

Стохастические системы

© 2022 г. С.П. МОИСЕЕВА, д-р физ.-мат. наук (smoiseeva@mail.ru),
Т.В. БУШКОВА (bushkova70@mail.ru)
(Национальный исследовательский Томский
государственный университет),
Е.В. ПАНКРАТОВА, канд. физ.-мат. наук (pankatya86@gmail.com),
М.П. ФАРХАДОВ, д-р техн. наук (mais@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),
А.А. ИМОМОВ, д-р физ.-мат. наук (imomov_azam@mail.ru)
(Каршинский государственный университет, Узбекистан)

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕСУРСНОЙ ГЕТЕРОГЕННОЙ СМО $(MMP + 2M)^{(2,\nu)}/GI(2)/\infty$ ПРИ УСЛОВИИ ЭКВИВАЛЕНТНО РАСТУЩЕГО ВРЕМЕНИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Рассматривается ресурсная гетерогенная система массового обслуживания с гибкой системой реагирования на запросы, состоящая из двух узлов. Каждый узел обладает некоторой емкостью ресурса для обслуживания (буферного пространства) и, следовательно, потенциальной возможностью отклика на поступившее требование, которое формирует запрос на предоставление некоторого случайного объема ресурсов на некоторое случайное время. Потоки требований являются стационарными пуассоновскими различной интенсивности. Если для обслуживания заявки требуется задействовать ресурс обоих узлов, то предполагается, что моменты прихода таких заявок образуют MMP-поток с разделением на два разнотипных запроса. Отличительной особенностью рассматриваемых систем является то, что ресурс освобождается в том же объеме, что и запрашивался. Для построения многомерного марковского процесса использован метод введения дополнительной переменной и динамических вероятностей. Решена задача анализа общего объема занимаемых ресурсов каждого типа при условии, что интенсивность обслуживания требований много меньше интенсивности входящего потока, и в предположении, что серверы имеют неограниченные ресурсы.

Ключевые слова: бесконечнолинейные гетерогенные системы массового обслуживания, ресурсные системы, параллельное обслуживание, марковский модулированный поток, асимптотический анализ.

DOI: 10.31857/S0005231022080050, EDN: AGWXXM

1. Введение

В настоящее время находят широкое применение многочисленные исследования по теории массового обслуживания (ТМО) и ее приложениям, в част-

ности для описания процессов в инфокоммуникационных системах [1–5], распределенных вычислительных и компьютерных сетях [6–8], многофункциональных центрах обслуживания населения [9–11], задачах управления транспортными потоками [12–14] и т.д.

Для повышения качества обслуживания и минимизации экономических потерь в информационно-сервисных системах (ИСС) целесообразно использовать модели различных конфигураций [15–17].

Подробный обзор современных приложений ТМО находит отражение в монографиях российских и зарубежных ученых [18, 19]. В классических системах массового обслуживания (СМО) роль дискретных ресурсов играют обслуживающие приборы или линии передачи информации. Однако в этом случае приходится пренебрегать фактором неоднородности потенциально требуемых услуг. Таким образом, неоспорима актуальность внедрения новых моделей СМО, позволяющих решать практические задачи по оценке потенциальной возможности отклика сервера на запросы, поступающие от различных категорий клиентов и отличающиеся как интенсивностью поступления, так и потребностями в предоставлении ресурсов для обслуживания. Пришедшая заявка может занять случайный объем ресурса на время ожидания начала обслуживания, на время обслуживания или на все время нахождения заявки в системе. В реальных системах в качестве ресурса может выступать объем памяти устройства или радиочастоты беспроводных сетей. Например, во время передачи высококачественного потокового видео ресурсы используются для обеспечения качества контента, а время обслуживания соответствует продолжительности процесса передачи данных.

Известно, что в классической ТМО определение почти всех характеристик производительности сводится к анализу случайного процесса — числа находящихся в системе заявок. Но этого недостаточно, если требуется, например, определить емкость буферного пространства узла сети связи, гарантирующую наименьшие потери передаваемой информации [20]. Каждый узел СМО имеет некоторую потенциальную буферную емкость, т.е. набор ресурсов определенного объема, который может быть выделен для обработки поступающих запросов. Поступающий запрос занимает на время своего обслуживания случайный объем ресурсов обслуживающего узла, который освобождается в том же объеме после того, как запрос покидает систему. Для описания указанной ситуации используют терминологию “СМО со случайным объемом требований” [21] или “Ресурсные СМО (РСМО)” [22, 23].

Интерес к РСМО объясняется актуальностью их применения для моделирования достаточно широкой области технических устройств и информационно-вычислительных систем, например в таких беспроводных сетевых технологиях, как LTE, New Radio или Wi-Fi. Рост популярности исследований таких систем обусловлен необходимостью создания эффективных инструментов оценки работы радиointерфейсов сетей связи нового поколения.

В [24, 25] исследования РСМО проводятся в предположении простейших входящих потоков (отличающихся интенсивностями поступления и обслуживания) и фиксированного запроса на ресурсы.

Для исследования ресурсных систем в настоящее время также не существует универсального метода, поэтому в данной работе применяются асимптотические методы исследования СМО, развиваемые в Томской научной школе по прикладному вероятностному анализу под руководством профессора А.А. Назарова [26]. Такие методы позволяют получить приемлемые для практического использования асимптотические выражения для искомых характеристик системы в случаях, когда их допредельное исследование невозможно. Как правило, при исследовании многолинейных систем обычно предполагается, что серверы идентичны и поступающие требования могут занимать произвольный прибор для своего обслуживания. Гораздо менее изучены СМО с разнородными серверами, которые являются более интересным объектом для исследования [27, 28]. Часто возникают довольно нетривиальные задачи оптимизации, связанные с назначением серверов на приходящие заказы в зависимости от соотношения ставок обслуживания средств и затрат на их использование. Например, в теории телетрафика используют понятия “быстрых” и “медленных” каналов связи. При этом возможна ситуация, когда для входящего требования создается копия, которая передается по другому каналу связи. В этом случае в качестве математической модели можно использовать СМО с параллельным обслуживанием. Такие модели для исследования числа занятых приборов были ранее рассмотрены как в бесконечнолинейных СМО [29, 30], так и в однолинейных системах [31]. Но в указанных работах поступающие в систему требования занимают один дискретный ресурс и не учитывают случайный размер передаваемых данных. Поэтому в настоящей работе предлагаются модели, существенно расширяющие область практического применения, а именно, СМО с двумя узлами параллельной обработки разнотипных данных (информации), требующих для своего обслуживания произвольные ресурсные емкости. Для исследования случайного процесса, описывающего суммарные объемы занимаемых ресурсных емкостей, вводятся динамические вероятности, смысл которых заключается в рассмотрении только тех заявок со своими объемами, которые не завершили свое обслуживание. Для решения задачи анализа общего объема занимаемых ресурсов каждого типа применяется метод асимптотического анализа при условии, что интенсивность обслуживания требований много меньше интенсивности входящего потока, и в предположении, что серверы имеют неограниченные ресурсы [32, 33].

2. Постановка задачи

Рассмотрим РСМО с двумя узлами, отличающимися характеристиками обслуживания (скорость, надежность), каждый из которых содержит достаточное количество (потенциальную емкость) необходимых ресурсов. Опре-

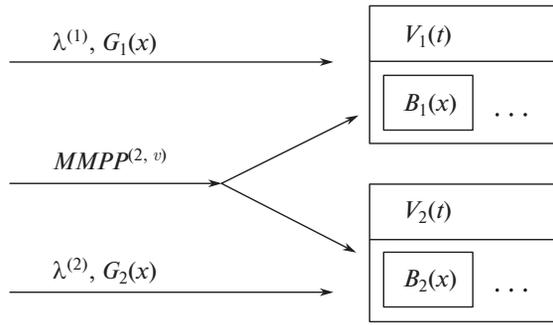


Рис. 1. Математическая модель $(\text{MMPP} + 2\text{M})^{(2,\nu)} / \text{GI}(2) / \infty$.

делим входящие потоки: два пуассоновских с параметрами $\lambda^{(1)}$ и $\lambda^{(2)}$ и марковский модулированный пуассоновский поток (ММРР-поток), управляемый цепью Маркова с конечным числом состояний $k(t) = 1, \dots, K$, заданной матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q} = \|q_{ij}\|$, $i, j = 1, \dots, K$, и диагональной матрицей условных интенсивностей $\mathbf{\Lambda}$ с элементами $\lambda_k \geq 0$, $k = 1, \dots, K$, на главной диагонали. Будем считать, что заявки входящих простейших потоков делятся на два типа по запросу на ресурсы и обслуживание (в первом простейшем потоке заявки первого типа, а во втором — второго), а заявки ММРР-потока одновременно требуют оба типа ресурсов, т.е. входящее требование “расщепляется” на две заявки разного типа. Поступающее требование занимает единицу дискретного ресурса (один прибор — в классических СМО) в блоке, соответствующем ее типу, в течение неотрицательного случайного времени $\xi_i \geq 0$, $i = 1, 2$, с произвольной функцией распределения вероятностей $B_i(\tau) = P\{\xi_i < \tau\}$, $i = 1, 2$, с конечными первым и вторым моментами. В терминах ТМО время обслуживания требования можно также интерпретировать как время передачи сообщения. В данной постановке каждое поступающее требование также формирует запрос на выделение дополнительного (в общем случае непрерывного) ресурса объема, который является неотрицательной случайной величиной $v_i \geq 0$, $i = 1, 2$, с функцией распределения вероятностей $G_i(x) = P\{v_i < x\}$, $i = 1, 2$, также имеющей конечные первые и вторые моменты. В отличие от моделей [34] запрашиваемые ресурсы от поступившей заявки освобождаются в разное время, в зависимости от типа ресурса. Поэтому рассматриваемую систему будем называть гетерогенной РСМО. По окончании обслуживания требование покидает систему. Отличительная особенность рассматриваемых систем заключается в том, что ресурс освобождается ровно в том же объеме, что и запрашивался, в то время как в большинстве работ [35] предполагается, что освобождается случайный объем, не обязательно совпадающий с объемом запроса. Учесть такой фактор, как правило, сложно, так как необходимо хранить информацию о всех случайных величинах, что приводит к увеличению размерности рассматриваемых процессов. В настоящей статье применяется авторский метод — метод динамического просеивания, позволяющий решить указанную проблему. Одним

серьезным допущением в настоящем исследовании является предположение о том, что объем занятого требованием ресурса и время обслуживания требования не коррелируют друг с другом.

На рис. 1 представлено схематичное изображение рассматриваемой системы. Используя символику Кендалла–Башарина, будем обозначать такую систему как $(\text{MMPP} + 2\text{M})^{(2,\nu)}/\text{GI}(2)/\infty$.

Определим $V_i(t)$ — общий объем ресурса i -го типа ($i = 1, 2$), занятый в момент времени t .

Очевидно, что $\mathbf{V}(t) = \{V_1(t), V_2(t)\}$ не является марковским случайным процессом, поэтому для его исследования применим метод многомерного динамического просеивания [36].

3. Метод динамического просеивания

Пусть в некоторый момент времени t_0 система пуста. Отметим на временной оси (рис. 2) под номером 0 моменты поступления требований входящих потоков. Далее зафиксируем произвольный момент времени в будущем $T > t_0$ и будем рассматривать только те требования на ресурсы, которые поступили в систему в некоторый момент времени $t > t_0$ и до фиксированного момента T не освободили выделенные ресурсы. Для этого определим динамические вероятности вида $S_i(t, T) = 1 - B_i(T - t)$, $S_i(t, T) \in [0, 1]$, $i = 1, 2$, в зависимости от типа обслуживания. Такие вероятности будем называть вероятностями просеивания. Очевидно, что с вероятностью $1 - S_i(t, T)$ выделенные в момент времени t ресурсы будут освобождены к моменту времени T . Далее, учитывая, что T — произвольный, но фиксированный момент времени, вероятности $S_i(t, T)$ будем обозначать как $S_i(t)$.

Обозначим через $W_i(t)$ объемы просеянных ресурсов i -го типа. В исходной постановке он будет соответствовать суммарному объему требований, не закончивших свое обслуживание к моменту времени T . Как показано в [36–38], законы распределения вероятностей значений случайного процес-

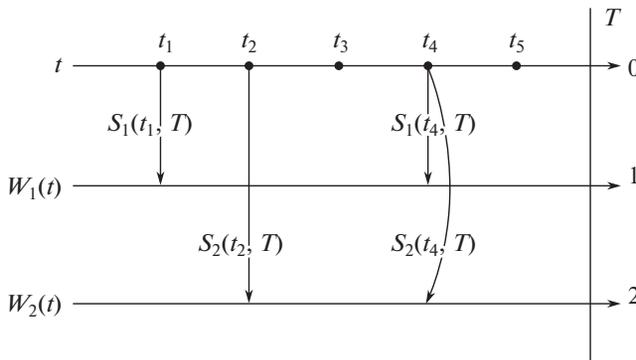


Рис. 2. Динамические вероятности просеивания требований на ресурсы.

са $\mathbf{W}(t) = \{W_1(t), W_2(t)\}$ и исходного процесса $\mathbf{V}(t) = \{V_1(t), V_2(t)\}$ в момент времени $t = T$ совпадают:

$$(1) \quad P\{V_1(T) < x_1, V_2(T) < x_2\} = P\{W_1(T) < x_1, W_2(T) < x_2\} \forall x_1, x_2.$$

Таким образом, в зависимости от типа обслуживания сформируем два новых потока — оси под номерами 1 и 2.

Для построения марковского процесса воспользуемся методом введения дополнительной переменной и построим трехмерный марковский процесс $\{k(t), W_1(t), W_2(t)\}$, где $k(t) = 1, \dots, K$ — состояния управляющей ММРР-потоком цепи Маркова. Введем обозначение для распределения вероятностей

$$P(k, w_1, w_2, t) = P\{k(t) = k, W_1(t) < w_1, W_2(t) < w_2\}.$$

Воспользовавшись формулой полной вероятности и Δt -методом, запишем следующие равенства для всех $k = 1, \dots, K$, $w_1 > 0$, $w_2 > 0$:

$$(2) \quad \begin{aligned} & P(k, w_1, w_2, t + \Delta t) = \\ & = P(k, w_1, w_2, t) (1 - \lambda_k \Delta t) \left(1 - \lambda^{(1)} \Delta t\right) \left(1 - \lambda^{(2)} \Delta t\right) (1 + q_{kk} \Delta t) + \\ & \quad + \lambda_k \Delta t S_1(t) (1 - S_2(t)) \int_0^{w_1} P(k, w_1 - y, w_2, t) dG_1(y) + \\ & \quad + \lambda_k \Delta t S_2(t) (1 - S_1(t)) \int_0^{w_2} P(k, w_1, w_2 - y, t) dG_2(y) + \\ & \quad + \lambda^{(1)} \Delta t S_1(t) \int_0^{w_1} P(k, w_1 - y, w_2, t) dG_1(y) + \\ & \quad + \lambda^{(2)} \Delta t S_2(t) \int_0^{w_2} P(k, w_1, w_2 - y, t) dG_2(y) + \\ & \quad + \left[\lambda_k (1 - S_1(t)) (1 - S_2(t)) + \lambda^{(1)} (1 - S_1(t)) + \right. \\ & \quad \left. + \lambda^{(2)} (1 - S_2(t)) \right] \Delta t P(k, w_1, w_2, t) + \\ & \quad + \lambda_k \Delta t S_1(t) S_2(t) \int_0^{w_1} \int_0^{w_2} P(k, w_1 - y_1, w_2 - y_2, t) dG_1(y_1) dG_2(y_2) + \\ & \quad + \sum_{\nu \neq k} q_{\nu k} \Delta t P(\nu, w_1, w_2, t) + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Откуда после преобразований получаем систему интегрально-дифференциальных уравнений Колмогорова для $k = 1, \dots, K$, $w_1 > 0$, $w_2 > 0$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial P(k, w_1, w_2, t)}{\partial t} = & \left(\lambda_k + \lambda^{(1)} \right) S_1(t) \int_0^{w_1} P(k, w_1 - y, w_2, t) dG_1(y) + \\
 & + \left(\lambda_k + \lambda^{(2)} \right) S_2(t) \int_0^{w_2} P(k, w_1, w_2 - y, t) dG_2(y) - \\
 & - \left(\lambda_k + \lambda^{(1)} \right) S_1(t) P(k, w_1, w_2, t) - \\
 (3) \quad & - \left(\lambda_k + \lambda^{(2)} \right) S_2(t) P(k, w_1, w_2, t) + \lambda_k S_1(t) S_2(t) \left[P(k, w_1, w_2, t) - \right. \\
 & - \int_0^{w_1} P(k, w_1 - y, w_2, t) dG_1(y) - \int_0^{w_2} P(k, w_1, w_2 - y, t) dG_2(y) + \\
 & \left. + \int_0^{w_1} \int_0^{w_2} P(k, w_1 - y_1, w_2 - y_2, t) dG_1(y_1) dG_2(y_2) \right] + \\
 & + \sum_{\nu} q_{\nu k} P(\nu, w_1, w_2, t).
 \end{aligned}$$

Начальное условие для решения $P(k, w_1, w_2, t)$ в момент времени t_0 определим в виде

$$(4) \quad P(k, dw_1, dw_2, t_0) = r(k) \delta_{(0,0)}(dw_1 \times dw_2),$$

где $r(k)$ — компоненты вектора $\mathbf{r} = [r(1), \dots, r(K)]$ стационарного распределения вероятностей состояний управляющей ММРР-потокот цепи Маркова $k(t)$, определяемого матрицей инфинитезимальных характеристик \mathbf{Q} и удовлетворяющего системе линейных уравнений

$$(5) \quad \begin{cases} \mathbf{rQ} = 0, \\ \mathbf{re} = 1. \end{cases}$$

Здесь \mathbf{e} — единичный вектор-столбец.

Для решения системы (3) перейдем к уравнениям для частичных характеристических функций вида

$$(6) \quad h(k, \nu_1, \nu_2, t) = \int_0^{\infty} e^{j\nu_1 w_1} \int_0^{\infty} e^{j\nu_2 w_2} P(k, dw_1, dw_2, t),$$

где $j = \sqrt{-1}$ — мнимая единица, для которых можем записать систему дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(k, \nu_1, \nu_2, t)}{\partial t} = & h(k, \nu_1, \nu_2, t) \left[\left(\lambda_k + \lambda^{(1)} \right) S_1(t) (G_1^*(\nu_1) - 1) + \right. \\ & \left. + \left(\lambda_k + \lambda^{(2)} \right) S_2(t) (G_2^*(\nu_2) - 1) + \lambda_k S_1(t) S_2(t) \left[(1 - G_1^*(\nu_1)) (1 - G_2^*(\nu_2)) \right] \right] + \\ & + \sum_{\nu} q_{\nu k} h(\nu, \nu_1, \nu_2, t), \quad k = 1, \dots, K, \quad w_1 > 0, \quad w_2 > 0, \end{aligned}$$

где

$$G_i^*(\nu_i) = \int_0^{\infty} e^{j\nu_i y} dG_i(y).$$

Для более компактной записи перейдем к матричному виду

$$\begin{aligned} (7) \quad \frac{\partial \mathbf{h}(\nu_1, \nu_2, t)}{\partial t} = & \mathbf{h}(\nu_1, \nu_2, t) \left[\left(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(1)} \right) S_1(t) (G_1^*(\nu_1) - 1) + \right. \\ & + \left(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(2)} \right) S_2(t) (G_2^*(\nu_2) - 1) + \\ & \left. + \mathbf{\Lambda} S_1(t) S_2(t) (1 - G_1^*(\nu_1)) (1 - G_2^*(\nu_2)) + \mathbf{Q} \right] \end{aligned}$$

с начальным условием

$$(8) \quad \mathbf{h}(\nu_1, \nu_2, t_0) = \mathbf{r},$$

где $\mathbf{h}(\nu_1, \nu_2, t) = [h(1, \nu_1, \nu_2, t), \dots, h(K, \nu_1, \nu_2, t)]$ — вектор-строка; \mathbf{Q} — матрица инфинитезимальных характеристик управляющей цепи Маркова $k(t)$, $\mathbf{r} = [r(1), \dots, r(K)]$ — вектор стационарного распределения вероятностей состояний управляющей ММРР-потокот цепи Маркова $k(t)$, определяемый (5), $\mathbf{\Lambda}$ — диагональная матрица условных интенсивностей с элементами $\lambda_k \geq 0$, $k = 1, \dots, K$, на главной диагонали,

$$\mathbf{\Lambda}^{(1)} = \begin{pmatrix} \lambda^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda^{(1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda^{(1)} \end{pmatrix} = \lambda^{(1)} \mathbf{I}, \quad \mathbf{\Lambda}^{(2)} = \begin{pmatrix} \lambda^{(2)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda^{(2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda^{(2)} \end{pmatrix} = \lambda^{(2)} \mathbf{I}.$$

Для задачи (7)–(8) не представляется возможным использовать метод моментов, как в [39], так как получить аналитическое решение системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами не представляется возможным. Поэтому будем искать решение при асимптотическом условии

эквивалентного роста времени обслуживания на серверах. Это асимптотическое условие означает пропорциональный рост среднего времени обслуживания по отношению к среднему значению интервалов времени между приходами входящих запросов. В случае, если параметры обслуживания растут непропорционально, то исследуемые процессы являются слабо коррелированными и их исследование можно проводить отдельно.

4. Асимптотический анализ при условии эквивалентно растущего времени обслуживания

Обозначим среднее время обслуживания заявки в каждом блоке как

$$b_i = \int_0^{\infty} x dB_i(x) = \int_0^{\infty} (1 - B_i(x)) dx, \quad i = 1, 2.$$

Найдем асимптотическое решение задачи (7)–(8) при условии, что среднее время обслуживания в обоих каналах передачи будет расти пропорционально друг другу, т.е. $b_i \rightarrow \infty$, $i = 1, 2$, и $\lim_{b_i \rightarrow \infty} \frac{b_1}{b_2} = q = \text{const}$.

4.1. Аппроксимация первого порядка

В задаче (7)–(8), определив $b_1 = 1/\varepsilon$, $b_2 = 1/q\varepsilon$, выполним замены

$$(9) \quad \begin{aligned} \varepsilon t = \tau, \quad \varepsilon t_0 = \tau_0, \quad S_i(t) = \bar{S}_i(\tau), \quad i = 1, 2, \\ \nu_1 = \varepsilon x_1, \quad \nu_2 = \varepsilon x_2, \quad \mathbf{h}(\nu_1, \nu_2, t) = \mathbf{f}_1(x_1, x_2, \tau, \varepsilon). \end{aligned}$$

Тогда для $\mathbf{f}_1(x_1, x_2, \tau, \varepsilon)$ получаем матричное дифференциальное уравнение

$$(10) \quad \begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \mathbf{f}_1(x_1, x_2, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} = \mathbf{f}_1(x_1, x_2, \tau, \varepsilon) \left[\left(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(1)} \right) \bar{S}_1(\tau) (G_1^*(\varepsilon x_1) - 1) + \right. \\ \left. + \left(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(2)} \right) \bar{S}_2(\tau) (G_2^*(\varepsilon x_2) - 1) + \right. \\ \left. + \mathbf{\Lambda} \bar{S}_1(\tau) \bar{S}_2(\tau) (1 - G_1^*(\varepsilon x_1)) (1 - G_2^*(\varepsilon x_2)) + \mathbf{Q} \right] \end{aligned}$$

с начальным условием

$$\mathbf{f}_1(x_1, x_2, \tau_0, \varepsilon) = \mathbf{r}.$$

Сформулируем и докажем (см. Приложение) следующую теорему.

Теорема 1. Асимптотическое решение $\mathbf{f}_1(x_1, x_2, \tau)$ уравнения (10) при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет вид

$$(11) \quad \mathbf{f}_1(x_1, x_2, \tau) = \mathbf{r} \exp \left\{ j \sum_{i=1}^2 \kappa_i x_i a_i \int_{\tau_0}^{\tau} \bar{S}_i(w) dw \right\},$$

где $\kappa_i = \mathbf{r}(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(i)})\mathbf{e}$ имеет смысл суммарной интенсивности требований, поступающих в i -й обслуживающий блок, $a_i = \int_0^{\infty} y dG_i(y)$ — средний объем запроса на выделение ресурса в i -м блоке, $i = 1, 2$.

Учитывая, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ $\mathbf{f}_1(x_1, x_2, \tau, \varepsilon) \approx \mathbf{f}_1(x_1, x_2, \tau)$, а также (11) и замены (9), можно записать асимптотическое выражение для характеристической функции $\mathbf{h}(\nu_1, \nu_2, t)$:

$$(12) \quad \mathbf{h}(\nu_1, \nu_2, t) = \mathbf{r} \exp \left\{ j \sum_{i=1}^2 \kappa_i \nu_i a_i \int_{t_0}^t S_i(w) dw \right\}.$$

Полагая $t_0 \rightarrow -\infty$, а $t = T$ и учитывая, что

$$\int_{-\infty}^T [1 - B_i(T - w)] dw = \int_0^{\infty} [1 - B_i(w)] dw \doteq b_i,$$

для характеристической функции стационарного распределения вероятностей исследуемого двумерного процесса $h(\nu_1, \nu_2)$ получаем

$$(13) \quad h(\nu_1, \nu_2) = \mathbf{h}(\nu_1, \nu_2, T)\mathbf{e} = \exp \left\{ j \sum_{i=1}^2 \kappa_i \nu_i a_i b_i \right\}.$$

Полученное приближение определяет только аппроксимацию средних значений занимаемых суммарных ресурсов. Чтобы построить качественно более точное приближение, проведем асимптотический анализ второго порядка.

4.2. Аппроксимация второго порядка

Определим решение системы уравнений (7) в виде

$$(14) \quad \mathbf{h}(\nu_1, \nu_2, t) = \mathbf{h}_2(\nu_1, \nu_2, t) \exp \left\{ j \sum_{i=1}^2 \kappa_i \nu_i a_i \int_{t_0}^t S_i(w) dw \right\}.$$

Учитывая (7), нетрудно показать, что $\mathbf{h}_2(\nu_1, \nu_2, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(15) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{h}_2(\nu_1, \nu_2, t)}{\partial t} = & \mathbf{h}_2(\nu_1, \nu_2, t) \left[(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(1)}) S_1(t) (G_1^*(\nu_1) - 1) + \right. \\ & + (\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(2)}) S_2(t) (G_2^*(\nu_2) - 1) + \mathbf{\Lambda} S_1(t) S_2(t) (1 - G_1^*(\nu_1)) (1 - G_2^*(\nu_2)) + \\ & \left. + \mathbf{Q} - j \sum_{i=1}^2 \kappa_i \nu_i a_i S_i(t) \mathbf{I} \right] \end{aligned}$$

с начальным условием

$$\mathbf{h}_2(\nu_1, \nu_2, t_0) = \mathbf{r}.$$

Перейдем к обозначениям $b_1 = 1/\varepsilon^2$, $b_2 = 1/q\varepsilon^2$ и выполним в задаче (15) следующие замены:

$$(16) \quad \begin{aligned} \varepsilon^2 t = \tau, \quad \varepsilon^2 t_0 = \tau_0, \quad S_i(t) = \bar{S}_i(\tau), \quad i = 1, 2, \\ \nu_1 = \varepsilon x_1, \quad \nu_2 = \varepsilon x_2, \quad \mathbf{h}_2(\nu_1, \nu_2, t) = \mathbf{f}_2(x_1, x_2, \tau, \varepsilon). \end{aligned}$$

Получим систему дифференциальных уравнений

$$(17) \quad \begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{f}_2(x_1, x_2, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} = \mathbf{f}_2(x_1, x_2, \tau, \varepsilon) \left[\left(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(1)} \right) \bar{S}_1(\tau) (G_1^*(\varepsilon x_1) - 1) + \right. \\ \left. + \left(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(2)} \right) \bar{S}_2(\tau) (G_2^*(q\varepsilon x_2) - 1) + \right. \\ \left. + \mathbf{\Lambda} \bar{S}_1(\tau) \bar{S}_2(\tau) (1 - G_1^*(\varepsilon x_1)) (1 - G_2^*(q\varepsilon x_2)) + \right. \\ \left. + \mathbf{Q} - j\varepsilon \kappa_1 x_1 a_1 \bar{S}_1(\tau) \mathbf{I} - j\varepsilon \kappa_2 x_2 a_2 \bar{S}_2(\tau) \mathbf{I} \right] \end{aligned}$$

с начальным условием

$$\mathbf{f}_2(x_1, x_2, \tau_0, \varepsilon) = \mathbf{r}.$$

Сформулируем и докажем (см. Приложение) следующую теорему.

Теорема 2. Асимптотическое решение $\mathbf{f}_2(x_1, x_2, \tau)$ уравнения (17) при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_2(x_1, x_2, \tau) = \mathbf{r} \exp \left\{ \frac{j^2}{2} (x_1^2 \kappa_1 \alpha_1 \bar{S}_1(\tau) + \theta_1 (x_1 a_1 \bar{S}_1(\tau))^2) + \right. \\ \left. + \frac{j^2}{2} (x_2 \kappa_2 \alpha_2 \bar{S}_2(\tau) + \theta_2 (x_2 a_2 \bar{S}_2(\tau))^2) + \frac{j^2 x_1 x_2}{2} \bar{S}_1(\tau) \bar{S}_2(\tau) a_1 a_2 \theta \right\}, \end{aligned}$$

где $\alpha_i = \int_0^\infty y^2 dG_i(y)$ — вторые начальные моменты запрашиваемого объема ресурса i -го типа, $\theta_i = 2\mathbf{g}_i(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(i)})\mathbf{e}$, $\theta = 2(\kappa + \mathbf{g}_1(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(2)})\mathbf{e} + \mathbf{g}_2(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(1)})\mathbf{e})$, $i = 1, 2$, $\kappa = \mathbf{r}\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}$ — интенсивность входящего ММРР-потока, а вектор-функции \mathbf{g}_1 и \mathbf{g}_2 определяются системой уравнений

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathbf{g}_1 \mathbf{Q} &= \mathbf{r} [\kappa_1 \mathbf{I} - (\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(1)})], \\ \mathbf{g}_2 \mathbf{Q} &= \mathbf{r} [\kappa_2 \mathbf{I} - (\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(2)})], \\ \mathbf{g}_1 \mathbf{e} &= 0, \\ \mathbf{g}_2 \mathbf{e} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Учитывая (14), (16) и то, что $\mathbf{f}_2(x_1, x_2, \tau, \varepsilon) \approx \mathbf{f}_2(x_1, x_2, \tau)$, можем записать приближенное выражение для характеристической функции $\mathbf{h}(\nu_1, \nu_2, t)$:

$$(19) \quad \mathbf{h}(\nu_1, \nu_2, t) = \mathbf{r} \exp \left\{ j \sum_{i=1}^2 \kappa_i \nu_i a_i \int_{t_0}^t S_i(w) dw + \frac{j^2}{2} \left(\nu_1^2 \kappa_1 \alpha_1 \int_{t_0}^t S_1(w) dw + \nu_2^2 \kappa_2 \alpha_2 \int_{t_0}^t S_2(w) dw + \nu_2^2 \theta_2 a_2^2 \int_{t_0}^t S_2^2(w) dw + \nu_1^2 \theta_1 a_1^2 \int_{t_0}^t S_1^2(w) dw + \nu_1 \nu_2 \theta a_1 a_2 \int_{t_0}^t S_1(w) S_2(w) dw \right) \right\}.$$

Полагая $t_0 \rightarrow -\infty$, а $t = T$, получаем следующее выражение для характеристической функции совместного распределения ресурсов, выделяемых в обоих блоках серверов в стационарном режиме:

$$(20) \quad h(\nu_1, \nu_2) = \exp \left\{ j(\kappa_1 \nu_1 a_1 b_1 + \kappa_2 \nu_2 a_2 b_2) + \frac{(j\nu_1)^2}{2} (\kappa_1 \alpha_1 b_1 + \theta_1 a_1^2 \beta_1) + \frac{(j\nu_2)^2}{2} (\kappa_2 \alpha_2 b_2 + \theta_2 a_2^2 \beta_2) + j\nu_1 j\nu_2 \theta a_1 a_2 \beta_{12} \right\},$$

где

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^T S_k^2(x) dx = \int_{-\infty}^0 [1 - B_k(T - x)]^2 dx = \int_0^{\infty} [1 - B_k(x)]^2 dx \doteq \beta_k, \quad k = 1, 2,$$

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^T S_1(x) S_2(x) dx = \int_{-\infty}^0 [1 - B_1(T - x)] [1 - B_2(T - x)] dx = \int_0^{\infty} [1 - B_1(x)] [1 - B_2(x)] dx \doteq \beta_{12}.$$

Итак, можно сделать вывод о том, что стационарное распределение вероятностей двумерного процесса $\{V_1(t), V_2(t)\}$ является асимптотически гауссовским с вектором средних

$$\mathbf{a} = [\kappa_1 a_1 b_1 \quad \kappa_2 a_2 b_2]$$

и матрицей ковариации

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \kappa_1 \alpha_1 b_1 + \theta_1 a_1^2 \beta_1 & \theta a_1 a_2 \beta_{12} \\ \theta a_1 a_2 \beta_{12} & \kappa_2 \alpha_2 b_2 + \theta_2 a_2^2 \beta_2 \end{bmatrix}.$$

5. Заключение

В статье проведено исследование неоднородной ресурсной СМО с разделением входящих запросов (двух пуассоновских потоков и ММРР-потока) на два типа, каждый из которых формирует требование случайного объема на ресурс. Решена задача анализа суммарного объема занимаемых ресурсов каждого типа при асимптотическом условии эквивалентного роста времени обслуживания в предположении, что серверы имеют неограниченные ресурсы. Доказано, что двумерный случайный процесс занимаемых ресурсов имеет гауссовское распределение вероятностей.

Очевидно, что на практике обычно нет бесконечного резерва ресурсов для использования, но в случае системы с ограниченными ресурсами можно использовать результаты для решения задачи выбора максимальных значений ресурсов, предоставляемых в каждом блоке и удовлетворяющих определенным условиям, например заданном уровне потерь запросов из-за отсутствия ресурсов для их обслуживания. Поскольку совместное распределение вероятностей занятых ресурсов является двумерным гауссовским, то оценка оптимальных значений ресурсов в каждом канале может быть найдена по правилу «трех сигм».

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Представив экспоненты в виде разложения в ряд

$$(П.1) \quad \begin{aligned} e^{j\varepsilon x_i} &= 1 + j\varepsilon x_i + O(\varepsilon^2), \\ 1 - G_i^*(\varepsilon x_i) &= j\varepsilon x_i \int_0^\infty y dG_i(y) + O(\varepsilon^2), \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

выполним предельный переход в (10) при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Получим, что $\mathbf{f}_1(x_1, x_2, \tau)\mathbf{Q} = 0$, где $\mathbf{f}_1(x_1, x_2, \tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{f}_1(x_1, x_2, \tau, \varepsilon)$.

Учитывая (5), можно определить функцию $\mathbf{f}_1(x_1, x_2, \tau)$ в виде

$$(П.2) \quad \begin{cases} \mathbf{f}_1(x_1, x_2, \tau) = \mathbf{r}\Phi_1(x_1, x_2, \tau), \\ \Phi_1(x_1, x_2, \tau_0) = 1, \end{cases}$$

где $\Phi_1(x_1, x_2, \tau)$ — некоторая дифференцируемая скалярная функция.

Просуммируем все уравнения (10), домножив обе части на единичный вектор-столбец \mathbf{e} , и подставим в полученное выражение разложения (П.1) и (П.2):

$$\begin{aligned} \varepsilon \mathbf{r} \frac{\partial \Phi_1(x_1, x_2, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} \mathbf{e} &= \mathbf{r}\Phi_1(x_1, x_2, \tau, \varepsilon) \times \\ &\times \left[(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(1)}) \bar{S}_1(\tau) j\varepsilon x_1 a_1 + (\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(2)}) \bar{S}_2(\tau) j\varepsilon x_2 a_2 \right] \mathbf{e} + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

где $a_i = \int_0^{\infty} y dG_i(y)$, $i = 1, 2$ — среднее значение суммарного объема занимаемого ресурса i -го типа.

Устремим $\varepsilon \rightarrow 0$ и получим

$$\begin{aligned} & \mathbf{r} \frac{\partial \Phi_1(x_1, x_2, \tau)}{\partial \tau} \mathbf{e} = \\ & = \mathbf{r} \Phi_1(x_1, x_2, \tau) \left[\left(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(1)} \right) \bar{S}_1(\tau) j x_1 a_1 + \left(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(2)} \right) \bar{S}_2(\tau) j x_2 a_2 \right] \mathbf{e}. \end{aligned}$$

Обозначим $\kappa_i = \mathbf{r}(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(i)})\mathbf{e}$, $i = 1, 2$, и получим дифференциальное уравнение для функции $\Phi_1(x_1, x_2, \tau)$

$$\frac{\partial \Phi_1(x_1, x_2, \tau)}{\partial \tau} = \Phi_1(x_1, x_2, \tau) \left[\kappa_1 \bar{S}_1(\tau) j x_1 a_1 + \kappa_2 \bar{S}_2(\tau) j x_2 a_2 \right].$$

Учитывая начальные условия $\Phi_1(x_1, x_2, \tau_0) = 1$, получаем, что

$$(П.3) \quad \Phi_1(x_1, x_2, \tau) = \exp \left\{ j \left(\kappa_1 x_1 a_1 \int_{\tau_0}^{\tau} \bar{S}_1(w) dw + \kappa_2 x_2 a_2 \int_{\tau_0}^{\tau} \bar{S}_2(w) dw \right) \right\}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{f}_1(x_1, x_2, \tau) = \mathbf{r} \exp \left\{ j \sum_{i=1}^2 \kappa_i x_i a_i \int_{\tau_0}^{\tau} \bar{S}_i(w) dw \right\}.$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Подставим в (17) следующее разложение:

$$\begin{aligned} & e^{j\varepsilon x_i} = 1 + j\varepsilon x_i + \frac{(j\varepsilon x_i)^2}{2} + O(\varepsilon^3), \\ (П.4) \quad & 1 - G_i^*(\varepsilon x_i) = j\varepsilon x_i \int_0^{\infty} y dG_i(y) + \frac{(j\varepsilon x_i)^2}{2} \int_0^{\infty} y^2 dG_i(y) = \\ & = j\varepsilon x_i a_i + \frac{(j\varepsilon x_i)^2}{2} \alpha_i + O(\varepsilon^3), \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

где $\alpha_i = \int_0^{\infty} y^2 dG_i(y)$ — второй начальный момент суммарного объема занимаемого ресурса i -го типа ($i = 1, 2$).

В результате получим дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{f}_2(x_1, x_2, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} = \\
 & = \mathbf{f}_2(x_1, x_2, \tau, \varepsilon) \left[\left(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(1)} \right) \bar{S}_1(\tau) \left(j\varepsilon x_1 a_1 + \frac{(j\varepsilon x_1)^2}{2} \alpha_1 \right) + \right. \\
 (\text{П.5}) \quad & + \left(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(2)} \right) \bar{S}_2(\tau) \left(j\varepsilon x_2 a_2 + \frac{(j\varepsilon x_2)^2}{2} \alpha_2 \right) + \\
 & + \mathbf{\Lambda} \bar{S}_1(\tau) \bar{S}_2(\tau) j^2 \varepsilon^2 x_1 x_2 a_1 a_2 + \mathbf{Q} - \\
 & \left. - j\varepsilon \kappa_1 x_1 a_1 \bar{S}_1(\tau) \mathbf{I} - j\varepsilon \kappa_2 x_2 a_2 \bar{S}_2(\tau) \mathbf{I} \right] + O(\varepsilon^3),
 \end{aligned}$$

решение которого будем искать в виде разложения

$$\begin{aligned}
 (\text{П.6}) \quad & \mathbf{f}_2(x_1, x_2, \tau, \varepsilon) = \\
 & = \Phi_2(x_1, x_2, \tau, \varepsilon) \left\{ \mathbf{r} + j\varepsilon x_1 a_1 \bar{S}_1(\tau) \mathbf{g}_1 + j\varepsilon x_2 a_2 \bar{S}_2(\tau) \mathbf{g}_2 \right\} + O(\varepsilon^2),
 \end{aligned}$$

где $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$ — неизвестные вектор-функции.

Подставив разложение (П.6) в (П.5), а также разделив на ε и устремив $\varepsilon \rightarrow 0$, получим выражение

$$\begin{aligned}
 0 = \Phi_2(x_1, x_2, \tau) \left\{ \mathbf{r} j \left[\left(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(1)} \right) \bar{S}_1(\tau) x_1 a_1 - \kappa_1 x_1 \bar{S}_1(\tau) a_1 \mathbf{I} \right] + \right. \\
 + j \kappa_1 \bar{S}_1(\tau) a_1 \mathbf{g}_1 \mathbf{Q} + \\
 \left. + \mathbf{r} j \left[\left(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(2)} \right) \bar{S}_2(\tau) x_2 a_2 - \kappa_2 x_2 \bar{S}_2(\tau) a_2 \mathbf{I} \right] + j \kappa_2 \bar{S}_2(\tau) a_2 \mathbf{g}_2 \mathbf{Q} \right\}.
 \end{aligned}$$

Следовательно, для нахождения \mathbf{g}_1 и \mathbf{g}_2 достаточно решить систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \mathbf{r} j \left[\left(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(1)} \right) \bar{S}_1(\tau) x_1 a_1 - \kappa_1 x_1 \bar{S}_1(\tau) a_1 \mathbf{I} \right] + j \kappa_1 \bar{S}_1(\tau) a_1 \mathbf{g}_1 \mathbf{Q} = 0, \\
 \mathbf{r} j \left[\left(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(2)} \right) \bar{S}_2(\tau) x_2 a_2 - \kappa_2 x_2 \bar{S}_2(\tau) a_2 \mathbf{I} \right] + j \kappa_2 \bar{S}_2(\tau) a_2 \mathbf{g}_2 \mathbf{Q} = 0, \\
 \mathbf{g}_1 \mathbf{e} = 0, \\
 \mathbf{g}_2 \mathbf{e} = 0,
 \end{array} \right.$$

которая преобразуется в систему линейных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \mathbf{g}_1 \mathbf{Q} = \mathbf{r} \left[\kappa_1 \mathbf{I} - \left(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(1)} \right) \right], \\
 \mathbf{g}_2 \mathbf{Q} = \mathbf{r} \left[\kappa_2 \mathbf{I} - \left(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(2)} \right) \right], \\
 \mathbf{g}_1 \mathbf{e} = 0, \\
 \mathbf{g}_2 \mathbf{e} = 0.
 \end{array} \right.$$

Собирая слагаемые при второй степени ε , получим дифференциальное уравнение для функции $\Phi_2(x_1, x_2, \tau)$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Phi_2(x_1, x_2, \tau)}{\partial \tau} = \\ & = \Phi_2(x_1, x_2, \tau) \left\{ \frac{(jx_1)^2}{2} \left\{ \mathbf{r}(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(1)})\alpha_1 \bar{S}_1(\tau) + \mathbf{g}_1(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(1)})(a_1 \bar{S}_1(\tau))^2 \right\} + \right. \\ & \quad + \frac{(jx_2)^2}{2} \left\{ \mathbf{r}(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(2)})\alpha_2 \bar{S}_2(\tau) + \mathbf{g}_2(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(2)})(a_2 \bar{S}_2(\tau))^2 \right\} + \\ & \quad \left. + \frac{j^2 x_1 x_2}{2} \bar{S}_1(\tau) \bar{S}_2(\tau) a_1 a_2 \left\{ 2\mathbf{r}\mathbf{\Lambda} + 2\mathbf{g}_1(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(2)}) + 2\mathbf{g}_2(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(1)}) \right\} \right\} \mathbf{e}, \end{aligned}$$

решением которого, удовлетворяющим начальному условию $\Phi_2(x_1, x_2, \tau_0) = 1$, будет функция $\Phi_2(x_1, x_2, \tau)$ вида

$$\begin{aligned} (II.7) \quad \Phi_2(x_1, x_2, \tau) = \exp \left\{ \frac{j^2}{2} (x_1^2 \kappa_1 \alpha_1 \bar{S}_1(\tau) + \theta_1 (x_1 a_1 \bar{S}_1(\tau))^2) + \right. \\ \left. + \frac{j^2}{2} (x_2 \kappa_2 \alpha_2 \bar{S}_2(\tau) + \theta_2 (x_2 a_2 \bar{S}_2(\tau))^2) + \right. \\ \left. + \frac{j^2 x_1 x_2}{2} \bar{S}_1(\tau) \bar{S}_2(\tau) a_1 a_2 \theta \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \kappa_i &= \mathbf{r} \left(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(i)} \right) \mathbf{e}, \quad \theta_i = 2\mathbf{g}_i \left(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(i)} \right) \mathbf{e}, \\ \theta &= 2 \left(\kappa + \mathbf{g}_1 \left(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(2)} \right) \mathbf{e} + \mathbf{g}_2 \left(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(1)} \right) \mathbf{e} \right), \\ \kappa &= \mathbf{r}\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_2(x_1, x_2, \tau) = \mathbf{r} \exp \left\{ \frac{j^2}{2} (x_1^2 \kappa_1 \alpha_1 \bar{S}_1(\tau) + \theta_1 (x_1 a_1 \bar{S}_1(\tau))^2) + \right. \\ \left. + \frac{j^2}{2} (x_2 \kappa_2 \alpha_2 \bar{S}_2(\tau) + \theta_2 (x_2 a_2 \bar{S}_2(\tau))^2) + \frac{j^2 x_1 x_2}{2} \bar{S}_1(\tau) \bar{S}_2(\tau) a_1 a_2 \theta \right\}. \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Erlang A.K. The Theory of Probabilities and Telephone Conversations // Nytt Tidsskrift for Matematik. Seria B. 1909. V. 20. P. 33–39.

2. *Erlang A.K.* Solution of some Problems in the Theory of Probabilities of Significance in Automatic Telephone Exchanges // *Elektroteknikeren*. 1917. V. 13. P. 5–13.
3. *Гайдамака Ю.В., Зарипова Э.Ю., Самуйлов К.Е.* Модели обслуживания вызовов в сети сотовой подвижной связи. М.: РУДН, 2008.
4. *Andrews J.G., Jo H., Sang Y.J., Xia P.* Heterogeneous Cellular Networks with Flexible Cell Selection: a Comprehensive Downlink SINR Analysis // *IEEE Trans. Wireless Communications*. 2012. V. 11. No. 10. P. 3484–3495.
5. *Lee W.C.Y.* Mobile Cellular Telecommunications: Analog and Digital Systems, 2nd ed. N.Y.: McGraw-Hill, 1995.
6. *Назаров А.А., Мусеев А.Н.* Распределенная система обработки данных физических экспериментов // *Известия вузов. Физика*. 2014. Т. 57. № 7. С. 112–117.
7. *Топорков В.В.* Модели распределенных вычислений. М.: Физматлит, 2004.
8. *Хорошевский В.Г., Павский В.А.* Расчет показателей эффективности функционирования распределенных вычислительных систем // *Автометрия*. 2008. Т. 44. № 2. С. 3–15.
9. *Brown L., Gans N., Mandelbaum A., Sakov A., Shen H., Zeltyn S., Zhao L.* Statistical Analysis of a Telephone Call Center: a Queueing-science Perspective // *J. Amer. Statist. Associat.* 2005. V. 100. P. 36–50.
10. *Gans N., Koole G., Mandelbaum A.* Telephone Call-centers: Tutorial, Review and Research Prospects // *Manuf. Serv. Manag.* 2003. V. 5. P. 79–141.
11. *Koole G., Mandelbaum A.* Queueing Models of Call Centers: An Introduction // *Ann. Oper. Res.* 2002. V. 113. P. 41–59.
12. *Афанасьева Л.Г., Булинская Е.В.* Математические модели транспортных систем, основанные на теории очередей // *Труды Московского физико-технического института (государственного университета)*. 2010. Т. 2. № 4. С. 6–21.
13. *Задорожный В.Н.* Транспортная сеть массового обслуживания: теория и эксперименты // *Динамика систем, механизмов и машин*. 2014. № 3. С. 162–165.
14. *Fedotkin M.A.* On a Class of Stable Algorithms for Control of Conflicting Flows or Arriving Airplanes // *Problems of control and information theory*. 1977. V. 6. No. 1. P. 13–22.
15. *Башарин Г.П., Гайдамака Ю.В., Самуйлов К.Е.* Математическая теория телеграфика и ее приложения к анализу мультисервисных сетей связи следующих поколений // *Автоматика и вычислительная техника*. 2013. № 2. С. 11–21.
16. *Башарин Г.П., Самуйлов К.Е., Яркина Н.В., Гудкова И.А.* Новый этап развития математической теории телеграфика // *АиТ*. 2009. № 12. С. 16–28.
Basharin G.P., Samouylov K.E., Yarkina N.V., Gudkova I.A. A New Stage in Mathematical Teletraffic Theory // *Autom. Remote Control*. 2009. V. 70. No. 12. P. 1954–1964.
17. *Borst S., Mandelbaum A., Reiman M.I.* Dimensioning Large Call Centers // *Operations Research*. 2004. V. 52. P. 17–34.
18. *Дудин А.Н., Клименок В.И., Вишневецкий В.М.* The Theory of Queueing Systems with Correlated Flows. Heidelberg, Germany: Springer, 2020.
19. *Степанов С.Н.* Теория телеграфика: концепции, модели, приложения. М.: Горячая линия-Телеком, 2015.

20. *Tikhonenko O., Ziolkowski M., Kempa W.M.* Queueing Systems with Random Volume Customers and a Sectorized Unlimited Memory Buffer // *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 2021. V. 31. No. 3. P. 471–486.
21. *Tikhonenko O., Ziolkowski M.* Queueing Systems with Random Volume Customers and their Performance Characteristics // *JIOS*. 2021. V. 45. No. 1. P. 21–38.
22. *Горбунова А.В., Наумов В.А., Гайдамака Ю.В., Самуйлов К.Е.* Ресурсные системы массового обслуживания как модели беспроводных систем связи // *Информатика и ее применение*. 2018. Т. 12. No. 3. С. 48–55.
23. *Наумов В.А., Самуйлов К.Е.* Анализ сетей ресурсных систем массового обслуживания // *АиТ*. 2018. № 5. С. 59–68.
Naumov V.A., Samouylov K.E. Analysis of Networks of the Resource Queueing Systems // *Autom. Remote Control*. 2018. V. 79. No. 5. P. 822–829.
24. *Naumov V., Samouylov K.* Resource System with Losses in a Random Environment // *Mathematics*. 2021. V. 9. No. 21. P. 1–10.
25. *Moskaleva F., Lisovskaya E., Gaidamaka Y.* Resource Queueing System for Analysis of Network Slicing Performance with QoS-Based Isolation // *Dudin A., Nazarov A., Moiseev A. (eds.) Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications. ITMM 2020. Communications in Computer and Information Science*. V. 1391. Springer, Cham, 2021.
26. *Назаров А.А., Моисеева С.П.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2006.
27. *Ефросинин Д.В., Фархадов М.П., Степанова Н.В.* Исследование управляемой системы массового обслуживания с ненадежными неоднородными приборами // *АиТ*. 2018. № 2. С. 80–105.
Efrosinin D.V., Farkhadov M.P., Stepanova N.V. Study of a Controllable Queueing System with Unreliable Heterogeneous Servers // *Autom. Remote Control*. 2018. V. 79. No. 2. P. 265–285.
28. *Клименок В.И., Дудин А.Н., Вишневский В.М.* Priority Multi-Server Queueing System with Heterogeneous Customers // *Mathematics*. 2020. V. 8. № 9. С. 1501–1517.
29. *Ивановская И.А., Моисеева С.П.* Исследование математической модели параллельного обслуживания заявок смешанного типа // *Известия Томского политехнического университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2010. Т. 317. № 5. С. 32–34.
30. *Sinyakova I., Moiseeva S.* Investigation of Output Flows in the System with Parallel Service of Multiple Requests // *Problems of Cybernetics and Informatics*. Baku, Azerbaijan, 2012. P. 180–181.
31. *Мокров Е.В., Чукарин А.В.* Анализ показателей эффективности системы облачных вычислений с миграцией серверов // *T-Comm—Телекоммуникации и Транспорт*. 2014. № 8. С. 64–67.
32. *Pankratova E.V., Moiseeva S.P., Farhadov M.P., Moiseev A.N.* Heterogeneous System $MPP/GI(2)/\infty$ with Random Customers Capacities / *Журн. СВУ. Сер. Матем. и физ.* 2019. 12:2 (2019). С. 231–239.
33. *Лисовская Е.Ю., Моисеева С.П., Пагано М., Панкратова Е.В.* Heterogeneous System $GI/GI(n)/\infty$ with Random Customers Capacities // *Applied Probability and Stochastic Processes. Infosys Science Foundation Series*. Singapore: Springer, Singapore, 2020. С. 507–521.

34. *Galileyskaya A., Lisovskaya E., Pagano M.* On the Total Amount of the Occupied Resources in the Multi-resource QS with Renewal Arrival Process // CCIS. 2019. V. 1109. P. 257–269.
35. *Tikhonenko O., Kempa W.M.* The Generalization of AQM Algorithms for Queueing Systems with Bounded Capacity // PPAМ. Torun. Poland. 2011. LNCS. V. 7204. P. 242–251. Springer. Heidelberg (2012).
36. *Моисеев А.Н., Назаров А.А.* Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2015.
37. *Lisovskaya E., Moiseeva S., Pagano M., Potatueva V.* Study of the MMPP/GI/ ∞ Queueing System with Random Customers' Capacities // Informatics and Applications. 2017. V. 11. Is. 4. P. 111–119.
38. *Moiseev A., Moiseeva S., Lisovskaya E.* Infinite-server Queueing Tandem with MMPP Arrivals and Random Capacity of Customers // European Conference on Modelling and Simulation. Budapest, 2017. P. 673–679.
39. *Bushkova T., Galileyskaya A., Lisovskaya E., Pankratova E., Moiseeva S.* Multi-service Resource Queue with the Multy-component Poisson Arrivals // Global and Stochastic Analysis. 2021. V. 8. No 3. P. 97–109.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Вишневым.

Поступила в редакцию 19.01.2022

После доработки 24.03.2022

Принята к публикации 28.04.2022