

## Стохастические системы

© 2022 г. А.С. АРХИПОВ (ege3145@yandex.ru),  
К.В. СЕМЕНИХИН, д-р физ.-мат. наук (siemenkv@rambler.ru)  
(Московский авиационный институт)

### МНОГОМЕРНАЯ ЧЕБЫШЕВСКАЯ ГРАНИЦА ТИПА СЕЛБЕРГА

Определена точная верхняя грань вероятности того, что случайный вектор с заданными математическим ожиданием и ковариационной матрицей окажется вне шара. Данная вероятностная граница определяется через решение скалярного уравнения, а в случае единичной ковариационной матрицы дается аналитическим выражением, которое представляет собой многомерное обобщение границы из неравенства Селберга. Показано, что при малых значениях вероятности более типична ситуация, когда искомая граница определяется новым выражением в сравнении с известной верхней оценкой из неравенства Маркова. Полученный результат применен к решению задачи о проверке гипотез с использованием общей альтернативы.

*Ключевые слова:* многомерная чебышевская граница, проблема моментов, неравенство Селберга, проверка гипотез.

**DOI:** 10.31857/S0005231022080037, **EDN:** AGMYRT

#### 1. Введение

Об актуальности робастных оптимизационных моделей, учитывающих неопределенность в задании распределений случайных параметров и возмущений, можно судить по недавнему обзору [1]. В нем описаны теоретические основы и приложения оптимизационных постановок, в которых гарантированное значение целевой функции риска (потерь, ошибки и т.п.) определяется в результате максимизации по множеству распределений из некоторого класса. Весомую часть этих постановок составляют различные варианты проблемы моментов Маркова — задачи о нахождении супремума вероятностного функционала при ограничениях на моментные характеристики вектора, включающего все случайные параметры модели [2, 3].

Для указанных задач, рассматриваемых в многомерной формулировке, наиболее естественным выглядит задание класса распределений с известными (или частично известными) вектором математического ожидания и ковариационной матрицей [4]. К таким постановкам можно отнести задачи робастной оптимизации инвестиций с критериями в виде квантили [5] и математического ожидания [6], задачи минимаксного оценивания с вероятностными

критериями [7, 8], робастные версии задач стохастического программирования [9], в том числе с вероятностными ограничениями [10].

В данной статье рассматривается задача о нахождении верхней границы для вероятности того, что случайный вектор с фиксированными моментами второго порядка окажется вне шара. Такая постановка возникает при вычислении наихудшего значения вероятности ошибки в задаче векторного минимаксного оценивания [7], при построении робастных квадратичных классификаторов [11], при определении гарантированной надежности доверительного эллипсоида, построенного на выборочной ковариационной матрице [12]. Алгоритмическое решение указанной задачи (и даже более общей, когда событие задается системой квадратичных неравенств) получено в [13] путем сведения к задаче полуопределенного программирования. Однако явного выражения из полученного результата не следует даже для случая единичной ковариационной матрицы.

Принципиальной особенностью рассматриваемой в данной статье задачи является то, что математическое ожидание смещено относительно центра шара. К этой постановке наиболее близка работа [14], в которой получен аналог неравенства Селберга [2]. Однако в многомерном случае полученное неравенство дает лишь верхнюю оценку для искомой вероятностной границы. В [15] решалась аналогичная задача, но на более узком классе распределений, образованных смесями гауссовских векторов со случайной ковариационной матрицей. Вместе с тем вид искомой границы в несмещенном случае очевиден: он дается неравенством Маркова.

Отметим также, что точная верхняя грань вероятности попадания в шар, а равно и в любое другое выпуклое множество, получается по единой формуле Маршалла–Олкина [4]. Этот результат можно обобщить на случай объединения нескольких непересекающихся выпуклых множеств [16]. Поэтому вычисление верхней грани вероятности выхода за границы выпуклого многогранного множества может быть сведено к эффективной алгоритмической процедуре даже в том случае, если на распределение случайного вектора дополнительно накладывается условие унимодальности [17]. Без условий на моментные характеристики, но с ограниченным носителем унимодального распределения максимум вероятности непопадания в выпуклое множество достигается на равномерном распределении [18–20].

Тем самым данная статья посвящена получению точной вероятностной границы, явное выражение для которой до сих пор неизвестно.

Статья организована следующим образом: в разделе 2 приведены формулировка проблемы и предварительные замечания; в разделе 3 изложен вывод искомой вероятностной границы и дана формулировка основного результата; в разделе 4 представлен сравнительный анализ способов вычисления и оценки искомой границы; в разделе 5 рассмотрено приложение полученного результата к задаче проверки гауссовской гипотезы против альтернативы

с произвольным распределением; в Приложении даны доказательства вспомогательных утверждений.

## 2. Постановка задачи и предварительные замечания

Рассмотрим класс всевозможных распределений  $\mathcal{P}(\mu, R)$  случайного вектора  $X \in \mathbb{R}^n$  с заданными математическим ожиданием и ковариационной матрицей

$$(1) \quad \mathbb{M}X = \mu, \quad \text{cov}\{X, X\} = R.$$

Матрица  $R$  предполагается положительно определенной:  $R \succ O$ .

Цель данной работы — определить точную верхнюю грань вероятности того, что вектор с неизвестным распределением и указанными моментными характеристиками окажется вне шара

$$\mathcal{B}_t = \{x: \|x\| \leq t\},$$

где  $\|\cdot\|$  — евклидова норма.

*Задача 1.* Для заданных  $t > 0$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^n$  и  $R \succ O$  определить

$$(2) \quad p_t(\mu, R) = \sup_{X \sim \mathcal{P}(\mu, R)} \mathbb{P}\{X \notin \mathcal{B}_t\}.$$

Указанную границу принято называть чебышевской по аналогии с неравенством Чебышева, которое дает наилучшую верхнюю оценку для вероятности выхода за границы интервала

$$\mathbb{P}\{|X - \mu| \geq t\} \leq \min\{\sigma^2/t^2, 1\}$$

для скалярных случайных величин  $X \sim \mathcal{P}(\mu, \sigma^2)$ .

Если же интервал смещен относительно математического ожидания  $\mu$ , то известно неравенство Селберга [2]

$$(3) \quad \mathbb{P}\{|X| \geq t\} \leq \mathbf{s}_t^{(1)}(r, \sigma) = \begin{cases} \sigma^2 / (\sigma^2 + (t - r)^2), & \sigma^2 + r^2 \leq rt, & \text{(i)} \\ (\sigma^2 + r^2) / t^2, & rt \leq \sigma^2 + r^2 \leq t^2, & \text{(ii)} \\ 1, & \sigma^2 + r^2 \geq t^2, & \text{(iii)} \end{cases}$$

которое определяет точную вероятностную границу на том же классе распределений  $\mathcal{P}(\mu, \sigma^2)$ , где  $r = |\mu|$ .

Для случайных векторов  $X \sim \mathcal{P}(\mu, R)$  аналог неравенства Чебышева (2) имеет вид соотношения

$$\mathbb{P}\{\|X - \mu\| \geq t\} \leq \mathbb{M}\|X - \mu\|^2 / t^2 = \text{tr } R / t^2,$$

которое получается применением неравенства Маркова к величине  $\|X - \mu\|$ .

Следовательно, при  $\mu = 0$  граница (2) известна:

$$p_t(0, R) = \min \{ \operatorname{tr} R / t^2, 1 \}$$

(см. также лемму 3 из [7], где построено распределение, на котором достигается указанная граница).

Однако при  $\mu \neq 0$  неравенство Маркова описывает лишь верхнюю оценку

$$(4) \quad p_t(\mu, R) \leq \min \{ (\operatorname{tr} R + \|\mu\|^2) / t^2, 1 \},$$

о которой неизвестно, является ли она точной.

Если шар  $\mathcal{B}_t$  заменить на эллипсоид

$$\mathcal{E}_t = \{x \in \mathbb{R}^n : \|Ax\| \leq t\},$$

где  $A$  — невырожденная квадратная матрица, то в силу эквивалентности условий  $X \sim \mathcal{P}(\mu, R)$  и  $AX \sim \mathcal{P}(A\mu, ARA^*)$  проблема нахождения наибольшей вероятности выхода вектора  $X$  за границы эллипсоида приводится к задаче 1

$$\sup_{X \sim \mathcal{P}(\mu, R)} \mathbb{P}\{X \notin \mathcal{E}_t\} = p_t(A\mu, ARA^*).$$

Точная верхняя грань вероятности попадания внутрь шара при тех же условиях на моменты случайного вектора (1) вычисляется по известной формуле Маршалла—Олкина (см., например, [2, теорема 13.8.2] и [16, теорема 6.1]):

$$\sup_{X \sim \mathcal{P}(\mu, R)} \mathbb{P}\{X \in \mathcal{B}_t\} = \frac{1}{1 + \delta^2},$$

где величина  $\delta^2$  определяется двумя эквивалентными способами

$$\begin{aligned} \delta^2 &= \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{ \langle R^{-1}x, x \rangle : x + \mu \in \mathcal{B}_t \} = \\ &= \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \left\{ \langle Ra, a \rangle^{-1} : \langle a, x \rangle \geq 1 \forall x : x + \mu \in \mathcal{B}_t \right\}. \end{aligned}$$

При этом шар  $\mathcal{B}_t$  можно заменить на любое выпуклое множество.

Важно отметить, что задача о поиске чебышевской границы для вероятности попадания в множество, задаваемое несколькими квадратичными ограничениями, решена в [13] алгоритмически путем сведения к задаче полуопределенного программирования (SDP). Благодаря этому, при небольшой размерности случайного вектора численное решение задачи 1 может быть получено эффективными программными средствами [21, 22]. Вместе с тем запись в виде SDP не позволяет ответить на вопрос о точности

неравенства Маркова (4). Кроме того, открытым остается вопрос о применимости решения в виде SDP к задачам, где определение искомой чебышевской границы является лишь подзадачей в более общей постановке. К таким постановкам относится, например, задача минимаксного оценивания: в ней наихудшую вероятность ошибки необходимо максимизировать на множестве неопределенных характеристик модели наблюдения, а затем минимизировать на классе рассматриваемых оценок [7]. Даже если указанная вероятность вычисляется явно через среднеквадратичную ошибку, применение метода SDP к задаче минимаксного оценивания является нетривиальным [23].

### 3. Вывод общего решения и основные подзадачи

Будем рассматривать задачу 1 как проблему моментов. Для этого введем обозначения:  $\mathfrak{M}_+$  — семейство всех неотрицательных конечных борелевских мер на  $\mathbb{R}^n$ ,  $I\{\dots\}$  — индикаторная функция, а также

$$\Gamma(x) = \begin{pmatrix} 1 & x^* \\ x & xx^* \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \text{diag}[1, R] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}.$$

Тогда границу (2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} p_t(\mu, R) &= \sup_{X \sim \mathcal{P}(0, R)} \mathbb{P}\{X + \mu \notin \mathcal{B}_t\} = \\ &= \sup_{\mathbb{Q} \in \mathfrak{M}_+} \left\{ \int I\{x + \mu \notin \mathcal{B}_t\} \mathbb{Q}(dx) : \int \Gamma(x) \mathbb{Q}(dx) = \text{diag}[1, R] \right\}, \end{aligned}$$

где интегралы берутся по всему  $\mathbb{R}^n$ .

Если ввести сопряженную переменную — произвольную симметричную матрицу

$$(5) \quad M = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda^* \\ \lambda & \Lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda_0 \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^n, \quad \Lambda \in \mathbb{R}_s^{n \times n},$$

то получаем максиминное выражение:

$$(6) \quad p_t(\mu, R) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathfrak{M}_+} \inf_M \int I\{\|x + \mu\| \geq t\} \mathbb{Q}(dx) + \text{tr} \left[ M \left( \text{diag}[1, R] - \int \Gamma(x) \mathbb{Q}(dx) \right) \right].$$

В силу предположения  $R \succ O$  матрица  $\text{diag}[1, R]$  представляет собой внутреннюю точку множества моментов

$$\left\{ \int \Gamma(x) \mathbb{Q}(dx) : \mathbb{Q} \in \mathfrak{M}_+ \right\}$$

в пространстве симметричных матриц  $\mathbb{R}_s^{(n+1) \times (n+1)}$  [2, с. 497]. Тогда по теореме 12.2.1 из того же источника получаем, что супремум и инфимум в (6) можно поменять местами. Далее нужно заметить, что супремум по  $\mathbb{Q}$  от интеграла  $\int \dots d\mathbb{Q}$  равен нулю, только если подынтегральное выражение меньше или равно нулю, а в противном случае супремум равен  $+\infty$ . Это позволяет включить ограничение на подынтегральную функцию в задачу минимизации:

$$p_t(\mu, R) = \inf_{\lambda_0, \lambda, \Lambda} \{ \lambda_0 + \text{tr} [\Lambda R] : I\{\|x + \mu\| \geq t\} \leq q(x|M) \forall x \},$$

где обозначено

$$q(x|M) = \text{tr} [M\Gamma(x)] = \lambda_0 + 2\langle \lambda, x \rangle + \langle \Lambda x, x \rangle.$$

Теперь заметим, что ограничение снизу на квадратичную форму  $q(x|M)$  гарантирует ее неотрицательность, что равносильно условию неотрицательной определенности матрицы:  $M \succcurlyeq O$ . Это видно из соотношения

$$\langle M\bar{x}, \bar{x} \rangle = x_0^2 q(x/x_0|M) \geq 0$$

при любом  $\bar{x} = \text{col} [x_0, x]$ , таком что  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Поэтому с учетом обозначений (5) и

$$(7) \quad q_t(M) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{ q(x|M) : \|x + \mu\| \geq t \}$$

получаем

$$(8) \quad p_t(\mu, R) = \min_{M \succcurlyeq O} \{ \lambda_0 + \text{tr} [\Lambda R] : q_t(M) \geq 1 \},$$

где минимум достигается в силу замкнутости и ограниченности множества  $\{M \succcurlyeq O : q_t(M) \geq 1, \lambda_0 + \text{tr} [\Lambda R] \leq 1\}$ , в которое дополнительное введено ограничение согласно  $p_t(\mu, R) \leq 1$ .

Наименьшее значение  $q_0(M)$  квадратичной формы  $q(x|M)$  на всем пространстве достигается в точках  $\tilde{x}$ , удовлетворяющих уравнению

$$(9) \quad \Lambda \tilde{x} + \lambda = 0.$$

Это уравнение разрешимо в силу условия  $M \succcurlyeq O$ , которое для блочной матрицы имеет вид [24, раздел 9.1.6]:

$$\Lambda \succcurlyeq O, \quad \lambda \in \text{im} [\Lambda], \quad \langle \Lambda^+ \lambda, \lambda \rangle \leq \lambda_0,$$

где  $\text{im}$  — образ линейного оператора (пространство столбцов матрицы).

Если матрица  $\Lambda$  вырожденная, то уравнение (9) описывает аффинное подпространство, которое заведомо пересекается с областью  $\{x : \|x + \mu\| \geq t\}$ .

Поэтому  $q_t(M) = q_0(M) = \lambda_0 - \langle \Lambda^+ \lambda, \lambda \rangle$ , что по условию должно быть больше или равно единице. Тогда значение минимизируемой в (8) функции тоже оценивается снизу единицей

$$\lambda_0 + \text{tr}[\Lambda R] \geq 1 + \langle \Lambda^+ \lambda, \lambda \rangle + \text{tr}[\Lambda R] \geq 1.$$

Следовательно, при  $\mathbf{p}_t(\mu, R) < 1$  случай вырожденной матрицы  $\Lambda$  можно заведомо исключить из оптимизации, т.е. определен минимум

$$(10) \quad \mathbf{p}_t(\mu, R) = \\ = \min_{\lambda_0, \lambda \in \mathbb{R}^n, \Lambda \succ O} \{ \lambda_0 + \text{tr}[\Lambda R] : 1 - q_t(M) \leq 0, \langle \Lambda^{-1} \lambda, \lambda \rangle - \lambda_0 \leq 0 \}.$$

Оба ограничения в (10) удовлетворяют условию Слейтера, т.е. неравенства выполнены строго при определенном выборе переменных: например, при  $\Lambda = I$ ,  $\lambda = 0$  и достаточно большом  $\lambda_0$ . Кроме того, функции в левой части обоих неравенств являются выпуклыми по блочной матричной переменной  $M$ , такой что  $\Lambda \succ O$ . Действительно, функция  $1 - q_t(M)$  представляет собой супремум линейных форм, а надграфик функции  $\langle \Lambda^{-1} \lambda, \lambda \rangle - \lambda_0 = y$  описывается линейным матричным неравенством  $M + \text{diag}[y, O] \succcurlyeq O$ .

Если  $\mathbf{p}_t(\mu, R) < 1$ , то в силу (10) по теореме Куна–Таккера о седловой точке [25, с. 85] получаем

$$(11) \quad \mathbf{p}_t(\mu, R) = \\ = \max_{k \geq 0, \ell \geq 0} \inf_{\lambda_0, \lambda \in \mathbb{R}^n, \Lambda \succ O} \{ \lambda_0 + \text{tr}[\Lambda R] + k(1 - q_t(M)) + \ell (\langle \Lambda^{-1} \lambda, \lambda \rangle - \lambda_0) \}.$$

Первая задача, возникающая на пути нахождения  $\mathbf{p}_t(\mu, R)$ , состоит в минимизации квадратичной формы на дополнении к шару (7). Решение дано в следующей лемме.

*Лемма 1.* Для любых  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^n$  и  $\Lambda \succ O$  точная нижняя грань (7) равна

$$(12) \quad q_t(M) = q_t(-\mu | M) + \sup_{c \in [0, \sigma_\Lambda]} \left\{ t^2 c - \langle (\Lambda - cI)^{-1} \nu, \nu \rangle \right\},$$

где  $\nu = \lambda - \Lambda \mu$ , а  $\sigma_\Lambda$  — минимальное собственное значение матрицы  $\Lambda$ .

Доказательство леммы 1 дано в Приложении.

Благодаря тому, что в (11) перед  $q_t(M)$  стоит отрицательный коэффициент, включим супремум по  $c$  во внутреннюю задачу минимизации, а также учтем замену переменной  $\lambda = \nu + \Lambda \mu$ , где  $\nu$  пробегает все пространство  $\mathbb{R}^n$ :

$$\mathbf{p}_t(\mu, R) = \max_{k \geq 0, \ell \geq 0} \inf_{\lambda_0, \nu, \Lambda \succ cI, c \geq 0} \left\{ \lambda_0 + \text{tr}[\Lambda R] + \right. \\ \left. + k \left[ 1 - \lambda_0 + 2 \langle \nu + \Lambda \mu, \mu \rangle - \langle \Lambda \mu, \mu \rangle - t^2 c + \langle (\Lambda - cI)^{-1} \nu, \nu \rangle \right] + \right. \\ \left. + \ell \left[ \langle \Lambda^{-1} (\nu + \Lambda \mu), \nu + \Lambda \mu \rangle - \lambda_0 \right] \right\}.$$

Поскольку  $\lambda_0$  входит линейно и пробегает всю действительную ось, точная нижняя грань по  $\lambda_0$  будет равна нулю только при условии, что соответствующий коэффициент равен нулю:  $1 - k - \ell = 0$ . В противном случае инфимум будет равен  $-\infty$ , откуда

$$\begin{aligned} p_t(\mu, R) = \max_{0 \leq k \leq 1} \inf_{\nu, \Lambda \succ cI, c \geq 0} \left\{ \operatorname{tr} [\Lambda R] + \right. \\ \left. + k \left[ 1 - t^2 c + \langle \Lambda \mu, \mu \rangle + 2 \langle \mu, \nu \rangle + \langle (\Lambda - cI)^{-1} \nu, \nu \rangle \right] + \right. \\ \left. + (1 - k) \langle \Lambda^{-1} (\nu + \Lambda \mu), \nu + \Lambda \mu \rangle \right\}. \end{aligned}$$

Выражение, стоящее под знаком  $\inf$  и рассматриваемое как функция переменной  $\nu$ , представляет собой положительно определенную квадратичную форму, которая без учета свободного коэффициента имеет вид

$$\langle A\nu, \nu \rangle + 2 \langle \mu, \nu \rangle, \quad \text{где } A = k(\Lambda - cI)^{-1} + (1 - k)\Lambda^{-1} \succ O.$$

Поэтому ее минимум равен  $-\langle A^{-1} \mu, \mu \rangle$ . Тогда

$$p_t(\mu, R) = \max_{0 \leq k \leq 1} \inf_{\Lambda \succ cI, c \geq 0} \left\{ k - kt^2 c + \operatorname{tr} [\Lambda R] + \langle (\Lambda - A^{-1}) \mu, \mu \rangle \right\},$$

где

$$\Lambda - A^{-1} = kc \left( I + (1 - k)c(S + kcI)^{-1} \right).$$

Если обозначить  $S = \Lambda - cI$ , то инфимум по  $\Lambda$  от выражения, стоящего в фигурных скобках, будет равен

$$(13) \quad k + c \left( \operatorname{tr} R - kt^2 + k \|\mu\|^2 \right) + \\ + \inf_{S \succ O} \left\{ \operatorname{tr} [SR] + k(1 - k)c^2 \langle (S + kcI)^{-1} \mu, \mu \rangle \right\}.$$

Для дальнейшего нахождения искомой границы понадобится следующий факт.

*Лемма 2. Для заданных  $R \succ O$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$  и  $\gamma > 0$  верно равенство*

$$(14) \quad \inf_{S \succ O} \left\{ \operatorname{tr} [SR] + \langle (S + \gamma I)^{-1} b, b \rangle \right\} = \\ = \begin{cases} \|b\|^2 / \gamma, & \langle R^{-1} b, b \rangle \leq \gamma^2, \\ \langle (I - \xi^2 (R + \xi I)^{-2}) b, b \rangle / \gamma, & \langle R^{-1} b, b \rangle > \gamma^2, \end{cases}$$

где  $\xi$  — единственное положительное решение уравнения

$$(15) \quad \langle R(R + \xi I)^{-2} b, b \rangle = \gamma^2.$$

Доказательство леммы 2 дано в Приложении.

Если обозначить  $bb^* = k(1 - k)c^2\mu\mu^*$ ,  $\gamma = kc$  и

$$(16) \quad d_0 = \langle R^{-1}\mu, \mu \rangle,$$

то по лемме 2 получаем, что точная нижняя грань в (13) равна

$$\begin{cases} (1 - k)c\|\mu\|^2, & k \geq d_0/(d_0 + 1), \\ (1 - k)cf(k/(1 - k)), & 0 < k < d_0/(d_0 + 1), \end{cases}$$

где  $f(\delta)$  — функция положительного аргумента, определяемая по правилу

$$(17) \quad f(\delta) = \langle (I - \xi^2(R + \xi I)^{-2})\mu, \mu \rangle$$

с учетом того, что  $\xi$  — это решение уравнения

$$(18) \quad \langle R(R + \xi I)^{-2}\mu, \mu \rangle = \delta.$$

Если еще учесть случай  $k = 0$ , то искомая граница

$$(19) \quad p_t(\mu, R) = \max \{0, p^{(1)}, p^{(2)}\}$$

выражается через

$$(20) \quad p^{(1)} = \sup_{k \in [d_0/(d_0+1), 1]} \inf_{c \geq 0} \{k + c(\operatorname{tr} R - kt^2 + \|\mu\|^2)\},$$

$$(21) \quad p^{(2)} = \sup_{k \in (0, d_0/(d_0+1))} \inf_{c \geq 0} \{k + c(\operatorname{tr} R - kt^2 + k\|\mu\|^2) + (1 - k)cf(k/(1 - k))\}.$$

В обоих выражениях инфимум по  $c$  будет либо равен нулю (когда соответствующий коэффициент неотрицателен), либо равен  $-\infty$ . Поэтому если ограничения

$$(22) \quad d_0/(d_0 + 1) \leq k \leq \min \{1, (\operatorname{tr} R + \|\mu\|^2)/t^2\}$$

совместны, то  $p^{(1)}$  равно правой части; если же нет, то  $p^{(1)} = -\infty$ . Аналогично,  $p^{(2)}$  равно точной верхней грани тех чисел  $k \in (0, d_0/(d_0 + 1))$ , которые удовлетворяют

$$(23) \quad \operatorname{tr} R - k(t^2 - \|\mu\|^2) + (1 - k)f(k/(1 - k)) \geq 0.$$

Дальнейшие сведения об этом неравенстве даны в следующей лемме.

*Лемма 3. Обозначим*

$$(24) \quad p = (\operatorname{tr} R + \|\mu\|^2)/t^2 \quad \text{и} \quad d_\xi = \langle R(R + \xi I)^{-2}\mu, \mu \rangle$$

*и допустим, что  $p < 1$  и  $\mu \neq 0$ , тогда:*

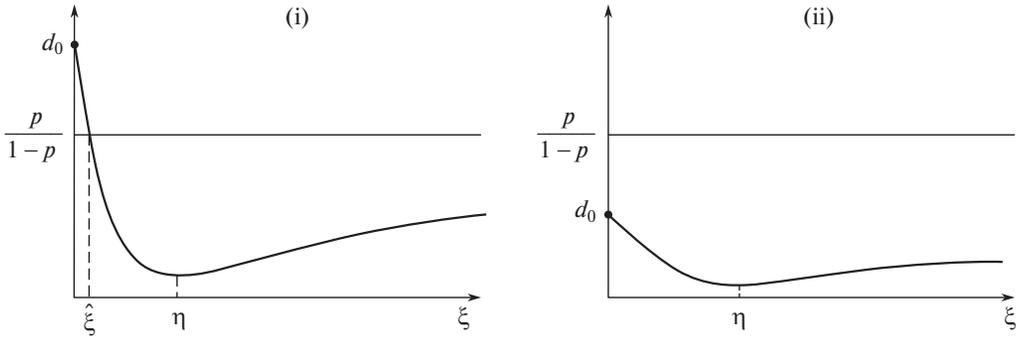


Рис. 1. Левая часть уравнения (25) как функция переменной  $\xi$  в случае (i) (слева) и в случае (ii) (справа).

(i) если ограничения (22) несовместны, то множество решений неравенства (23) имеет вид  $(0, \hat{k}]$ , где  $\hat{k}$  — единственное число  $k$ , на котором (23) обращается в равенство на интервале  $(0, d_0/(d_0 + 1))$ ; это число равно  $\hat{k} = d_\xi/(1 + d_\xi)$ , где  $\xi$  — единственное решение уравнения

$$(25) \quad \langle (R + (\xi^2/\eta) I) (R + \xi I)^{-2} \mu, \mu \rangle = p/(1 - p) \\ \text{при } 0 < \xi < \eta = t^2(1 - p);$$

левая часть этого уравнения является гладкой убывающей функцией;

(ii) если же ограничения (22) совместны, то (23) выполнено для всех  $k \in (0, d_0/(d_0 + 1))$ .

Доказательство леммы 3 дано в Приложении.

Графическая иллюстрация утверждения леммы 3 представлена на рис. 1.

Итак, при  $p < 1$  в случае (i) в силу  $p^{(1)} = -\infty$  имеем  $\mathbf{p}_t(\mu, R) = p^{(2)} = \hat{k}$ , где  $\hat{k}$  описано в лемме 3, а в случае (ii)  $p^{(1)} = p$  и  $p^{(2)} = d_0/(d_0 + 1) \leq p$ , откуда в силу (19) искомая граница совпадает с  $p$ . В случае  $p \geq 1$  из (22) следует  $\mathbf{p}_t(\mu, R) = p^{(1)} = 1$ .

Отметим, что в случае (i) при  $p \uparrow d_0/(d_0 + 1)$  решение  $\xi$  уравнения (25) стремится к нулю, откуда предел  $d_\xi/(d_\xi + 1)$  при  $\xi \downarrow 0$  совпадает со значением искомой границы, вычисленной в случае (ii) при  $p = d_0/(d_0 + 1)$ . Тем самым этот пограничный случай можно отнести к обоим ветвям решения (i) и (ii).

Теперь можно сформулировать окончательный результат о виде вероятностной границы (2).

*Теорема 1.* При произвольных  $t > 0$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^n$  и  $R \succ O$  вероятностная граница (2) в обозначениях (16) и (24) имеет вид

$$(26) \quad \mathbf{p}_t(\mu, R) = \begin{cases} d_\xi/(d_\xi + 1), & p \leq d_0/(d_0 + 1), & \text{(i)} \\ p, & d_0/(d_0 + 1) \leq p \leq 1, & \text{(ii)} \\ 1, & p \geq 1, & \text{(iii)} \end{cases}$$

где  $\xi > 0$  находится из решения уравнения (25).

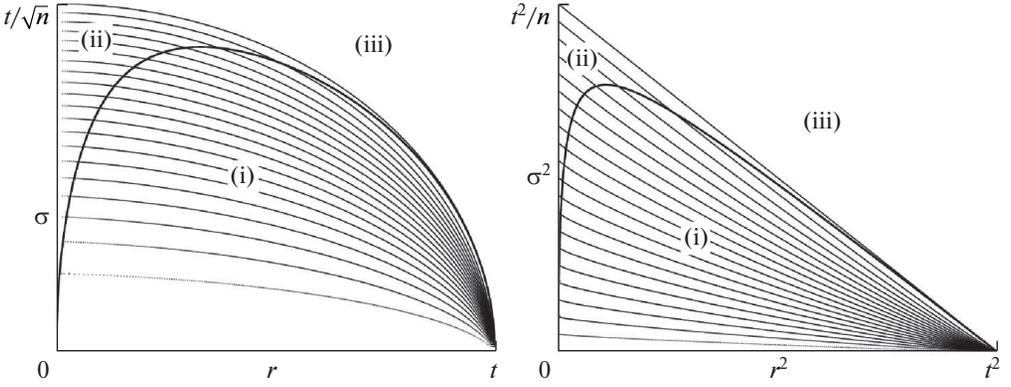


Рис. 2. Линии уровня вероятностной границы  $s_t^{(n)}(r, \sigma) = k/20$  для  $k = 1, \dots, 20$  в переменных  $r, \sigma$  (слева) и в переменных  $r^2, \sigma^2$  (справа).

При достаточно большом радиусе, т.е. при

$$t^2 > (1 + 1/\langle R^{-1}\mu, \mu \rangle) (\text{tr } R + \|\mu\|^2),$$

дробь  $p = (\text{tr } R + \|\mu\|^2)/t^2$ , будучи правой частью неравенства Маркова (4), определяет для вероятностей  $P\{\|X\| \geq t\}$ ,  $X \sim \mathcal{P}(\mu, R)$ , завышенную оценку по сравнению с точной границей (26), (i). Вместе с тем в случае (ii) неравенство Маркова дает неулучшаемую границу для указанных вероятностей.

Формула (19) позволяет получить для найденной границы простую оценку снизу

$$(27) \quad p_t(\mu, R) \geq \begin{cases} \text{tr } R / (t^2 - \|\mu\|^2), & t^2 \geq \text{tr } R + \|\mu\|^2, \\ 1, & t^2 \leq \text{tr } R + \|\mu\|^2. \end{cases}$$

Действительно, каждое из выражений, стоящих в (20) и (21) под знаком  $\sup \inf$ , больше или равно величине  $k + c(\text{tr } R - kt^2 + k\|\mu\|^2)$ , которая после взятия операции  $\sup_{k \in (0,1]} \inf_{c \geq 0}$  дает правую часть (27).

Как верхняя оценка (4), так и нижняя оценка (27) оказываются меньше единицы при одном и том же условии:

$$t^2 > \text{tr } R + \|\mu\|^2.$$

Если случайный вектор состоит из некоррелированных величин одинаковой дисперсии, то при наихудшем выборе его распределения вероятность выхода за границы шара определяется явными соотношениями, поскольку уравнение (25) имеет аналитическое решение.

*Следствие 1.* В случае  $\|\mu\| = r$  и  $R = \sigma^2 I_n$  вероятностная граница (26) равна

$$p_t(\mu, R) = s_t^{(n)}(r, \sigma),$$

где

$$(28) \quad \mathbf{s}_t^{(n)}(r, \sigma) = \begin{cases} \frac{\sigma^2 n^2}{\sigma^2 n^2 + \left(t\sqrt{p + n(1-p)} - r\right)^2}, & p \leq r^2 / (r^2 + \sigma^2), & \text{(i)} \\ p, & r^2 / (r^2 + \sigma^2) \leq p \leq 1, & \text{(ii)} \\ 1, & p \geq 1, & \text{(iii)} \end{cases}$$

с учетом обозначения

$$p = (n\sigma^2 + r^2) / t^2.$$

Доказательство следствия дано в Приложении.

Таким образом, для случайного вектора  $X \sim \mathcal{P}(\mu, \sigma^2 I_n)$  имеет место наилучшая оценка  $\mathbb{P}\{\|X\| > t\} \leq \mathbf{s}_t^{(n)}(r, \sigma)$ , которую можно считать многомерным аналогом неравенства Селберга (3).

Линии уровня многомерной границы Селберга  $\mathbf{s}_t^{(n)}(r, \sigma)$  изображены на рис. 2 (для случая  $n = 50$ ). Самая нижняя линия уровня соответствует вероятности 0,05, выше — 0,1, еще выше — 0,15 и т.д. Из представленных графиков можно сделать вывод, что при малых уровнях вероятности случай (i), соответствующий ранее не известной границе, является более типичным в сравнении со случаем (ii), описывающим привычную границу из неравенства Маркова.

#### 4. Сравнительный анализ полученной вероятностной границы

##### 4.1. Сравнение с методом SDP

Сравним аналитический способ определения вероятностной границы (см. теорему 1) с алгоритмическим методом, основанным на применении техники линейных матричных неравенств [13].

В указанной работе для искомой вероятностной границы предлагаются две эквивалентные формулировки в виде задач полуопределенного программирования:

а) нижняя граница

$$(29) \quad \underline{p}_t(\mu, R) = \sup_{Z, z, \lambda} \left\{ \lambda : \operatorname{tr}[Z] - t^2 \lambda \geq 0, \quad O \preceq \begin{pmatrix} Z & z \\ z^* & \lambda \end{pmatrix} \preceq \begin{pmatrix} R + \mu\mu^* & \mu \\ \mu^* & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

где

$$Z \in \mathbb{R}_s^{n \times n}, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda \in \mathbb{R};$$

б) верхняя граница

$$(30) \quad \bar{\mathbf{p}}_t(\mu, R) = \inf_{P, q, s, \tau} \left\{ \text{tr}[(R + \mu\mu^*)P] + 2\langle \mu, q \rangle + s : \right. \\ \left. \begin{pmatrix} P & q \\ q^* & s \end{pmatrix} \succcurlyeq \begin{pmatrix} \tau I_n & 0 \\ 0 & 1 - \tau t^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P & q \\ q^* & s \end{pmatrix} \succcurlyeq O, \tau \geq 0 \right\},$$

где

$$P \in \mathbb{R}_s^{n \times n}, \quad q \in \mathbb{R}^n, \quad s, \tau \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что если в (29) убрать ограничения на переменную  $z$ , то неравенства на две другие переменные примут вид:

$$O \preccurlyeq Z \preccurlyeq R + \mu\mu^* \quad \text{и} \quad 0 \leq \lambda \leq \min\{\text{tr} Z/t^2, 1\}.$$

Следовательно, максимум достигается на правых частях этих соотношений, что дает границу Маркова (4). Если же в (30) ввести дополнительное ограничение  $1 - \tau t^2 \geq 0$ , то останется только первое матричное неравенство. Тогда с учетом этого неравенства минимизация по переменным  $P, q, s$  дает выражение  $\tau \text{tr}[R + \mu\mu^*] + 1 - \tau t^2$ , минимум которого по  $\tau \in [0, 1/t^2]$  снова равен границе Маркова.

Несмотря на то что указанные преобразования не являются эквивалентными (из них следует лишь оценка сверху для обеих границ), приведенные рассуждения свидетельствуют о том, что сведение задачи 1 к SDP не дает возможности получить явное решение элементарными методами.

Рисунок 3 демонстрирует идентичность границы  $\mathbf{p}_t(\mu, R)$ , найденной с помощью теоремы 1, границам  $\underline{\mathbf{p}}_t(\mu, R)$  и  $\bar{\mathbf{p}}_t(\mu, R)$ , определяемым через решение задач полуопределенного программирования (29) и (30). Участок кривой, соответствующий новому выражению (не совпадающему с границей Маркова), расположен правее жирной точки.

Вычисления были проведены для размерности  $n = 30$ , вектора математического ожидания  $\mu$  с одинаковыми компонентами и ковариационной матрицы  $R = \sigma^2 I_n$ , где  $\sigma = \|\mu\|$ .

#### 4.2. Анализ чувствительности доверительного эллипсоида

Для сравнения точной границы  $\mathbf{p}_t(\mu, R)$  с известными верхними оценками рассмотрим задачу о расчете гарантированной надежности доверительного эллипсоида.

Предположим, что для неизвестного вектора параметров  $\theta \in \mathbb{R}^n$  имеется точечная оценка  $\tilde{\theta}$ , с помощью которой построен доверительный эллипсоид

$$(31) \quad \Theta_t = \left\{ \theta \in \mathbb{R}^n : \langle K_0^{-1}(\theta - \tilde{\theta}), \theta - \tilde{\theta} \rangle \leq t^2 \right\}$$

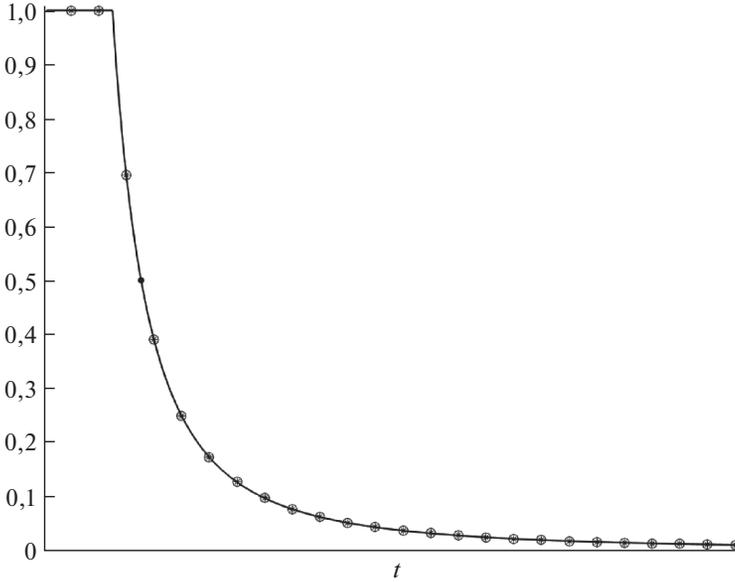


Рис. 3. Вероятностные границы  $p_t(\mu, R)$  (сплошная),  $\underline{p}_t(\mu, R)$  (звездочки) и  $\bar{p}_t(\mu, R)$  (кружочки).

из расчета на некоторую номинальную ковариационную матрицу  $K_0$  и заданный размер эллипсоида  $t > 0$ . При этом оценка  $\tilde{\theta}$  является смещенной, т.е.  $b = M_{\theta}\tilde{\theta} - \theta \neq 0$ , а истинная ковариационная матрица  $\text{cov}\{\tilde{\theta}, \tilde{\theta}\} = K$  отличается от номинальной  $K_0$ .

Задачу о расчете гарантированной надежности доверительного эллипсоида можно сформулировать так: определить нижнюю грань вероятностей  $P_{\theta}\{\theta \in \Theta_t\}$  при условии, что оценка  $\tilde{\theta}$  имеет указанные выше моментные характеристики. Тогда искомая гарантированная надежность равна  $1 - \alpha_t(b, K)$ , где

$$\alpha_t(b, K) = \sup_{Y \sim \mathcal{P}(b, K)} P\left\{\langle K_0^{-1}Y, Y \rangle > t^2\right\} = p_t\left(K_0^{-1/2}b, K_0^{-1/2}K K_0^{-1/2}\right).$$

*Пример 1.* В качестве номинального случая возьмем  $K_0 = I_n$ , что можно интерпретировать двумя способами. В задачах оценивания регрессии вектор  $X = \tilde{\theta} - \theta$  играет роль вектора остатков с ковариационной матрицей, близкой к единичной. В задачах фильтрации компоненты вектора  $X$  имеют смысл процесса невязки, который в номинальном случае должен быть стандартным белым шумом.

Требуется определить, насколько чувствителен доверительный эллипсоид (31) по отношению к отклонению смещения  $b$  и ковариационной матрицы  $K$  от номинального случая  $0$  и  $I_n$  соответственно. В качестве показателя чувствительности возьмем гарантированное значение вероятности, противо-

положительной надежности:

$$(32) \quad \alpha_t(b, K) = \sup_{X \sim \mathcal{P}(b, K)} \mathbb{P}\{\|X\| > t\} = \mathbf{p}_t(b, K).$$

Способ вычисления характеристики (32) предлагается сравнить с двумя другими методами ее оценки из [14, 15].

Первый из них получен в предположении, что случайный вектор описывается смесью нормальных распределений со случайной ковариационной матрицей. С учетом обозначений [15] имеем

$$X = \sqrt{A}(\sqrt{S}Z - a),$$

где  $Z$  — стандартный нормальный вектор,  $S$  — не зависящая от него случайная матрица с симметричными положительно определенными значениями, такая что  $MS = \Sigma$ , а параметры  $A \succ O$  и  $a \in \mathbb{R}^n$  должны удовлетворять условиям  $MX = b$  и  $\text{cov}\{X, X\} = K$ . Нетрудно проверить, что  $-\sqrt{A}a = b$ ,  $\sqrt{A}\Sigma\sqrt{A} = K$ , откуда

$$\langle Aa, a \rangle = \|b\|^2, \quad \text{tr}[\Sigma A] = \text{tr} K, \quad \langle A\Sigma Aa, a \rangle = \langle Kb, b \rangle.$$

Тогда в силу [15, теорема 2] получаем

$$(33) \quad \mathbb{P}\{\|X\| > t\} \leq \mathbf{p}_t^{\text{mix}}(b, K) = \\ = \min \left\{ \frac{C_n}{t^2 - \|b\|^2} \left( \text{tr} K \frac{t}{t - \|b\|} - \frac{\langle Kb, b \rangle}{\|b\|^2 + t\|b\|} \right), 1 \right\},$$

где  $C_n$  — известный коэффициент (например,  $C_{10} \approx 0,50781$ ,  $C_{100} \approx 0,74381$  и  $C_{1000} \approx 0,89215$ ).

Второй способ оценки вероятности  $\mathbb{P}\{\|X\| > t\}$  получен в [14, теорема 2.2] так же, как в настоящей статье на основе знания только двух моментов вектора  $X$ , т.е. на классе  $\mathcal{P}(b, K)$ , но дает возможность указать верхнюю границу

$$(34) \quad \mathbb{P}\{\|X\| > t\} \leq \mathbf{p}_t^{\text{up}}(b, K) = \\ = \begin{cases} \text{tr} K / \left( \text{tr} K + (t - \|b\|)^2 \right), & \text{tr} K + \|b\|^2 \leq t\|b\|, & \text{(i')} \\ \left( \text{tr} K + \|b\|^2 \right) / t^2, & \text{tr} K + \|b\|^2 > t\|b\|, & \text{(ii')} \\ 1, & \text{tr} K + \|b\|^2 \geq t^2, & \text{(iii')} \end{cases}$$

которая в многомерном случае не является точной.

Для анализа чувствительности рассмотрим отдельно два случая, которые определяют, что будет варьироваться, смещение или ковариационная матрица.

Пусть в случае а) имеются три варианта значения нормы смещения  $r = \|b\|$ : 0) номинальное (т.е. нулевое)  $r = 0$ , 1) умеренное  $r = \sqrt{2n}$  и 2) большое смещение  $r = 2\sqrt{2n}$ . Сам вектор смещения  $b$  зададим в виде гармонического сигнала  $b_k = c \cos(\nu k + \nu_0)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , где частота  $\nu = 10\pi/n$  и сдвиг

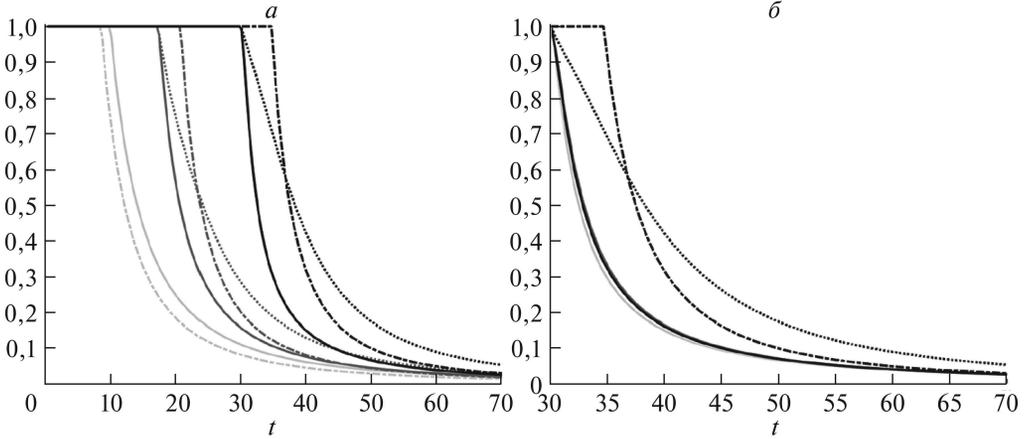


Рис. 4. Показатели чувствительности  $p_t(b, K)$  (сплошные),  $p_t^{\text{mix}}(b, K)$  (штрихпунктирные) и  $p_t^{\text{up}}(b, K)$  (пунктирные) для трех вариантов данных: 0) – светло-серые, 1) – темно-серые, 2) – черные: случай а) – слева; случай б) – справа.

$\nu_0 = -\pi/4$  фиксированы, а амплитуда  $c$  варьируется в зависимости от вариантов 0), 1), 2). При этом ковариационная матрица соответствует номинальному случаю:  $K = I_n$ .

В случае б) возьмем ковариационную матрицу  $K = \{K_{k,l}\}_{k,l=1,\dots,n}$ , составленную из значений автокорреляционной функции процесса авторегрессии первого порядка:  $K_{k,l} = a^{|k-l|}$ , где  $a$  – коэффициент авторегрессии. Рассмотрим три варианта его значений: 0) нулевая корреляция  $a = 0$ , что соответствует белому шуму, т.е. номинальному случаю  $K = I_n$ ; 1) слабая корреляция  $a = 0,5$ ; 2) сильная корреляция  $a = 0,9$ . Вектор  $b$  здесь предполагается таким же, как в случае а) при умеренной величине смещения.

Оба случая а) и б) рассматриваются для размерности  $n = 100$ .

Рисунок 4 описывает зависимость показателя (32) и двух его оценок (33), (34) от выбора параметра  $t$  (размера доверительного эллипсоида). Эти зависимости изображены сплошными, штрихпунктирными и пунктирными линиями соответственно. Светло-серые кривые определяют то, что будет для номинального варианта данных ( $b = 0$  или  $K = I_n$ ). Темно-серые кривые соответствуют умеренному смещению (график слева) или слабой корреляции (график справа). Черным цветом изображены кривые, которые построены для случая большого смещения (график слева) или сильной корреляции (график справа).

Левый график свидетельствует о сильной чувствительности надежности доверительного эллипсоида к величине смещения. Правый же график показывает обратную картину: наличие даже сильной корреляции мало влияет на гарантированное значение надежности.

Важно отметить, что при наличии даже умеренного смещения новая вероятностная граница  $p_t(b, K)$  существенно точнее, чем ее верхняя

граница  $p_t^{\text{up}}(b, K)$ . Только в случае нулевого смещения они совпадают:  $p_t(0, K) = p_t^{\text{up}}(0, K)$ . Граница  $p_t^{\text{mix}}(b, K)$ , которая построена для более узкого класса распределений, весьма чувствительна к увеличению смещения  $\|b\|$ , поэтому только при его малой величине, оказывается  $p_t(b, K) > p_t^{\text{mix}}(b, K)$ , а с ростом  $\|b\|$  неравенство меняется на обратное. В этом случае при малых  $t$  может оказаться, что  $p_t^{\text{mix}}(0, K) = 1$  в то время, как  $p_t(b, K) \ll 1$ . Отметим еще одну особенность границ (33) и (34): они не зависят (или почти не зависят) от корреляций. Поэтому на правом графике все три варианта данных как для (33), так и для (34) представлены одной кривой.

Таким образом, новая вероятностная граница  $1 - p_t(b, K)$  дает наиболее точную нижнюю оценку надежности доверительного эллипсоида.

## 5. Использование вероятностной границы в задаче проверки гипотез

Предположим, что случайный вектор  $X \in \mathbb{R}^n$  содержит экспериментальные данные, по которым необходимо принять решение об их соответствии одной из двух конкурирующих гипотез  $H_0$  или  $H_1$ . Особенностью рассматриваемой постановки является то, что в случае альтернативы распределение вектора  $X$  имеет заданные моментные характеристики, но в остальном является полностью неопределенным.

*Пример 2.* Рассмотрим пару конкурирующих гипотез

$$H_0^N: X \sim \mathcal{N}(0, \sigma_0^2 I) \quad \text{и} \quad H_1: X \sim \mathcal{P}(\mu, \sigma^2 I), \quad \mu \in \mathcal{S}_r,$$

где  $\mathcal{S}_r = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x\| = r\}$ ,  $r = h\sqrt{n}$ , а  $\sigma_0, \sigma, h$  — заданные положительные параметры. Тем самым согласно нулевой гипотезе  $H_0^N$  вектор  $X$  состоит из независимых центрированных гауссовских величин  $\{X_i, i = 1, \dots, n\}$  с дисперсией  $D_0 X_i = \sigma_0^2$ , в то время как альтернатива  $H_1$  описывается весьма общими предположениями: совместное распределение величин  $\{X_i\}$  является неопределенным с точностью до задания первых двух моментов, а именно, математические ожидания  $M_1 X_i = \mu_i$  имеют «средний сдвиг»  $h = \sqrt{(\mu_1^2 + \dots + \mu_n^2) / n}$  (это верно, например, при  $\mu_i = \pm h$ ), дисперсии одинаковы  $D_1 X_i = \sigma^2$ , ковариации нулевые, т.е.  $\text{cov}_1\{X_i, X_j\} = 0$  при  $i \neq j$  (условие независимости не накладывается).

Будем исходить из того, что  $\sigma_0 > \sigma$ . Поэтому статистический вывод в пользу альтернативы можно интерпретировать как свидетельство о том, что в данных присутствует сдвиг, который нельзя списать на наличие бóльшей дисперсии.

Для задания критического множества воспользуемся результатом применения критерия отношения правдоподобия к задаче проверки исходной гипотезы  $H_0^N$  против гауссовской альтернативы

$$H_1^N: X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2 I), \quad \mu \in \mathcal{S}_r.$$

Если  $f_0(x)$ ,  $f_1(x, \mu)$  — плотности распределений  $\mathcal{N}(0, \sigma_0^2 I)$  и  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2 I)$  соответственно, то статистика отношения правдоподобия

$$T(x) = \sup_{\mu \in \mathcal{S}_r} f_1(x, \mu) / f_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

позволяет задать критическое множество в виде

$$(35) \quad \mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R}^n : T(x) > \tau_\alpha\},$$

где число  $\tau_\alpha$  определяется из условия на заданный уровень ошибки первого рода  $P_0\{X \in \mathcal{K}\} = \alpha$ . Проверим, что критическое множество имеет форму шара.

Условие  $T(x) > \tau_\alpha$  равносильно тому, что для некоторой константы будет верно

$$(36) \quad \max_{\mu: \|\mu\|=r} \{-\|x - \mu\|^2 / \sigma^2 + \|x\|^2 / \sigma_0^2\} > \text{const.}$$

Указанный максимум равен  $(1/\sigma_0^2 - 1/\sigma^2)\|x\|^2 + 2r\|x\|/\sigma^2$  с точностью до аддитивной постоянной. Если обозначить  $a = 1 - \sigma^2/\sigma_0^2 > 0$ , то при подходящем выборе числа  $c$  неравенство (36) эквивалентно следующему:

$$(37) \quad a\|x\|^2 - 2r\|x\| - c < 0.$$

При неотрицательных  $c$  (и только при них) множество решений (37) имеет вид ограничения  $\|x\| < t$ , где  $t = \{r + \sqrt{r^2 + ac}\} / a$ . Следовательно, критическое множество (35) принимает форму шара  $\mathcal{K} = \mathcal{B}_t$ , если  $t \geq 2r/a$ , т.е.

$$(38) \quad t \geq 2\sqrt{n}h/a.$$

Тогда вероятность ошибки первого рода равна

$$\alpha_t^{\mathcal{N}} = P_0\{\|X\| < t\} = P_0\{\|X/\sigma_0\|^2 < (t/\sigma_0)^2\} = F_{\chi^2(n)}((t/\sigma_0)^2),$$

где  $F_{\chi^2(n)}(\cdot)$  — функция распределения хи-квадрат с  $n$  степенями свободы.

В случае гауссовской альтернативы  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2 I)$  ошибка второго рода определяется как

$$\beta_t^{\mathcal{N}} = \sup_{\mu \in \mathcal{S}_r} P_1\{\|X\| > t\}.$$

Используя представление  $X = \sigma U + \mu$ , где  $U \sim \mathcal{N}(0, I)$ , получаем

$$P_1\{\|X\| > t\} = P\{\|U + \mu/\sigma\|^2 > (t/\sigma)^2\},$$

откуда

$$\beta_t^{\mathcal{N}} = 1 - F_{\chi^2(n; (r/\sigma)^2)}((t/\sigma)^2),$$

где  $F_{\chi^2(n;\delta)}(\cdot)$  — функция нецентрального распределения хи-квадрат с  $n$  степенями свободы и параметром нецентральности  $\delta$ .

Выражение для ошибки второго рода относительно альтернативы  $H_1$  дается формулой (28):

$$\beta_t = \sup_{\mu \in \mathcal{S}_r} \sup_{X \sim \mathcal{P}(\mu, \sigma^2 I)} \mathbf{P}_1\{\|X\| > t\} = \mathbf{s}_t^{(n)}(r, \sigma).$$

Для сравнения приведем еще два варианта вычисления ошибки второго рода: с помощью неравенства Маркова

$$(39) \quad \beta_t^M = \sup_{\mu \in \mathcal{S}_r} \min\{\mathbf{M}_1\|X\|^2/t^2, 1\} = \min\{n(h^2 + \sigma^2)/t^2, 1\}$$

и с помощью границы (33)

$$(40) \quad \beta_t^{\text{mix}} = \sup_{\mu \in \mathcal{S}_r} \mathbf{p}_t^{\text{mix}}(\mu, \sigma^2 I_n),$$

предложенной в [15] для более узкого по сравнению с семейством  $\bigcup_{\mu \in \mathcal{S}_r} \mathcal{P}(\mu, \sigma^2 I_n)$  класса распределений.

Отметим, что при всех способах вычисления ошибки второго рода операция максимизации по  $\mu \in \mathcal{S}_r$  может быть опущена.

Чтобы отделить вероятности обеих ошибок от единицы, предположим, что  $\mathbf{M}_0\|X\|^2 > t^2$  и  $\mathbf{M}_1\|X\|^2 < t^2$ , т.е.  $r^2 + n\sigma^2 < t^2 < n\sigma_0^2$ , откуда

$$(41) \quad \sqrt{n(h^2 + \sigma^2)} < t < \sqrt{n}\sigma_0.$$

Тем самым ограничение

$$h^2 < \sigma_0^2 - \sigma^2$$

можно считать условием различимости пары конкурирующих гипотез, которое означает, что наличие неопределенного по направлению сдвига можно установить лишь при относительно небольшой его величине.

Теперь радиус  $t$  критической области  $\mathcal{K} = \mathcal{B}_t$  можно рассматривать в качестве независимой переменной из диапазона (41) с учетом (38). Построим параметрические кривые  $(\alpha_t^N, \beta_t)$  и  $(\alpha_t^N, \beta_t^N)$ , отражающие взаимную зависимость вероятностей ошибок первого и второго рода для двух альтернатив  $H_1$  и  $H_1^N$  (см. рис. 5). Для сравнения на тех же графиках изображены кривые  $(\alpha_t^N, \beta_t^M)$  и  $(\alpha_t^N, \beta_t^{\text{mix}})$ , в которых вероятность ошибки второго рода оценивается с помощью выражений (39) и (40). Рисунки построены при следующем соотношении между параметрами:  $\sigma/\sigma_0 = 0,3$ ,  $h/\sigma = 0,7$  (для случая  $n = 10$  и  $n = 100$ ).

Из представленных рисунков можно сделать вывод о том, что на различимость гипотез кардинально влияет наличие условия независимости. Например, относительно гауссовской альтернативы  $H_1^N$  ошибка второго рода  $\beta_t^N$

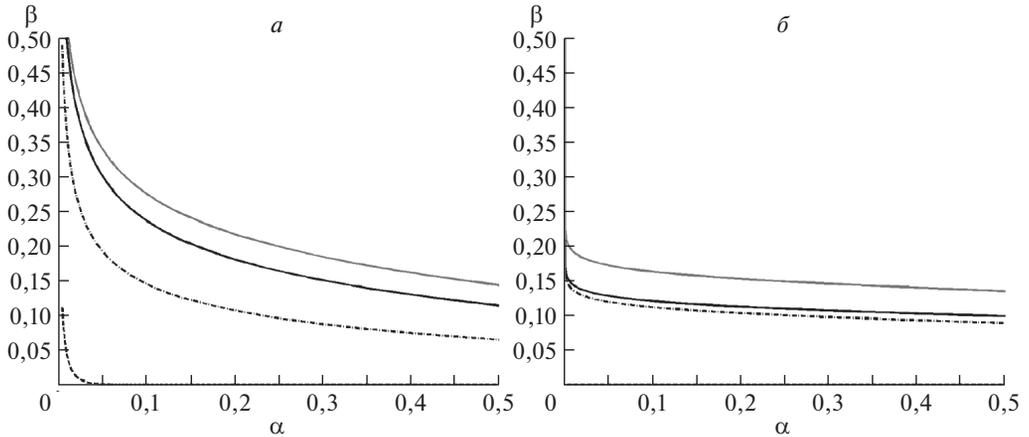


Рис. 5. Вероятности ошибок:  $(\alpha_t^N, \beta_t)$  (сплошная черная),  $(\alpha_t^N, \beta_t^N)$  (штриховая),  $(\alpha_t^N, \beta_t^M)$  (сплошная серая),  $(\alpha_t^N, \beta_t^{\text{mix}})$  (штрихпунктирная) для размерности  $n = 10$  (слева) и  $n = 100$  (справа).

быстро стремится к нулю при увеличении размерности  $n$ , которая здесь имеет смысл числа независимых наблюдений. Однако в случае общей альтернативы  $H_1$  увеличение  $n$  не ведет к статистической избыточности, поскольку минимально возможное значение ошибки второго рода  $\beta_t$  отделено от нуля:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_{t_n} \geq \frac{1}{(\sigma_0/\sigma)^2 - (h/\sigma)^2},$$

где  $t_n$  — любой критический уровень из диапазона (41).

Отметим, что такое положение дел остается в силе и для более узких классов распределений, например для смеси нормальных распределений со случайной ковариационной матрицей. Судя по рис. 5, на таком классе распределений известная граница ведет себя лишь немногим лучше, чем многомерная граница Селберга.

## 6. Заключение

В статье решена задача о точной верхней грани вероятности непопадания случайного вектора в шар при условии, что распределение — произвольное, моментные характеристики первого и второго порядков — заданные, а смещение математического ожидания относительно центра шара — ненулевое.

Если компоненты случайного вектора имеют одинаковую дисперсию и некоррелированы, то искомая чебышевская граница описывается аналитически и в одномерном случае совпадает с выражением, известным из неравенства Селберга. Для ковариационной матрицы общего вида решение поставленной задачи сводится к определению корня скалярного уравнения.

Если смещение достаточно мало, то вероятностная граница совпадает с известной верхней оценкой из неравенства Маркова, т.е. суммой вторых моментов, деленной на квадрат радиуса шара. Однако данная ситуация имеет место при весьма ограничительных условиях, что наиболее четко проявляется при сравнительно небольших дисперсиях. Поэтому более типичным оказывается случай, в котором искомая вероятностная граница определяется новым выражением, дающим существенно меньшее значение в сравнении с границей Маркова.

Полученные теоретические результаты подтверждены численными расчетами с использованием известного решения, основанного на технике линейных матричных неравенств. Для найденной вероятностной границы показано, что она может быть значительно точнее, чем известные ранее верхние оценки. Кроме того, приведены два примера ее использования: в задаче о гарантированной надежности доверительного эллипсоида и в задаче о проверке нормальной гипотезы против альтернативы с неопределенным распределением.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство леммы 1.* Заметим сначала, что  $q(x | M) \rightarrow \infty$  при  $\|x\| \rightarrow \infty$  в силу  $\Lambda \succ O$ . Поэтому в задаче (7) минимум достигается. Теперь сделаем замену переменных  $u = x + \mu$ :

$$\begin{aligned} q_t(M) &= \min_{u: \|u\| \geq t} \{ \lambda_0 + 2 \langle \lambda, u - \mu \rangle + \langle \Lambda (u - \mu), u - \mu \rangle \} = \\ &= q(-\mu | M) + \min_{u: \|u\| \geq t} \{ \langle \Lambda u, u \rangle + 2 \langle \nu, u \rangle \}, \end{aligned}$$

где  $\nu = \lambda - \Lambda \mu$ .

Если  $\{u_k\}$  и  $\{\nu_k\}$  — координаты векторов  $u$  и  $\nu$  в разложении по собственному ортонормированному базису матрицы  $\Lambda$ , а  $\{\ell_k\}$  — ее собственные значения, то

$$\langle \Lambda u, u \rangle + 2 \langle \nu, u \rangle = \sum_{k=1}^n (\ell_k u_k^2 + 2 \nu_k u_k) \geq \sum_{k=1}^n (\ell_k u_k^2 - 2 |\nu_k| |u_k|),$$

где нижняя оценка получается при  $\text{sign } u_k = -\text{sign } \nu_k$ .

Воспользуемся равенством Парсеваля  $\|u\|^2 = u_1^2 + \dots + u_n^2$  и сделаем замену переменных  $p = \text{col } [p_1, \dots, p_n]$ ,  $p_k = u_k^2$ . Тогда рассматриваемая задача минимизации превращается в задачу выпуклого программирования

$$\min_{u: \|u\| \geq t} \{ \langle \Lambda u, u \rangle + 2 \langle \nu, u \rangle \} = \min_{p \geq 0} \left\{ \sum_{k=1}^n (\ell_k p_k - 2 |\nu_k| \sqrt{p_k}) : \sum_{k=1}^n p_k \geq t^2 \right\},$$

к которой можно применить теорему Куна–Таккера о седловой точке:

$$\begin{aligned} \min_{u: \|u\| \geq t} \{ \langle \Lambda u, u \rangle + 2 \langle \nu, u \rangle \} = \\ = \max_{c \geq 0} \inf_{p \geq 0} \left\{ \sum_{k=1}^n (\ell_k p_k - 2 |\nu_k| \sqrt{p_k}) + c \left( t^2 - \sum_{k=1}^n p_k \right) \right\}. \end{aligned}$$

Точная нижняя грань равна сумме  $t^2 c$  и  $n$  слагаемых следующего вида:

$$\inf_{p_k \geq 0} \{ (\ell_k - c) p_k - 2 |\nu_k| \sqrt{p_k} \} = \begin{cases} -\nu_k^2 / (\ell_k - c), & c < \ell_k, \\ 0, & c = \ell_k, \nu_k = 0, \\ -\infty, & c = \ell_k, \nu_k \neq 0 \text{ или } c > \ell_k. \end{cases}$$

Достаточно рассматривать только  $c < \sigma_\Lambda = \min \ell_k$ , а если максимум приходится на  $c = \sigma_\Lambda$ , то это можно учесть с помощью взятия точной верхней грани

$$\min_{u: \|u\| \geq t} \{ \langle \Lambda u, u \rangle + 2 \langle \nu, u \rangle \} = \sup_{0 \leq c < \sigma_\Lambda} \left\{ t^2 c - \sum_{k=1}^n \nu_k^2 / (\ell_k - c) \right\}.$$

После перехода к матричным обозначениям получаем (12), что и требовалось.

*Доказательство леммы 2.* В силу непрерывности функции

$$G(S) = \text{tr} [SR] + \langle (S + \gamma I)^{-1} b, b \rangle$$

ее точная нижняя грань на множестве  $\{S: S \succ O\}$  будет такой же, как на замкнутом множестве  $\mathbb{R}_+^{n \times n}$ , на котором минимум достигается благодаря тому, что  $G(S) \rightarrow \infty$  при  $\text{tr} S \rightarrow \infty$ .

В силу гладкости необходимое условие минимума в точке  $\hat{S}$  имеет вид

$$\text{tr} [\nabla G(\hat{S})(S - \hat{S})] \geq 0 \quad \forall S \succcurlyeq O,$$

где  $\nabla G(S) = R - (S + \gamma I)^{-1} b b^* (S + \gamma I)^{-1}$  — градиент. Если  $H$  — любая симметричная матрица с нормой меньше минимального положительного собственного значения  $\hat{S}$ , а  $\hat{P}$  — ортопроектор на  $\text{im} [\hat{S}]$ , то  $S = \hat{S} + \hat{P} H \hat{P} \succcurlyeq O$ . Поэтому необходимое условие приводит к равенству  $\hat{P} \nabla G(\hat{S}) \hat{P} = O$ , т.е.

$$\hat{P} R \hat{P} = \hat{P} (S + \gamma I)^{-1} b b^* (S + \gamma I)^{-1} \hat{P}.$$

Но в правой части стоит матрица ранга не выше единицы, а слева ранг матрицы равен размерности  $\text{im} [\hat{S}]$  в силу  $\text{im} [R] = \mathbb{R}^n$ . Следовательно, искомая матрица  $\hat{S}$  будет иметь ранг один (т.е.  $\hat{S} = a a^*$ ,  $a \neq 0$ ) или будет нулевой.

Поэтому достаточно искать минимум функции

$$g(a) = G(a a^*) = \langle Ra, a \rangle + \langle (a a^* + \gamma I)^{-1} b, b \rangle, \quad a \in \mathbb{R}^n.$$

С помощью леммы об обращении матрицы

$$(aa^* + \gamma I)^{-1} = \gamma^{-1} \left( I - \frac{1}{\|a\|^2 + \gamma} aa^* \right)$$

получим

$$g(a) = \frac{\|b\|^2}{\gamma} + \langle Ra, a \rangle - \frac{\langle a, b \rangle^2}{\gamma(\|a\|^2 + \gamma)}$$

и

$$\frac{\nabla g(a)}{2} = Ra - \frac{\langle a, b \rangle b}{\gamma(\|a\|^2 + \gamma)} + \frac{\langle a, b \rangle^2 a}{\gamma(\|a\|^2 + \gamma)^2}.$$

Равенство градиента нулю дает систему уравнений

$$a = \sqrt{\xi/\gamma} (R + \xi I)^{-1} b, \quad \xi = \frac{\langle a, b \rangle^2}{\gamma(\|a\|^2 + \gamma)^2},$$

у которой есть тривиальное решение:  $a = 0$ ,  $\xi = 0$ . Но если  $a \neq 0$ , то  $\xi > 0$  и второе уравнение оказывается замкнутым относительно этой переменной:

$$\langle (R + \xi I)^{-1} b, b \rangle = \xi \langle (R + \xi I)^{-2} b, b \rangle + \gamma^2,$$

что равносильно уравнению (15).

Левую часть (15) можно представить через собственные значения  $\{r_k\}$  матрицы  $R$  и координаты  $\{b_k\}$  вектора  $b$  в собственном ортонормальном базисе:

$$\sum_{k=1}^n \frac{r_k b_k^2}{(r_k + \xi)^2}.$$

Следовательно, левая часть уравнения (15) является непрерывной убывающей функцией, причем ее предельные значения при  $\xi \downarrow 0$  и  $\xi \uparrow \infty$  равны соответственно  $\langle R^{-1} b, b \rangle$  и нулю. Поэтому в случае, когда правая часть уравнения (15) находится между этими значениями, решение  $\xi > 0$  существует и определено единственным способом.

Таким образом, если  $\gamma^2 < \langle R^{-1} b, b \rangle$ , то функция  $g(a)$  имеет две критические точки: нулевую и найденную выше  $a \neq 0$ , причем

$$g(0) = \|b\|^2/\gamma > g(a) = \langle (I - \xi^2(R + \xi I)^{-2}) b, b \rangle / \gamma.$$

Если же  $\langle R^{-1} b, b \rangle \geq \gamma^2$ , то уравнение (15) не имеет положительных решений, поэтому ноль — единственная критическая точка.

Итак, в обоих случаях получаем, что искомая нижняя грань определяется выражением (14), что и требовалось доказать.

*Доказательство леммы 3.* Сделаем в (23) замену  $k = d_\xi/(1 + d_\xi)$ , которая является взаимно однозначной в силу того, что  $d_\xi$  убывает по  $\xi > 0$ . Поэтому ограничение  $k \in (0, d_0/(d_0 + 1))$  равносильно условию  $\xi \in (0, \infty)$ .

С учетом (17) и (18) неравенство (23) преобразуется к виду

$$\operatorname{tr} R + \frac{d_\xi}{d_\xi + 1} (\|\mu\|^2 - t^2) + \frac{\|\mu\|^2 - \xi^2 \langle (R + \xi I)^{-2} \mu, \mu \rangle}{d_\xi + 1} \geq 0$$

или, что то же самое,

$$(d_\xi + 1)(\operatorname{tr} R + \|\mu\|^2) - d_\xi t^2 - \xi^2 \langle (R + \xi I)^{-2} \mu, \mu \rangle \geq 0.$$

С использованием обозначений (24) и  $\eta = t^2 - (\operatorname{tr} R + \|\mu\|^2)$  получим равносильное неравенство

$$\operatorname{tr} R + \|\mu\|^2 \geq \langle (\eta R + \xi^2 I)(R + \xi I)^{-2} \mu, \mu \rangle,$$

которое принимает вид  $G(\xi) \leq p/(1 - p)$ , где  $G(\xi)$  — левая часть уравнения (25).

Предел  $G(\xi)$  при  $\xi \uparrow \infty$  равен  $\|\mu\|^2/\eta$ , что меньше  $p/(1 - p)$ . Предел  $G(\xi)$  при  $\xi \downarrow 0$  равен  $d_0$ , что больше  $p/(1 - p)$  тогда и только тогда, когда ограничения (22) несовместны.

Рассмотрим этот случай. Тогда  $G(0) > p/(1 - p) > G(\infty)$ , что в силу гладкости  $G(\xi)$  позволяет утверждать, что уравнение (25) имеет решение на интервале  $(0, \infty)$ .

Проверим, что оно будет единственным. Для этого вычислим производную:

$$\begin{aligned} G'(\xi) &= \left\langle \left\{ 2\xi\eta^{-1}(R + \xi I)^{-2} - 2(R + \xi^2\eta^{-1}I)(R + \xi I)^{-3} \right\} \mu, \mu \right\rangle = \\ &= 2(\xi\eta^{-1} - 1) \langle (R + \xi I)^{-3} R \mu, \mu \rangle, \end{aligned}$$

с помощью которой получаем, что левее точки  $\eta$  функция  $G(\xi)$  убывает, а правее возрастает. Следовательно,  $G(\eta) < G(\infty) < p/(1 - p)$ , что с учетом  $G(0) > p/(1 - p)$  позволяет утверждать, что точка  $\hat{\xi}$ , дающая решение уравнения  $G(\xi) = p/(1 - p)$ , принадлежит интервалу  $(0, \eta)$  и является единственной.

Отсюда следует  $\{\xi > 0: G(\xi) \leq p/(1 - p)\} = [\hat{\xi}, \infty)$ . Тогда множество решений неравенства (23) имеет вид  $(0, \hat{k}]$ , где  $\hat{k} = d_{\hat{\xi}}/(d_{\hat{\xi}} + 1)$  в силу обратной монотонности замены переменной.

Остается рассмотреть случай, когда ограничения (22) совместны. В этом случае  $G(0) \leq p/(1 - p)$ , откуда  $G(\xi) \leq p/(1 - p)$  для всех  $\xi > 0$ , что равносильно тому, что неравенство (23) выполнено при любых  $k \in (0, d_0/(d_0 + 1))$ .

Лемма доказана.

*Доказательство следствия.* Заметим сначала

$$p = (n\sigma^2 + r^2)/t^2, \quad d_0 = r^2/\sigma^2, \quad d_\xi = \sigma^2 r^2 / (\sigma^2 + \xi)^2.$$

Достаточно разобрать только случай (i). Согласно (26) он реализуется при  $p(\sigma^2 + r^2) < r^2$ . При этом условии запишем уравнение (25)

$$r^2 (\sigma^2 + \xi^2/\eta) (\sigma^2 + \xi)^{-2} = p/(1-p), \quad 0 < \xi < \eta = t^2(1-p).$$

Перепишем его в виде  $r^2((1-p)\sigma^2 + \xi^2/t^2) = p(\sigma^2 + \xi)^2$  и преобразуем к квадратному уравнению

$$(n/t^2) \xi^2 + 2p\xi + p\sigma^2 - (1-p)r^2 = 0.$$

Его свободный коэффициент отрицателен по условию. Следовательно, оба корня вещественные и разного знака. Тогда

$$\xi = t^2(-p + \sqrt{D/4})/n$$

— искомый положительный корень, где

$$\begin{aligned} D/4 &= p^2 - (n/t^2) (p\sigma^2 - (1-p)r^2) = \\ &= p^2 - (p - r^2/t^2) p + (1-p) nr^2/t^2 = (p + (1-p)n) r^2/t^2, \end{aligned}$$

откуда получаем

$$\sigma^2 + \xi = \left\{ -r^2 + rt\sqrt{p + (1-p)n} \right\} / n.$$

Теперь остается подставить это выражение в (26), (i):

$$\begin{aligned} p_t(\mu, \sigma^2 I_n) &= \frac{1}{1 + 1/d_\xi} = \frac{1}{1 + (\sigma^2 + \xi)^2/(\sigma^2 r^2)} = \\ &= \frac{1}{1 + \left\{ -r + t\sqrt{p + (1-p)n} \right\}^2 / (\sigma^2 n^2)}. \end{aligned}$$

Полученное выражение совпадает с (28), (i), что и требовалось доказать.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lin F., Fang X., Gao Z.* Distributionally robust optimization: A review on theory and applications // Numerical Algebra, Control & Optimization. 2022. V. 12. No. 1. P. 159–212.
2. *Карлин С., Стадден В.* Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. М.: Наука, 1976.
3. *Крейн М.Г., Нудельман А.А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973.
4. *Marshall A.W., Olkin I.* Multivariate Chebyshev inequalities // Ann. Math. Stat. 1960. V. 31. No. 4. P. 1001–1014.

5. *El Ghaoui L., Oks M., Oustry F.* Worst-case value-at-risk and robust portfolio optimization: A conic programming approach // *Operations Research*. 2003. V. 51. No. 4. P. 543–556.
6. *Popescu I.* Robust mean-covariance solutions for stochastic optimization and applications // *Operations Research*. 2007. V. 55. No. 1. P. 98–112.
7. *Панков А.Р., Семенikhин К.В.* О минимаксном оценивании по вероятностному критерию // *АиТ*. 2007. № 3. С. 66–82.  
*Pankov A.R., Semenikhin K.V.* Minimax Estimation by Probabilistic Criterion // *Autom. Remote Control*. 2007. V. 68. No. 3. P. 430–445.
8. *Семенikhин К.В.* Минимаксность линейных оценок неопределенно-стохастического вектора по обобщенным вероятностным критериям // *АиТ*. 2007. № 11. С. 88–104.  
*Semenikhin K.V.* Minimax Nature of the Linear Estimates of the Indefinite Stochastic Vector from the Generalized Probabilistic Criteria // *Autom. Remote Control*. 2007. V. 68. No. 11. P. 1970–1985.
9. *Delage E., Ye Y.* Distributionally robust optimization under moment uncertainty with application to data-driven problems // *Operations Research*. 2010. V. 58. P. 595–612.
10. *Zymler S., Kuhn D., Rustem B.* Distributionally robust joint chance constraints with second-order moment information // *Math. Program.* 2013. V. 137. P. 167–198.
11. *Kitahara T., Mizuno S., Nakata K.* Quadratic and convex minimax classification problems // *J. Operations Research Society Of Japan*. 2008. V. 51. No. 2. P. 191–201.
12. *Stellato B., Van Parys B.P.G., Goulart P.J.* Multivariate Chebyshev inequality with estimated mean and variance // *American Statistician*. 2017. V. 71. No. 2. P. 123–127.
13. *Vandenbergh L., Boyd S., Comanor K.* Generalized Chebyshev bounds via semidefinite programming // *SIAM Review*. 2007. V. 49. No. 1. P. 52–64.
14. *Csiszar V., Fegyverneki T., Mori T.F.* Explicit multivariate bounds of Chebyshev type // *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.* 2014. V. 42. P. 109–125.
15. *Csiszar V., Mori T.F.* A Bienaymé–Chebyshev inequality for scale mixtures of the multivariate normal distribution // *Math. Inequalities & Applications*. 2009. V. 12. No. 4. P. 839–844.
16. *Bertsimas D., Popescu I.* Optimal inequalities in probability theory: A convex optimization approach // *SIAM J. Optimization*. 2005. V. 15. No. 3. P. 780–804.
17. *Van Parys B.P.G., Goulart P.J., Kuhn D.* Generalized Gauss Inequalities via Semidefinite Programming // *Math. Program.* 2016. V. 156. P. 271–302.
18. *Barmish B.R., Lagoa C.M.* The Uniform Distribution: A Rigorous Justification for Its Use in Robustness Analysis // *Math. Control Signal. Syst.* 1997. V. 10. P. 203–222.
19. *Кибзун А.И.* О наилучшем распределении в задачах стохастической оптимизации с функцией вероятности // *АиТ*. 1998. № 11. С. 104–116.  
*Kibzun A.I.* On the Worst-Case Distribution in Stochastic Optimization Problems with Probability Function // *Autom. Remote Control*. 1998. V. 59. No. 11. P. 1587–1597.

20. *Кан Ю.С.* Об обосновании принципа равномерности в задаче оптимизации вероятностного показателя качества // *АиТ.* 2000. № 1. С. 54–70.  
*Kan Yu.S.* On the Justification of the Uniformity Principle in the Optimization of a Probability Performance Index // *Autom. Remote Control.* 2000. V. 61. No. 1. P. 50–64.
21. *Sturm J.F.* Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones // *Optimization Methods & Software.* 1999. V. 11. No. 12. P. 625–653.
22. *Grant M.C., Boyd S.P.* The CVX Users' Guide. Release 2.1. CVX Research, Inc. 2018. [Online]. Available: <http://cvxr.com/cvx>.
23. *Платонов Е.Н., Семенikhин К.В.* Методы синтеза минимаксных оценок при наличии поэлементных ограничений на ковариационную матрицу // *АиТ.* 2016. № 5. С. 82–108.  
*Platonov E.N., Semenikhin K.V.* Methods for Minimax Estimation under Element-wise Covariance Uncertainty // *Autom. Remote Control.* 2016. V. 77. No. 5. P. 817–838.
24. *Алберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1977.
25. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.*

Поступила в редакцию 03.02.2022

После доработки 17.03.2022

Принята к публикации 28.04.2022