не строится предпочтение коллектива и отношение, порожаемое правилом простого большинства, не играет никакой роли.

3.3. Предпочтения со свойством единственного пересечения

Домен предпочтений со свойством единственного пересечения характеризуется линейным порядком (осью) на множестве агентов. Для каждой пары альтернатив подмножества агентов, имеющие одинаковые предпочтения на этой паре, составляют интервал на исходном линейном порядке агентов. Таким образом, для каждой пары альтернатив при движении вдоль оси агентов предпочтения меняются не более одного раза.

Домен предпочтений со свойством единственного пересечения естественным образом возникает при моделировании предпочтений относительно налоговых ставок [25, 26]. Домен предпочтений со свойством единственного пересечения упрощает решение некоторых задач пропорционального представительства [84].

Примерами доменов предпочтений со свойством единственного пересечения являются

$$D_3 = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right\}, \quad D_4 = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 4 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right\}.$$

Как и домены сепарабельных предпочтений, домены предпочтений со свойством единственного пересечения разнообразны и структурно отличаются друг от друга.

Конфигурация 10. Существуют три агента $i, j, k \in \mathcal{N}$ и не обязательно различные альтернативы $a, b, c, d, e, f \in A$ такие, что выполнено $bP_i a, cP_i d, eP_i f, aP_j b, dP_j c, eP_j f, aP_k b, cP_k d, fP_k e$.

Конфигурация 11. Существуют четыре агента $i, j, k, l \in \mathcal{N}$ и не обязательно различные альтернативы $a, b, c, d \in A$ такие, что выполнено $aP_i b, cP_i d, aP_j b, dP_j c, bP_k a, cP_k d, bP_l a, dP_l c$.

Теорема 9 [85]. Профиль предпочтений обладает свойством единственного пересечения тогда и только тогда, когда он не содержит конфигураций 10 и 11.

Запрещенные подпрофили содержат трех или четырех агентов, поэтому все профили предпочтений с двумя агентами являются профилями предпочтений со свойством единственного пересечения.

Каждый домен предпочтений со свойством единственного пересечения соответствует максимальной цепи в слабом порядке Брухата, построенном на множестве линейных порядков с отношением вложенности множеств пар альтернатив, которые имеют обратный порядок по отношению к минимальному элементу. Таким образом, слабый порядок Брухата имеет два обратных друг другу линейных порядка в качестве минимального и максимального элемента. Каждый домен предпочтений со свойством единственного пересечения содержит линейные порядки, образующие цепь от минимального до максимального элемента в слабом порядке Брухата. Каждый домен предпочтений со свойством единственного пересечения содержит $\frac{m(m-1)}{2} + 1$ предпочтений [85]. Согласно [86], количество максимальных цепей в слабом порядке Брухата равно

$$\frac{\binom{m}{2}!}{1^{m-1} 3^{m-2} 5^{m-3} \dots (2m-3)^1}.$$

Далеко не все домены предпочтений со свойством единственного пересечения являются максимальными доменами Кондорсе. Для каждого числа

альтернатив только два домена являются одновременно доменами предпочтений со свойством единственного пересечения и максимальными доменами Кондорсе [87].

Для трех альтернатив количество профилей предпочтений со свойством единственного пересечения выше количества однопиковых профилей предпочтений и количества сепарабельных профилей предпочтений, но для большего числа альтернатив верно обратное. Теорема 11 раскрывает причины большого количества профилей предпочтений со свойством единственного пересечения для трех альтернатив.

Теорема 10. Профиль предпочтений с тремя альтернативами является профилем предпочтений со свойством единственного пересечения тогда и только тогда, когда он является однопиковым или однолунковым.

Предпочтения со свойством единственного пересечения имеют много расширений: предпочтения со свойством единственного пересечения на дереве [88], на графах [89], предпочтения, близкие к предпочтениям со свойством единственного пересечения [63, 90–92], это предпочтения, которые сводятся к предпочтениям со свойством единственного пересечения после удаления либо k альтернатив, либо k агентов, либо разбиения множества агентов или альтернатив на k частей, либо трансформация предпочтений через k парных замен стоящих последовательно альтернатив в некоторых предпочтениях и т.д., предпочтения со свойством единственного пересечения при неполной информации [93].

Предпочтения со свойством единственного пересечения фиксируют некоторое упорядочение агентов, которое можно сравнить с распределением агентов (избирателей) по уровню дохода, образования и т.д., тем самым можно найти объяснение существующим предпочтениям. Исследованию корреляция предпочтений со свойством единственного пересечения и экзогенных атрибутов посвящена работа [94].

Конфигурация 12 (минимальное разнообразие). Для каждой альтернативы существует порядок предпочтений с данной альтернативой в качестве максимальной.

Теорема 11 [95]. Профиль предпочтений со свойством единственного пересечения, содержащий конфигурацию 12, является однопиковым.

Теорема 12 [95]. Профиль предпочтений со свойством единственного пересечения является однопиковым, если и только если он может быть дополнен предпочтениями, при которых дополненный профиль будет профилем предпочтений со свойством единственного пересечения и будет содержать конфигурацию 12.

Теорема 12 характеризует домены, являющиеся пересечением однопикового домена предпочтений и домена предпочтений со свойством единственного пересечения. Интерес к этому домену возник, потому что он близок к домену евклидовых предпочтений, которому посвящен следующий раздел.

3.4. Одномерные евклидовы предпочтения

Если не оговорено иное, то в данном разделе под евклидовыми предпочтениями подразумеваются одномерные евклидовы предпочтения. Профиль предпочтений является *евклидовым*, если существует ось, на которой расположены альтернативы и идеальные точки агентов такие, что предпочтения агентов формируются исходя из геометрической близости альтернатив. Каждый агент предпочитает более близкие к его идеальной точке альтернативы более отдаленным. Не для каждого профиля однопиковых предпочтений можно найти координаты альтернатив и агентов таким образом, чтобы он стал евклидовым [96].

Именно евклидовы предпочтения используются во многих моделях пространственной экономики, в том числе в модели линейного города Г. Хотеллинга [97], и моделях политической конкуренции, берущих свое начало из модели Э. Даунса [98].

Теорема 13 [99]. Для числа альтернатив, не превышающего пяти, профиль предпочтений является евклидовым тогда и только тогда, когда он является одновременно однопиковым и профилем предпочтений со свойством единственного пересечения.

Начиная с шести альтернатив, все евклидовы профили предпочтений являются одновременно однопиковыми и профилями предпочтений со свойством единственного пересечения, но существуют примеры, когда обратное неверно. Для примера достаточно трех агентов.

Теорема 14 [99]. Для двух агентов профиль предпочтений является евклидовым тогда и только тогда, когда он является однопиковым.

Теорема 15 [100]. Не существует конечного числа запрещенных подпрофилей, характеризующих евклидовы профили предпочтений.

Теорема 15 не запрещает характеристику через бесконечное количество запрещенных подпрофилей. Такая характеристика могла бы быть достаточно компактна и применима в прикладных исследованиях, как, например, характеристика матриц со свойством последовательных единиц [101]. Несмотря на отсутствие характеристики через конечное число запрещенных подпрофилей существует алгоритм полиномиальной сложности для распознавания евклидовых профилей предпочтений [102, 103].

Естественным обобщением евклидовых предпочтений являются многомерные евклидовы предпочтения, в которых альтернативы и идеальные точки агентов представлены точками в многомерном евклидовом пространстве, но задача распознавания профиля k -мерных евклидовых предпочтений становится NP-трудной для любого $k > 1$ [104].

Другим обобщением являются евклидовы на окружности предпочтения. Данные предпочтения нашли применение в теории отраслевых рынков [105] и политической конкуренции [106].

4. Структурированные предпочтения в задаче о марьяже

Рассмотрим два конечных и непересекающихся множества: множество женщин $W = \{w_1, \dots, w_n\}$ и множество мужчин $M = \{m_1, \dots, m_n\}$. Каждый агент $i \in W \cup M$ имеет предпочтение на множестве агентов другого пола (предпочтения являются линейными порядками). Проблема состоит в том, чтобы создать такие пары мужчина-женщина, которые агенты хотели бы сохранить.

Задача о марьяже — это кортеж (W, M, \mathcal{P}) , который состоит из множества женщин, множества мужчин и профиля предпочтений, состоящего из $2n$ линейных порядков. Паросочетанием называется отображение $\mu : W \cup M \rightarrow W \cup M$ такое, что $\forall w \in W$ имеем $\mu(w) \in M$ и $\mu(\mu(w)) = w$, и $\forall m \in M$ имеем $\mu(m) \in W$ и $\mu(\mu(m)) = m$. Паросочетание μ называется *устойчивым*, если не существует блокирующей пары, т.е. пары $(X, x) \in W \times M$ такой, что $XP_x\mu(x)$ и $xP_X\mu(X)$. Устойчивое паросочетание является решением задачи о марьяже. Доказательство существования решения задачи о марьяже и алгоритм построения устойчивого паросочетания были получены Д. Гейлом и Л. Шепли в [107].

Пара, которая предпочитает друг друга всем остальным агентам противоположного пола, называется *фиксированной парой*. В любом устойчивом паросочетании агенты из каждой фиксированной пары будут сопоставлены друг другу. Я. Экхоут [108] сформулировал *условие последовательных предпочтений*: существуют перестановка женщин σ и перестановка мужчин τ такие, что

$$\begin{aligned} \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \text{ таких, что } j > i, \text{ имеем } m_{\tau(i)} P_{w_{\sigma(i)}} m_{\tau(j)}, \\ \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \text{ таких, что } j > i, \text{ имеем } w_{\sigma(i)} P_{m_{\tau(i)}} w_{\sigma(j)}. \end{aligned}$$

Из условия последовательных предпочтений следует существование фиксированной пары $(w_{\sigma(1)}, m_{\tau(1)})$.

Теорема 16 [108]. *Условие последовательных предпочтений является достаточным условием единственности устойчивого паросочетания.*

Перестановки из условия последовательных предпочтений определяют паросочетание $\mu(m_{\tau(i)}) = w_{\sigma(i)}$. Условие последовательных предпочтений допускает, что агент предпочитает кого-либо своей паре из паросочетания, но только если предпочитаемые находятся «выше» в соответствующем перестановке линейном порядке. Представим, что мужчины и женщины упорядочены по росту и каждый агент стоит в паре с агентом противоположного пола такого же ранга по росту. Если для каждого агента среди агентов, которые лучше его/ее пары из паросочетания, только агенты выше ростом, то построенное по рангам паросочетание является единственным устойчивым паросочетанием. Докажем следующую теорему.

Теорема 17. Вероятность появления профиля, удовлетворяющего условию последовательных предпочтений, удовлетворяет следующему рекур-

рентному соотношению:

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-i+1} \binom{n}{i}^2 \frac{(n-i)!}{n^{2(n-i)}} s(i),$$

где

$$s(0) = 1.$$

Доказательство. Все профили предпочтений, удовлетворяющие условию последовательных предпочтений, можно разделить на множества равной мощности с профилями предпочтений, различающиеся итоговым паросочетанием. Все профили предпочтений с данным паросочетанием можно разделить на множества с разным количеством фиксированных пар. Существует $\binom{n}{i}$ способов выбрать i пар. После исключения данных i пар получается профиль предпочтений с $n-i$ парами и этот профиль будет удовлетворять условию последовательных предпочтений. Для данного профиля предпочтений меньшего размера существует $\binom{n}{i}^{2(n-i)} i!^{2(n-i)}$ способов добавить i пар в профиль и $(n-1)!^{2i}$ способов определить предпочтения i пар агентов. Применяя принцип включения-исключения, получим количество профилей предпочтений, удовлетворяющих условию последовательных предпочтений,

$$SPC(n) = n! \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \binom{n}{i} \binom{n}{i}^{2(n-i)} i!^{2(n-i)} (n-1)!^{2i} SPC(n-i),$$

где

$$SPC(0) = 1.$$

Вычисляя вероятность

$$s(n) = \frac{SPC(n)}{n!^{2n}}$$

и вводя новый индекс суммирования $i' = n - i$, получим итоговый результат. ■

Карпов [109] предложил более общее условие единственности устойчивого паросочетания: α -условие. Существуют устойчивое паросочетание μ , перестановка женщин σ и перестановка мужчин τ такие, что

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} \text{ таких, что } j > i, \text{ имеем } \mu(w_{\sigma(i)}) P_{w_{\sigma(i)}} m_{\tau(j)},$$

и перестановка женщин σ' и перестановка мужчин τ' такие, что

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} \text{ таких, что } j > i, \text{ имеем } \mu(m_{\tau'(i)}) P_{m_{\tau'(i)}} w_{\sigma'(j)}.$$

Пример из [109]. Данный профиль предпочтений

$$\begin{aligned} w_1 &: m_1 P_{w_1} m_3 P_{w_1} m_2, & m_1 &: w_3 P_{m_1} w_1 P_{m_1} w_2; \\ w_2 &: m_1 P_{w_2} m_2 P_{w_2} m_3, & m_2 &: w_2 P_{m_2} w_1 P_{m_2} w_3; \\ w_3 &: m_2 P_{w_3} m_3 P_{w_3} m_1, & m_3 &: w_2 P_{m_3} w_3 P_{m_3} w_1; \end{aligned}$$

нарушает условие последовательных предпочтений, так как не имеет фиксированной пары, но имеет единственное устойчивое паросочетание $w_1 \leftrightarrow m_1, w_2 \leftrightarrow m_2, w_3 \leftrightarrow m_3$. Данный профиль удовлетворяет α -условию при $\sigma = \tau = 123$ и $\sigma' = \tau' = 231$.

Теорема 18 [109]. α -Условие является достаточным условием единственности устойчивого паросочетания.

α -Условие позволяет иметь различные критерии для построения упорядочений. Пусть кроме профиля предпочтений агентов, имеются два упорядочения, выражающие соответственно «женский взгляд» и «мужской взгляд». Например, женщины упорядочивают всех по росту, а мужчины — по возрасту. В α -условии первое упорядочение определяет перестановки σ и τ , второе упорядочение — перестановки σ' и τ' . Представим, что мужчины и женщины упорядочены по данным критериям и каждый агент стоит в паре с агентом противоположного пола такого же ранга согласно критерию своего пола. Если для каждого агента среди агентов, которые лучше его/ее пары согласно паросочетанию, только агенты выше по критерию для соответствующего пола, то построенное по рангам паросочетание является единственным устойчивым паросочетанием. α -Условие находит применение для создания децентрализованных алгоритмов на рынках соответствия [110, 111].

5. Дихотомические предпочтения

Дихотомические предпочтения задаются разбиением множества альтернатив на два подмножества: поддерживаемые альтернативы и неприемлемые альтернативы.

Дихотомические предпочтения используются в одобряющем голосовании [112], в задаче пропорционального представительства [113], в задаче нахождения паросочетаний [114], в задаче распределения ресурсов [115, 116], в гедонических играх [117] и других приложениях.

Несмотря на простую структуру многие вычислительные задачи, связанные с дихотомическими предпочтениями, оказываются NP-трудными, что привело к созданию теории доменов дихотомических предпочтений — ограничений на множество возможных предпочтений. Э. Элкин и М. Лакнер [118] показали, что многие естественные ограничения на профиль предпочтений приводят к упрощению вычислительных задач пропорционального представительства.

Как и прежде, имеем множество альтернатив $A = \{1, \dots, m\}$ и множество агентов $\mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$. Каждый агент $i \in \mathcal{N}$ одобряет множество $A_i \subseteq A$. Со-

ставим матрицу X размера m на n , в которой $x_{ij} = 1$, если агент i одобряет альтернативу j , и $x_{ij} = 0$, если агент j не одобряет альтернативу i . Матрица $X_{m \times n}$ представляет собой профиль предпочтений. Множество всех возможных бинарных матриц размера $m \times n$ будем обозначать как $\mathcal{M}_{m \times n}$. Существуют 2^{mn} различных матриц и, соответственно, различных профилей предпочтений. Доменом предпочтений называется подмножество возможных столбцов в бинарной матрице.

Будем говорить, что матрицы X и Y эквивалентны с обозначением, $X \equiv Y$, если матрица X равна матрице Y после перестановки строк и столбцов:

$X \equiv Y$ тогда и только тогда, когда $x_{ij} = y_{\sigma(i)\tau(j)}$, $\sigma(i) \in S_m$, $\tau(j) \in S_n$, где S_k — множество всех перестановок на множестве $\{1, \dots, k\}$.

Матрица $Q_{k \times l}$ является *паттерном* в матрице $A_{m \times n}$, если существует подматрица $B_{k \times l}$ матрицы $A_{m \times n}$ такая, что $Q_{k \times l} \equiv B_{k \times l}$. Паттерны играют роль конфигураций в ординальных предпочтениях.

Для каждого линейного порядка можно определить множество дихотомических предпочтений, которые могут быть достигнуты при некотором уровне одобрения агентом.

Для однопиковых предпочтений множества одобрения (некоторое количество наилучших альтернатив) обязательно образуют интервал на оси альтернатив (понятие оси однопиковых предпочтений введено в разделе 3.1). Таким образом, получим домен предпочтений с последовательными единицами в столбцах (интервалы кандидатов).

Паттерн 1.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \dots \\ & & & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \in \mathcal{M}_{k+2 \times k+2}, \quad k \geq 1.$$

Паттерн 2.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & & & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & \dots & \\ & & & 1 & 1 & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \in \mathcal{M}_{k+2 \times k+3}, \quad k \geq 1.$$

Паттерн 3.

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & & & & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & & 1 \\ 0 & 1 & 1 & & & & \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & & \dots \\ & & & & 1 & 1 & 0 \\ 0 & & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & & \dots & 0 & 0 & & 1 \end{array} \right] \in \mathcal{M}_{k+3 \times k+2}, \quad k \geq 1.$$

Паттерн 4.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Паттерн 5.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Теорема 19 [101]. Профиль дихотомических предпочтений удовлетворяет свойству последовательных единиц в столбцах тогда и только тогда профиль не содержит паттернов 1–5.

Характеристика из теоремы 21 содержит бесконечное число паттернов, но так как паттерны схожи друг с другом, задача поиска паттерна минимального размера решается за полиномиальное время [119]. Существует простой алгоритм для тестирования свойства последовательных единиц в матрице, основанный на RQ-деревьях [78].

Транспонированные паттерны 1–5 дадут характеристику домена с последовательными единицами в строках (интервалы агентов), рассмотренного в [118]. В литературе можно найти характеристики бинарных матриц с круговым свойством последовательных единиц [120] со свойством последовательных единиц на дереве [121].

З. Терзопулу и др. [122] исследовали домены предпочтений с ограниченными интервалами агентов. Данные интервалы образуются только у краев оси (домен предпочтений с *внешними интервалами агентов, далее ВИА*) или только у одного края оси (домен предпочтений с *одним внешним интервалом*

агентов, далее *ОВИА*). В случае голосования за кандидатов от политических партий избиратели могут быть упорядочены по степени лояльности к одной из двух партий. Наиболее лояльные избиратели будут одобрять всех кандидатов своей партии, менее лояльные избиратели могут одобрять некоторое количество кандидатов обеих партий. Примером профиля предпочтений с *ВИА* является

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Каждый кандидат получает одобрение от интервала агентов, находящегося у края оси.

Паттерн 6.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Паттерн 7.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Паттерн 8.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Паттерн 9.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Паттерн 10.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Теорема 20 [122]. Профиль дихотомических предпочтений удовлетворяет свойству *ВИА* тогда и только тогда когда профиль не содержит паттернов 6–10.*

Паттерн 11.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Теорема 21 [122]. Профиль дихотомических предпочтений удовлетворяет свойству ОБИА тогда и только тогда профиль не содержит паттерна 11.

Матрицы, не содержащие паттерна 11, могут быть однозначно восстановлены по их суммам строк и столбцов [123].

Теорема 22 [123]. Количество профилей дихотомических предпочтений, удовлетворяющих свойству ОБИА, равно

$$\#SVEI(m, n) = \sum_{k=1}^{\min(m, n)} k!^2 S(n+1, k+1) S(m+1, k+1),$$

где $S(a, b)$ — число Стирлинга второго рода (см. [124]).

В [122] рассмотрены также достаточные и необходимые условия нахождения структурированных дихотомических предпочтений в случае неполной информации, когда не имеется информации о некоторых ячейках в профиле предпочтений. В [125] расширено возможное применение интервальных на осей предпочтений до интервальных на деревьях.

Другим примером структурированных дихотомических предпочтений является разбиение. Профиль дихотомических предпочтений удовлетворяет свойству *разбиения*, если множество одобрения каждого агента совпадает с одним из множеств, принадлежавших некоторому разбиению множества альтернатив.

Паттерн 12.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Теорема 23 [122]. Профиль дихотомических предпочтений удовлетворяет свойству ОБИА тогда и только тогда профиль не содержит паттерна 12.

Теорема 24 [126]. Количество профилей дихотомических предпочтений, удовлетворяющих свойству ОБИА, равно

$$\#PART(m, n) = \sum_{k=1}^{\min(m, n)} k! S(n, k) S(m, k),$$

где $S(a, b)$ — число Стирлинга второго рода (см. [124]).

Свойство разбиения является очень ограничивающим и количество профилей, удовлетворяющих этому свойству меньше, чем количество профилей, удовлетворяющих свойству ОБИА.

6. Заключение

С одной стороны, структурированные профили предпочтений представляют собой очень ограниченное сочетание предпочтений и не могут отражать разнообразие мнений в реальных проблемах агрегирования. С другой стороны, модели, основанные на структурированных предпочтениях, обычно дают решения с хорошими свойствами. Задача расширения доменов структурированных предпочтений с целью повышения числа охватываемых профилей при сохранении нужных свойств остается открытой. Множество попыток расширения сталкиваются как с вычислительными сложностями, так и с проблемами в интерпретации.

Перспективными, но мало затронутыми областями моделирования предпочтений являются исследования неполных предпочтений, а именно предпочтений, представимых слабыми или частичными порядками, предпочтений, имеющих линейный порядок на подмножестве альтернатив и т.д. Анализ дихотомических предпочтений, представленный в обзоре, является первым шагом в этом направлении.

Естественным направлением исследований является анализ реальных данных по профилям предпочтений. Библиотеки профилей предпочтений [127, 128] являются отправной точкой для многих исследований в этой области.

Автор благодарит Ф.Т. Алескерова, участников Общественного семинара “Экспертные оценки и анализ данных” 11 марта 2020 г. в ИПУ РАН, участников семинара “Математическая экономика” ЦЭМИ РАН 9 ноября 2021 г. и анонимного рецензента за ценные комментарии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aleskerov F.T.* Arrowian aggregation models. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1999.
2. *Arrow K.J.* Social Choice and Individual Values. New York: Wiley, 1951.
3. *Gibbard A.* Manipulation of voting schemes: a general result // *Econometrica*. 1973. V. 41. No. 4. P. 587–601.
4. *Satterthwaite M.A.* Strategy-proofness and Arrow’s conditions: Existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions // *J. Econ. Theory*. 1975. V. 10. No. 2. P. 187–217.
5. *Dasgupta P., Maskin E.* On the robustness of majority rule // *J. Eur. Econ. Assoc.* 2008. V. 6. No. 5. P. 949–973.
6. *Xefferis D.* How robust is majority voting as a social choice rule? // *Oxf. Econ. Pap.* 2014. V. 66. No. 4. P. 1006–1018.
7. *Aşan G., Sanver M.R.* Another characterization of the majority rule // *Econ. Lett.* 2002. V. 75. No. 3. P. 409–413.
8. *Campbell D.E., Kelly J.S.* A simple characterization of majority rule // *Econ. Theory*. 2000. V. 15. No. 3. P. 689–700.

9. *Dasgupta P., Maskin E.* Strategy-proofness, independence of irrelevant alternatives, and majority rule // Amer. Econ. Rev. Insights. 2020. V. 2. No. 4. P. 459–474.
10. *May K.O.* A set of independent necessary and sufficient conditions for simple majority decisions // Econometrica. 1952. V. 20. No. 4. P. 680–684.
11. *Woeginger G.J.* A new characterization of the majority rule // Econ. Lett. 2003. V. 81. No. 1. P. 89–94.
12. *Gehrlein W.V.* Condorcet’s paradox. Heidelberg: Springer, 2006.
13. *Xeferis D.* A necessary and sufficient single-profile condition for transitivity of the majority rule relation // Econ. Lett. 2012. V. 116. No. 3. P. 516–518.
14. *Aleskerov F.* Categories of Arrovian voting schemes / Arrow K., Sen A., Suzumura K., Eds. Handbook of Social Choice and Welfare, Amsterdam: Elsevier Science. 2002. P. 95–129.
15. *Dittrich T.* Eine vollständige Klassifikation von Condorcet Domains für kleine Alternativenmengen. Karlsruher Instituts für Technologie (KIT), Dissertation, 2018.
16. *Li G., Puppe C., Slinko A.* Towards a classification of maximal peak-pit Condorcet domains // Math. Soc. Sci. 2021. V. 113. P. 191–202.
17. *Galambos Á., Reiner V.* Acyclic sets of linear orders via the Bruhat orders // Soc. Choice Welf. 2008. V. 30. P. 245–264.
18. *Danilov V.I., Koshevoy G.A.* Maximal Condorcet domains // Order. 2013. V. 30. No. 1. P. 181–194.
19. *Danilov V.I., Karzanov A.V., Koshevoy G.A.* Condorcet domains of tiling type // Discrete Appl. Math. 2012. V. 160. P. 933–940.
20. *Karpov A., Slinko A.* Constructing large peak-pit Condorcet domains // Theory Decis. 2022. <https://doi.org/10.1007/s11238-022-09878-9>
21. *Поляков Н.Л., Шамолин М.В.* Теоремы о редукции в теории коллективного выбора // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прилож. Темат. обзор. 2020. Т. 174. С. 46–51.
22. *Danilov V.I., Karzanov A.V., Koshevoy G.A.* Majority rule on rhombus tilings and Condorcet super-domains // Discrete Appl. Math. 2021. V. 292. P. 85–96.
23. *Inada K.* A Note on the simple majority decision rule // Econometrica. 1964. V. 32. No. 4. P. 525–531.
24. *Inada K.* The simple majority decision rule // Econometrica. 1969. V. 37. No. 3. P. 490–506.
25. *Sen A.K.* A Possibility theorem on majority decisions // Econometrica. 1966. V. 34. No. 2. P. 491–499.
26. *Mirrlees J.* An exploration in the theory of optimal income taxation // Rev. Econ. Stud. 1971. V. 38. P. 175–208.
27. *Roberts K.* Voting over income tax schedules // J. Public Econ. 1977. V. 8. No. 3. P. 329–340.
28. *Elkind E., Lackner M., Peters D.* Structured preferences / Endriss U. (ed), Trends in computational social choice. 2017. P 187–207.
29. *Karpov A.* On the number of group-separable preference profiles // Group Decis. Negot. 2019. V. 28. No. 3. P. 501–517.
30. *Chen J., Finnendahl U.P.* On the number of single-peaked narcissistic or single-crossing narcissistic preference profiles // Discrete Math. 2018. V. 341. P. 1225–1236.

31. *Durand S.* Finding sharper distinctions for conditions of transitivity of the majority method // *Discrete Appl Math.* 2003. V. 131. P. 577–595.
32. *Karpov A.* The likelihood of single-peaked preferences under classical and new probability distribution assumptions // *Soc. Choice Welf.* 2020. V. 55. P. 629–644.
33. *Lackner M.L., Lackner M.* On the likelihood of single-peaked preferences // *Soc. Choice Welf.* 2017. V. 48. No. 4. P. 717–745.
34. *Kim K.H., Roush F.W.* Special domains and nonmanipulability // *Math. Soc. Sci.* 1980. V. 1. P. 85–92.
35. *Sato S.* Circular domains // *Rev. Econ. Des.* 2010. V. 14. P. 331–342.
36. *Achuthankutty G., Roy S.* Dictatorship on top-circular domains // *Theory Decis.* 2018. V. 86. P. 479–493.
37. *Peters D., Lackner M.* Preferences single-peaked on a circle // *J. Artif. Intel. Res.* 2020. V. 68. P. 463–502.
38. *Ozdemir U., Sanver M.R.* Dictatorial domains in preference aggregation // *Soc. Choice Welf.* 2007. V. 28. P. 61–76.
39. *Monjardet B.* Acyclic domains of linear orders: a survey / *Brams S., Gehrlein W.V., Roberts F.S., Eds. The mathematics of preference, choice and order, Essays in honor of Peter C. Fishburn, Heidelberg: Springer.* 2009. P. 139–160.
40. *Fishburn P.C.* Acyclic sets of linear orders // *Soc. Choice Welf.* 1996. V. 14. P. 113–124.
41. *Данилов В.И., Карзанов А.В., Кошевой Г.А.* Области Кондорсе и ромбические паркетты // *Экономика и математические методы.* 2010. Т. 46. № 4. С. 55–68.
42. *Labbe J.-P., Lange C.* Cambrian acyclic domains: Counting c -singletons // *Order.* 2020. V. 37. P. 571–603.
43. *Kreweras G.* Les décisions collectives // *Math. Sci. hum.* 1963. V. 2. P. 25–35.
44. *Bartholdi J., Trick M.* Stable matching with preferences derived from a psychological model // *Oper. Res. Lett.* 1986. V. 5. No. 4. P. 165–169.
45. *Escoffier B., Lang J., Ozturk M.* Single-peaked consistency and its complexity / *Ghallab M., Spyropoulos C.D., Fakotakis N., Avouris N., Eds. Proc. of 18th Eur. Conf. on Artif. Intel. (ECAI 2008), 2008.* P. 366–370.
46. *Black D.* On the rationale of group decision-making // *J. Polit. Econ.* 1948. V. 56. P. 23–34.
47. *Brandt F., Brill M., Hemaspaandra E., Hemaspaandra L.A.* Bypassing combinatorial protections: Polynomial-time algorithms for single-peaked electorates // *J. Artif. Intel. Res.* 2015. V. 53. P. 439–496.
48. *Faliszewski P., Hemaspaandra E., Hemaspaandra L.A., Rothe J.* The shield that never was: Societies with single-peaked preferences are more open to manipulation and control // *Inf. Comput.* 2011. V. 209. No. 2. P. 89–107.
49. *Веселова Ю.А.* Вычислительная сложность манипулирования: обзор проблемы // *АиТ.* 2016. № 3. С. 7–32.
Veselova Y.A. Computational complexity of manipulation: A survey // *Autom. Remote Control.* 2016. V. 77. No. 3. P. 369–388.
50. *Puppe C.* The single-peaked domain revisited: A simple global characterization // *J. Econ. Theory.* 2018. V. 176. P. 55–80.

51. *Slinko A.* Condorcet domains satisfying Arrow's single-peakedness // *J. Math. Econ.* 2019. V. 84. P. 166–175.
52. *Liversidge G.* Counting Condorcet domains. arXiv:2004.00751, 2020.
53. *Weisstein E. W.* Permutation pattern. From MathWorld—A Wolfram Web Resource. 2020. <https://mathworld.wolfram.com/PermutationPattern.html>
54. *Ballester M.A., Haeringer G.* A characterization of the single-peaked domain // *Soc. Choice Welf.* 2011. V. 36. P. 305–322.
55. *Demange G.* Single-peaked orders on a tree // *Math. Soc. Sci.* 1982. V. 3. No. 4. P. 389–396.
56. *Nehring K., Puppe C.* The structure of strategy-proof social choice — part i: General characterization and possibility results on median spaces // *J. Econ. Theory.* 2007. V. 135. No. 1. P. 269–305.
57. *Escoffier B., Spanjaard O., Tydrichová M.* Recognizing single-peaked preferences on an arbitrary graph: Complexity and algorithms / Harks T., Klimm M. Eds. Proc. of the 13th Internat. Symposium, SAGT 2020, Augsburg, 2020. P. 291–306.
58. *Trick M.A.* Recognizing single-peaked preferences on a tree // *Math. Soc. Sci.* 1989. V. 17. No. 3. P. 329–334.
59. *Sliwinski J., Elkind E.* Preferences single-peaked on a tree: Sampling and tree recognition / Kraus S. Ed. Proc. of the Twenty-Eighth Internat. Joint Conf. on Artif. Intel. (IJCAI-19). P. 580–586.
60. *Peters D., Elkind E.* Preferences single-peaked on nice trees / Proc. of the 30th AAAI Conf. on Artif. Intel. (AAAI 2016), 2016. P. 594–600.
61. *Peters D., Yu L., Chan H., Elkind E.* Preferences single-peaked on a tree: Multiwinner elections and structural results // *J. Artif. Intel. Res.* 2022. V. 73. P. 231–276.
62. *Duchi E.* A code for square permutations and convex permutominoes // *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.* 2019. V. 21. No. 2. #2.
63. *Erdelyi G., Lackner M., Pfandler A.* Computational aspects of nearly single-peaked electorates // *J. Artif. Intel. Res.* 2017. V. 58. P. 297–337.
64. *Sui X., Nienaber A., Boutilier C.* Multidimensional single-peaked consistency and its approximations / Rossi F. Ed. Proc. of the Twenty-third Internat. Joint Conf. on Artif. Intel. (IJCAI-13), pp. 367–374, Beijing, 2013. P. 375–382.
65. *Faliszewski P., Hemaspaandra E., Hemaspaandra L.A.* The complexity of manipulative attacks in nearly single-peaked electorates // *Artif. Intell.* 2014. V. 207. P. 69–99.
66. *Menon V., Larson K.* Reinstating combinatorial protections for manipulation and bribery in single-peaked and nearly single-peaked electorates / Proc. of the 30th AAAI Conf. on Artif. Intel. (AAAI. 2016), 2016. P. 565–571.
67. *Yang Y.* Manipulation with bounded single-peaked width: A parameterized study / Bordini R.H., Elkind E., Weiss G., Yolum P. Eds. Proc. of the 13th Internat. Joint Conf. on Autonomous Agents and Multiagent Systems, 2015. P. 77–85.
68. *Yang Y.* Complexity of controlling nearly single-peaked elections revisited / Dastani M., Sukthankar G., Andr e E., Koenig S. Eds. Proc. of the 17th Internat. Conf. on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS 2018), 2018. P. 2139–2141.

69. *Yang Y.* On the complexity of constructive control under nearly single-peaked preferences / Proc. of the 24th Eur. Conf. on Artif. Intel. (ECAI 2020), Santiago de Compostela, 2020.
70. *Yang Y., Guo J.* Controlling elections with bounded single-peaked width / Lomuscio A., Scerri P., Bazzan A., Huhns M. Eds. Proc. of the 13th Internat. Conf. on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS 2014), Paris, 2014. P. 629–636.
71. *Yang Y., Guo J.* The control complexity of r-approval: From the single-peaked case to the general case // J. Comput. Syst. Sci. 2017. V. 89. P. 432–449.
72. *Yang Y., Guo J.* Parameterized complexity of voter control in multi-peaked elections // Theory Comput. Syst. 2018. V. 62. No. 8. P. 1798–1825.
73. *Cornaz D., Galand L., Spanjaard O.* Bounded single-peaked width and proportional representation / Proc. of the 24th Eur. Conf. on Artif. Intel. (ECAI 2020), 2012. P. 270–275.
74. *Cornaz D., Galand L., Spanjaard O.* Kemeny elections with bounded single-peaked or single-crossing width / Proc. of the Twenty-Third Internat. Joint Conf. on Artif. Intel. (IJCAI-2013), 2013. P. 76–82.
75. *Fitzsimmons Z., Lackner M.* Incomplete preferences in single-peaked electorates // J. Artif. Intell. Res. 2020. V. 67. P. 797–833.
76. *Tideman T.N.* Independence of clones as a criterion for voting rules // Soc. Choice Welf. 1987. V. 4. No. 3. P. 185–206.
77. *Elkind E., Faliszewski P., Slinko A.* Clone structures in voters' preferences / Proc. of the 13th ACM Conf. on Electronic Commerce (EC-12), Valencia, 2012. P. 496–513.
78. *Booth K.S., Lueker G.S.* Testing for the consecutive ones property, interval graphs, and graph planarity using PQ-tree algorithms // J. Comput. Syst. Sci. 1976. V. 13. P. 335–379.
79. *Faliszewski P., Karpov A., Obratsova S.* The complexity of election problems with group-separable preferences // Auton. Agents Multi-Agent Syst. 2022. V. 36. Article 18.
80. *Kitaev S.* Separable permutations / Patterns in permutations and words. Monographs in Theoretical Computer Science. Berlin: Springer-Verlag, 2011. P. 57–66.
81. *Ferrari L.* Enhancing the connections between patterns in permutations and forbidden configurations in restricted elections // J. Discrete Math. Sci. Cryptography. 2020. <https://doi.org/10.1080/09720529.2020.1776932>
82. *Liu P.* Random assignments on sequentially dichotomous domains // Games Econ. Behav. 2020. V. 121. P. 565–584.
83. *Liu P., Zeng H.* Random assignments on preference domains with a tier structure // J. Math. Econ. 2019. V. 84. P. 176–194.
84. *Skowron P., Yu L., Faliszewski P., Elkind E.* The complexity of fully proportional representation for single-crossing electorates // Theor. Comput. Sci. 2015. V. 569. No. 2. P. 43–57.
85. *Bredereck R., Chen J., Woeginger G.J.* A characterization of the single-crossing domain // Soc. Choice Welf. 2013. V. 41. No. 4. P. 989–998.
86. *Stanley R.P.* On the number of reduced decompositions of elements of Coxeter groups // Eur. J. Combinatorics. 1984. V. 5. P. 359–372.

87. *Slinko A., Qinggong Wu, Xing Zheng Wu.* A characterization of preference domains that are single-crossing and maximal Condorcet // *Economics Letters*. 2021. V. 204. N 109918.
88. *Puppe C., Slinko A.* Condorcet domains, median graphs and the single-crossing property // *Econ. Theory*. 2019. V. 67. No. 1. P. 285–318.
89. *Constantinescu A.C., Elkind E.* Proportional representation under single-crossing preferences revisited / *Proc. of The Thirty-Fifth AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI-21)*, 2021. P. 5286–5293.
90. *Bredereck R., Chen J., Woeginger G.J.* Are there any nicely structured preference profiles nearby? // *Math. Soc. Sci.* 2016. V. 79. P. 61–73.
91. *Jaeckle F., Peters D., Elkind E.* On recognising nearly single-crossing preferences / *Proc. of the 32nd AAAI Conf. on Artif. Intel. (AAAI-2018)*, 2018. P. 1079–1086.
92. *Cohen N., Elkind E., Lakhani F.* Single-crossing implementation. arXiv:1906.09671, 2019.
93. *Elkind E., Faliszewski P., Lackner M., Obratzsova S.* The complexity of recognizing incomplete single-crossing preferences / *Proc. Twenty-Ninth AAAI Conf. on Artif. Intel. (AAAI-2015)*, Austin, 2015. P. 865–871.
94. *Lakhani F., Peters D., Elkind E.* Correlating preferences and attributes: Nearly single-crossing profiles / *Proc. of the Twenty-Eighth Internat. Joint Conf. on Artif. Intel. (IJCAI-19)*. P. 414–420.
95. *Elkind E., Faliszewski P., Skowron P.* A characterization of the single-peaked single-crossing domain // *Soc. Choice Welf.* 2020. V. 54. P. 167–181.
96. *Berg S., Perlinger T.* Single-peaked compatible preference profiles: Some combinatorial results // *Soc. Choice Welf.* 2006. V. 27. No. 1. P. 89–102.
97. *Hotelling H.* Stability in competition // *Econ. J.* 1929. V. 153. No. 39. P. 41–57.
98. *Downs A.* An economic theory of democracy. New York: Harper and Row, 1957.
99. *Chen J., Grottko S.* Small one-dimensional Euclidean preference profiles // *Soc. Choice Welf.* 2021. V. 57. P. 117–144.
100. *Chen J., Pruhs K.R., Woeginger G.J.* The one-dimensional Euclidean domain: finitely many obstructions are not enough // *Soc. Choice Welf.* 2017. V. 48. P. 409–432.
101. *Tucker A.* A structure theorem for the consecutive 1's property // *J. Comb. Theory B.* 1972. V. 12. No. 2. P. 153–162.
102. *Knoblauch V.* Recognizing one-dimensional Euclidean preference profiles // *J. Math. Econ.* 2010. V. 46. P. 1–5.
103. *Elkind E., Faliszewski P.* Recognizing 1-euclidean preferences: An alternative approach / Lavi R. Ed. *Proc. of the 13th Internat. Symposium (SAGT 2014)*, Haifa, 2014. P. 146–157.
104. *Peters D.* Recognising multidimensional Euclidean preferences. In *Proc. of the 31st AAAI Conf. on Artif. Intel. (AAAI-2017)*, 2017. P. 642–648.
105. *Salop S.* Monopolistic Competition with Outside Goods // *Bell J. Econ.* 1979. V. 10. P. 141–156.
106. *Peeters R., Saran R., Yuksel A.M.* Strategic party formation on a circle and Durverger's law // *Soc. Choice Welf.* 2016. V. 47. P. 729–759.
107. *Gale D., Shapley L.S.* College admissions and the stability of marriage // *Amer. Math. Month.* 1962. V. 69. No. 1. P. 9–14.

108. *Eeckhout J.* On the uniqueness of stable marriage matchings // *Econ. Lett.* 2000. V. 69. No. 1. P. 1–8.
109. *Karpov A.* A necessary and sufficient condition for uniqueness consistency in the stable marriage matching problem // *Econ. Lett.* 2019. V. 178. P. 63–65.
110. *Sankararaman A., Basu S., Sankararaman K.A.* Dominate or Delete: Decentralized Competing Bandits in Serial Dictatorship / *Proc. of the 24th International Conference on Artificial Intelligence and Statistics (AISTATS 2021)*, San Diego, 2021.
111. *Basu S., Sankararaman K.A., Sankararaman A.* Beyond $\log^2(T)$ regret for decentralized bandits in matching markets / *Proc. of the 38 th International Conference on Machine Learning*, PMLR 139, 2021.
112. *Brams S.J., Fishburn P.C.* Approval voting // *Amer. Polit. Sci. Rev.* 1978. V. 72. P. 831–847.
113. *Aziz H., Brill M., Conitzer V., Elkind E., Freeman R., Walsh T.* Justified representation in approval-based committee voting // *Soc. Choice Welf.* 2017. V. 48. No. 2. P. 461–485.
114. *Bogomolnaia A., Moulin H.* Random matching under dichotomous preferences // *Econometrica.* 2004. V. 72. P. 257–279.
115. *Bogomolnaia A., Moulin H., Stong R.* Collective choice under dichotomous preferences // *J. Econ. Theory.* 2005. V. 122. No. 2. P. 165–184.
116. *Duddy C.* Fair sharing under dichotomous preferences // *Math. Soc. Sci.* 2015. V. 73. P. 1–5.
117. *Aziz H., Harrenstein P., Lang J., Wooldridge M.* Boolean hedonic games / *Proc. of the 15th Internat. Conf. on the Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR-2016)*, 2016, 166–175.
118. *Elkind E., Lackner M.* Structure in dichotomous preferences / *Proc. of the 24th Internat. Joint Conf. on Artif. Intel. (IJCAI-2015)*, 2015. P. 2019–2025.
119. *Blin G., Rizzi R., Vialette S.* A faster algorithm for finding minimum Tucker submatrices. *Proceedings of the 6th Conf. on Computability in Europe (CiE'10)*, Ponta Delgada, 2010. P. 69–77.
120. *Safe M.D.* Circularly compatible ones, D-circularity, and proper circular-arc bi-graphs // *SIAM J. Discrete Math.* 2021. V. 35. No. 2. P. 707–751.
121. *Pe'er I., Pupko T., Shamir R., Sharan R.* Incomplete directed perfect phylogeny // *SIAM J. Comput.* 2004. V. 33. No. 3. P. 590–607.
122. *Terzopoulou Z., Karpov A., Obratzsova S.* Restricted domains of dichotomous preferences with possibly incomplete information / *Proc. of the 35th AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI 2021)*, 2021. P. 5726–5733.
123. *Brewbaker C.* A combinatorial interpretation of the poly-Bernoulli numbers and two Fermat analogues // *Integers.* 2008. V. 8. No. 1. A2.
124. *Weisstein E.W.* Stirling number of the second kind/ *MathWorld—A Wolfram Web Resource.* <https://mathworld.wolfram.com/StirlingNumberoftheSecondKind.html>
125. *Yang Y.* On the tree representations of dichotomous preferences / *Kraus S. Ed. Proc. of the Twenty-Eighth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-2019)*, 2019. P. 644–650.
126. *Ju H.-K., Seo S.* Enumeration of $(0, 1)$ -matrices avoiding some 2×2 matrices // *Discrete Math.* 2012. V. 312. No. 16. P. 2473–2481.

127. *Mattei N., Walsh T.* Preflib: A library of preference data / Proceedings of Third International Conference on Algorithmic Decision Theory (ADT 2013), Lecture Notes in Artificial Intelligence, 2013. P. 259–270.
128. *Boehmer N., Schaar N.* Collecting, classifying, analyzing, and using real-world elections. arXiv:2204.03589, 2022.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.

Поступила в редакцию 14.05.2021

После доработки 03.04.2022

Принята к публикации 28.04.2022