

© 2022 г. Л.Б. РАПОПОРТ, д-р физ.-мат. наук
(LBRapoport@gmail.com),

А.А. ГЕНЕРАЛОВ, канд. техн. наук (generalov.alexey@gmail.com)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

УПРАВЛЕНИЕ ПЕРЕВЕРНУТЫМ МАЯТНИКОМ НА КОЛЕСЕ

Рассматривается механическая система, состоящая из колеса и маятника, подвешенного на его оси. Колесо катится по горизонтальной поверхности. Рассматривается задача одновременной стабилизации вертикального положения маятника и заданного положения колеса. Известная трудность, связанная с этой задачей, состоит в том, что использование одного управления служит для достижения двух целей — стабилизации угла отклонения маятника и угла поворота колеса. Применение метода линеаризации обратной связью по выходу, в качестве которого выбран угол отклонения маятника, приводит к появлению неустойчивой нулевой динамики в замкнутой системе.

Показано, что если в качестве выхода системы взять сумму угла отклонения маятника и угла поворота колеса, то нулевая динамика замкнутой системы оказывается устойчивой, хотя и не асимптотически. Предложен метод асимптотической стабилизации положения равновесия замкнутой системы и построена оценка области притяжения. Построение оценки сводится к задаче о разрешимости линейных матричных неравенств.

Ключевые слова: асимптотическая стабилизация, перевернутый маятник, оценка области притяжения, линейные матричные неравенства.

DOI: 10.31857/S0005231022080013, **EDN:** AFZSSB

1. Введение

Рассматривается механическая система, состоящая из колеса и маятника, подвешенного на его оси. Колесо катится по плоской поверхности, пересечение которой с вертикальной плоскостью рис. 1 образует ось ξ .

Эта система, также как и родственная ей система, состоящая из тележки с перевернутым маятником, исследуется во многих работах по теории управления, см., например, [1–14], и привлекает интерес как классическая нелинейная, неустойчивая и неминимально фазовая система. Синтез управления, стабилизирующего вертикальное положение маятника в линеаризованной системе, рассмотрен в работах [1, 2]. Легко решается задача синтеза нелинейного контроллера, стабилизирующего положение маятника с помощью метода

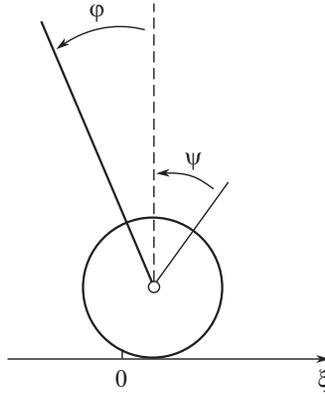


Рис. 1. Схема маятника на колесе.

линеаризации обратной связью [3] по выходу, в качестве которого выбран угол отклонения маятника. Однако это не решает полную задачу стабилизации по состоянию, поскольку нулевая динамика остается неустойчивой и положение центра колеса не стабилизируется. В [4] описан подход к построению так называемых виртуальных выходов, стабилизация по которым гарантирует также и стабилизацию по состоянию. Применение этого подхода в общем виде сложно. В [4] описывается метод построения виртуального выхода и метод асимптотической стабилизации состояния равновесия линеаризованной системы для случая перевернутого маятника на тележке.

Решение задачи в нелинейной постановке основано на использовании различных методов нелинейной теории управления. В книге [5] дается решение этой задачи с помощью разрывных управлений. За конечное время система приводится к движению, ограниченному целевым многообразием. Развитие метода скользящих режимов в применении к этой задаче для различных сценариев и различных постановок описано в большом количестве работ, см., например, [6]. Обзор методов управления механическими системами, построенными на основе перевернутого маятника, можно найти в книге [7].

В [8] рассматривается задача об одновременной стабилизации положения тележки и вертикального положения закрепленного на ней маятника. Предлагается новый закон управления, основанный на введении системы сравнения второго порядка, траектория которой принимается за целевую траекторию тележки с маятником. Проведен анализ линеаризованной замкнутой системы, определен диапазон значений параметров закона управления, гарантирующего локальную стабилизируемость системы, и предложен конструктивный метод их выбора.

Обычно задача синтеза стабилизирующего контроллера решается неоднозначно и допускает определенную свободу выбора параметров, которой можно распорядиться оптимальным образом. Постановка и решение такой задачи в применении к стабилизации маятника на колесе рассматриваются в [9].

В [10] используется теория малых коэффициентов усиления. Работа [11] дает решение, основанное на синтезе оптимального по быстродействию управления. В [12] решается задача глобальной стабилизации и предлагается комбинированный закон управления, в котором при больших начальных отклонениях применяется управление маятником, гарантирующее попадание в область локальной стабилизируемости. Большое значение имеет построение оценки такой области. Очевидно, что оценка, зависящая от построенного закона управления и выбранной функции Ляпунова, может быть консервативной. Актуальна задача построения такой оценки максимального размера в классе, определенном параметрами функции Ляпунова.

Этой задаче посвящена настоящая работа. В работе показано, что если в качестве выхода взять сумму угла отклонения маятника и приведенного угла поворота колеса (определение дано ниже) и синтезировать управление, стабилизирующее по этому выходу, то замкнутая система окажется устойчивой, хотя и не асимптотически. Стабилизация нулевого состояния получается добавлением к управлению слагаемого, пропорционального разнице угловых скоростей колеса и маятника и имеющего смысл момента вязкого трения в оси колеса. Получена оценка области притяжения состояния равновесия с помощью специально построенной функции Ляпунова, состоящей из квадратичной части и нелинейного слагаемого. Параметры функции Ляпунова находятся решением последовательности задач о совместности линейных матричных неравенств (ЛМН). Обсуждается метод асимптотической стабилизации положения равновесия замкнутой системы, сводящийся к приведению состояния системы в область притяжения. Статью завершает пример.

2. Модель системы

Перейдем к описанию математической модели системы. Начало оси ξ на рис. 1 обозначено через 0. Переменная ξ используется для обозначения положения центра колеса. Необходимо стабилизировать верхнее положение равновесия маятника и одновременно нулевое значение переменной ξ . Обозначим через φ угловое отклонение маятника от вертикальной оси, ортогональной оси ξ . Через ψ обозначим угол между вертикалью и некоторым выделенным радиусом колеса, причем нулевому значению ψ отвечает нулевое значение ξ . Положительное значение углов отсчитывается против часовой стрелки. Таким образом, на рисунке угол φ положителен, а угол ψ отрицателен, что соответствует положительному значению ξ . Пусть m — это масса, сосредоточенная на конце маятника длины l , M — масса колеса, J — момент инерции колеса и r — его радиус. Пусть

$$M_1 = \frac{J}{r^2}.$$

Обозначим

$$(2.1) \quad \beta = \frac{M + M_1}{m}.$$

Далее, для угловой переменной ψ и линейного отклонения ξ имеем связывающее их выражение

$$\psi = -\frac{\xi}{r}.$$

Наряду с угловой переменной ψ определим

$$(2.2) \quad \theta = -\frac{\xi}{l} = \psi \frac{r}{l}$$

и назовем приведенным углом поворота колеса. Пусть U — это момент силы, развиваемый приводом и приложенный между маятником и колесом. Положительному значению U отвечает усилие, отклоняющее маятник против часовой стрелки, увеличивающее значение φ и уменьшающее ψ . Переменная ψ не влияет на моменты инерции и на потенциальную энергию и, как будет видно дальше, является циклической. При условии плоского движения колеса без проскальзывания выражения для кинетической и потенциальной энергии системы принимают вид

$$(2.3) \quad T = \frac{1}{2}M\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}m \left(r\dot{\psi} + l\dot{\varphi} \cos \varphi \right)^2 + \frac{1}{2}m (l\dot{\varphi} \sin \varphi)^2$$

и

$$(2.4) \quad \Pi = mgl \cos \varphi$$

соответственно, g — ускорение свободного падения. Точка над переменной означает взятие полной производной по времени. Раскрывая скобки в выражении (2.3), получим

$$T = \frac{1}{2}(M + M_1 + m)r^2\dot{\psi}^2 + mrl\dot{\psi}\dot{\varphi} \cos \varphi + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2$$

или, с учетом обозначений (2.1) и (2.2),

$$(2.5) \quad T = \frac{1}{2}ml^2 \left[(\beta + 1)\dot{\theta}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \varphi + \dot{\varphi}^2 \right].$$

Наряду с t введем новую независимую переменную $\tau = t\sqrt{g/l}$. Всюду далее штрих ' обозначает производную по переменной τ . Для кинетической энергии имеем

$$(2.6) \quad T = \frac{1}{2}mgl \left[(\beta + 1)\theta'^2 + 2\theta'\varphi' \cos \varphi + \varphi'^2 \right].$$

Для функции Лагранжа получаем следующее выражение:

$$(2.7) \quad L = mgl \left[\frac{1}{2}(\beta + 1)\theta'^2 + \theta'\varphi' \cos \varphi + \frac{1}{2}\varphi'^2 - \cos \varphi \right].$$

Управляющий момент U приложен между маятником и колесом. С учетом знака U уравнения Лагранжа второго рода принимают вид

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \varphi'} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= U, \\ \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \theta'} - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -U. \end{aligned}$$

Используя в (2.8) выражение (2.7) и поделив левую и правую части уравнений на величину mgL , получим

$$(2.9) \quad \begin{bmatrix} 1 & \cos \varphi \\ \cos \varphi & 1 + \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi'' \\ \theta'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \varphi + u \\ \varphi'^2 \sin \varphi - u \end{bmatrix},$$

где u — это новая безразмерная переменная управления, $u = \frac{U}{mgL}$. Последнее уравнение разрешается относительно вторых производных угловых переменных, поскольку детерминант матрицы системы отличен от нуля

$$(2.10) \quad d = 1 + \beta - \cos^2 \varphi = \beta + \sin^2 \varphi > 0.$$

Из (2.9) получаем

$$(2.11) \quad \begin{bmatrix} \varphi'' \\ \theta'' \end{bmatrix} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} 1 + \beta & -\cos \varphi \\ -\cos \varphi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \varphi + u \\ \varphi'^2 \sin \varphi - u \end{bmatrix}.$$

Обозначив угловые скорости $\omega = \varphi'$, $\delta = \theta'$ и $x = (\varphi, \omega, \theta, \delta)^\top$, перепишем уравнения движения в виде

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \varphi' &= \omega, \\ \omega' &= f_1(x) + h_1(x)u, \\ \theta' &= \delta, \\ \delta' &= f_2(x) + h_2(x)u, \end{aligned}$$

где

$$(2.13) \quad \begin{aligned} f_1(x) &= \frac{\sin \varphi}{d} [-\omega^2 \cos \varphi + (1 + \beta)], \\ f_2(x) &= \frac{\sin \varphi}{d} (\omega^2 - \cos \varphi), \\ h_1(x) &= \frac{1}{d} (\cos \varphi + 1 + \beta), \\ h_2(x) &= \frac{1}{d} (-\cos \varphi - 1). \end{aligned}$$

Обозначив $f = (\omega, f_1, \delta, f_2)^\top$ (символ зависимости от x для простоты опущен) и $h = (0, h_1, 0, h_2)^\top$, перепишем систему (2.12) в виде

$$(2.14) \quad x' = f + hu.$$

Введем в рассмотрение безразмерную кинетическую энергию и полную энергию системы.

$$(2.15) \quad \tilde{T} = \frac{T}{mgl} = \frac{1}{2} [(\beta + 1)\theta'^2 + 2\theta'\varphi' \cos \varphi + \varphi'^2],$$

$$\tilde{E} = \tilde{T} + \frac{\Pi}{mgl} = \tilde{T} + \cos \varphi.$$

Теперь потребуются выражения для производной безразмерной полной и кинетической энергии системы. Для выполнения формальных алгебраических операций здесь и далее удобно воспользоваться каким-нибудь пакетом компьютерной алгебры, например [15]. Получим следующее

Утверждение 1. Справедливы следующие выражения для производных

$$(2.16) \quad \tilde{E}' = u(\omega - \delta),$$

$$(2.17) \quad \tilde{T}' = u(\omega - \delta) + \omega \sin \varphi.$$

3. Синтез управления, стабилизирующего нулевое состояние равновесия системы (2.12)

Управление системой (2.12) разобьем на два этапа.

1. Сначала система (2.12) приводится из произвольного начального состояния в некоторую окрестность нулевого положения равновесия.
2. Внутри указанной окрестности происходит переключение на другой закон управления, для которого эта окрестность является инвариантной областью притяжения.

Основная цель данной работы состоит в синтезе закона управления второго этапа. В настоящем разделе описан метод синтеза закона управления, стабилизирующего нулевое состояние системы (2.12). В следующем разделе 4 будет построена область притяжения, соответствующая этому закону управления. В разделе 5 будет описан один из методов приведения состояния системы в область притяжения, используемую на первом этапе. Этот метод будет описан без строгого доказательства, поскольку не является предметом настоящей работы, а приведен для полноты изложения.

Сделаем предположение относительно области изменения угла φ .

Предположение 1. Предположим, что на траекториях управляемой системы (2.12) выполняются условия

$$(3.1) \quad |\varphi| \leq \varphi_0 < \pi, \quad |\omega| \leq \omega_0,$$

где φ_0, ω_0 — это некоторые положительные константы. В силу этого предположения траектория системы не выходит за пределы слоя, внутри которого $\sin \varphi = 0$ только при $\varphi = 0$. При этом система имеет единственное положение равновесия $x = 0$. Далее это предположение будет снято.

Воспользуемся методом линеаризации обратной связью, см. [3, гл. 13]. Выберем в качестве выхода системы

$$(3.2) \quad y = \varphi + \theta$$

и синтезируем управление системой (2.12), гарантирующее асимптотическую устойчивость по этому выходу. Для этого продифференцируем y :

$$(3.3) \quad y' = \omega + \delta.$$

Убеждаемся, что y' не зависит от управления u , и берем вторую производную в силу системы (2.12):

$$(3.4) \quad y'' = f_1(x) + f_2(x) + (h_1(x) + h_2(x))u \doteq F + Hu,$$

где

$$(3.5) \quad F = \frac{\sin \varphi}{d} [(1 - \cos \varphi)(\omega^2 + 1) + \beta], \quad H = \frac{\beta}{d}.$$

Вторая производная зависит от управления. Для того чтобы обеспечить экспоненциальную устойчивость по выходу y с заранее заданной скоростью убывания, выберем положительное число λ (показатель экспоненциального убывания) и построим линейное дифференциальное уравнение, которому подчиним динамику изменения y :

$$(3.6) \quad y'' + 2\lambda y' + \lambda^2 y = 0.$$

Ограничения на допустимые значения λ будут даны далее. Подставив (3.3) и (3.4) в (3.6) и разрешив его относительно u , получим выражение для закона управления

$$(3.7) \quad u^*(x) = -\frac{\lambda^2 y + 2\lambda y' + F}{H} = \\ = -\frac{d\lambda^2(\varphi + \theta) + 2d\lambda(\omega + \delta) + \sin \varphi [(1 - \cos \varphi)(\omega^2 + 1) + \beta]}{\beta}.$$

Очевидно, что стабилизация по выходу y не решает задачу стабилизации по состоянию системы. Рисунок 2 иллюстрирует асимптотическую устойчивость замкнутой системы (2.12) по выходу y и его производной y' , в то время как движение фазовых переменных системы имеет колебательный характер, см. рис. 3. Причина такого поведения обсуждается ниже. Изменение энергии системы под действием управления (3.7) также имеет колебательный характер. Поставим цель синтезировать управление, обеспечивающее не только стабилизацию по выходу (3.7), но и “выкачивание” кинетической энергии из системы. Предположим, что это удалось. В соответствии с выражением (2.15) асимптотическое убывание величины \tilde{T} равносильно убыванию угловых скоростей ω и δ .

Имеет место следующее утверждение.

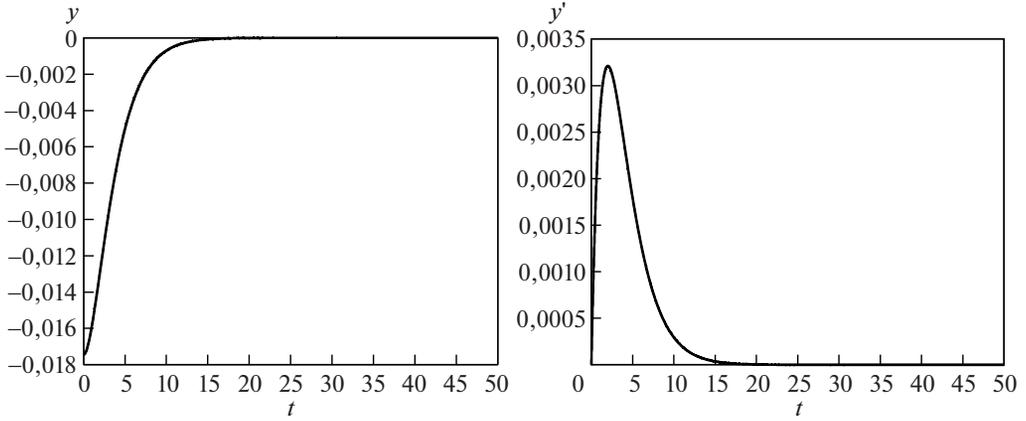


Рис. 2. График выхода $y(t)$ (слева) и его производной $y'(t)$ (справа) системы (2.12), замкнутой управлением (3.7), при начальных условиях $\varphi = -5^\circ, \theta = 4^\circ$ и $\omega = \delta = 0$. Величина β равна 3.

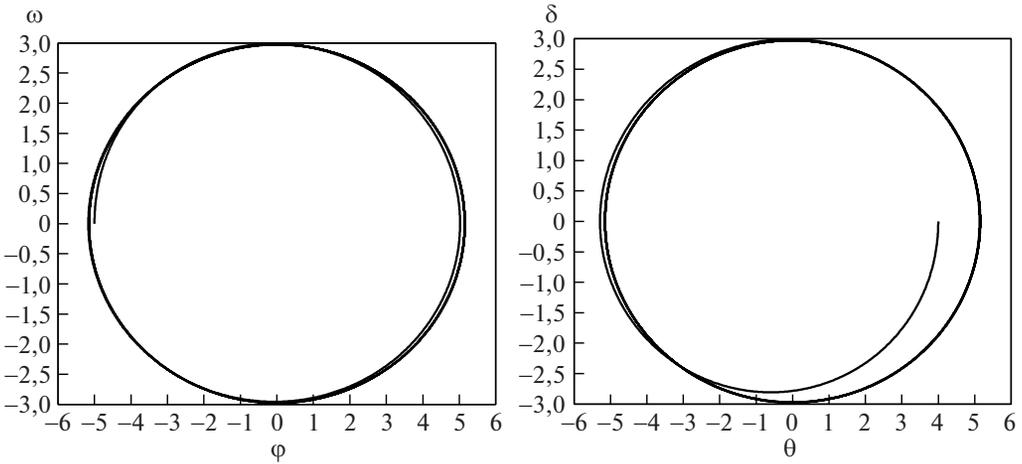


Рис. 3. Фазовый портрет системы (2.12), замкнутой управлением (3.7) в переменных φ, ω (слева) и θ, δ (справа). Начальные условия те же, что указаны на рис. 2.

Лемма 1. Предположим, что на траекториях управляемой системы (2.12), замкнутой законом управления $u(x)$, обеспечивающим асимптотическую устойчивость по выходу (3.2), выполняется соотношение

$$(3.8) \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \omega(\tau) = 0.$$

Пусть закон управления $u(x)$ непрерывно зависит от своих аргументов. Тогда выполняются также и соотношения

$$(3.9) \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \varphi(\tau) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \theta(\tau) = 0.$$

Доказательство вынесено в Приложение. Заметим, что в формулировке леммы 1 не предполагается, что управление $u(x)$ имеет вид (3.7).

Система (2.12), замкнутая управлением (3.7), принимает вид

$$(3.10) \quad x' = f(x) + h(x)u^*(x).$$

Очевидно, что $u^*(0) = 0$ и нулевое решение дифференциального уравнения (3.10) является состоянием равновесия. Система (3.10), линеаризованная в окрестности нуля, имеет вид

$$(3.11) \quad x' = \Phi x, \quad \Phi = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=0} + h(0) \left. \frac{\partial u^*(x)}{\partial x} \right|_{x=0}^T.$$

Имеем

$$(3.12) \quad \Phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{(\beta+2)\lambda^2+1}{\beta} & -2\lambda\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right) & -\lambda^2\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right) & -2\lambda\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{2\lambda^2+1}{\beta} & 4\frac{\lambda}{\beta} & 2\frac{\lambda^2}{\beta} & 4\frac{\lambda}{\beta} \end{bmatrix}.$$

Сделаем линейную замену переменных $\zeta = Sx$, где

$$(3.13) \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Другими словами,

$$\zeta_1 = \varphi, \quad \zeta_2 = \omega, \quad \zeta_3 = y, \quad \zeta_4 = y'.$$

В новых переменных матрица (3.12) принимает вид

$$(3.14) \quad \Phi_\zeta = S\Phi S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\beta} & 0 & -\lambda^2\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right) & -2\lambda\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2 & -2\lambda \end{bmatrix}.$$

Характеристические полиномы матриц Φ и Φ_ζ совпадают. Непосредственно из блочно-треугольного вида матрицы (3.14) следует, что ее спектр составлен из спектров двух диагональных блоков размера 2×2 . Таким образом, собственные числа матрицы (3.14) равны

$$(3.15) \quad \left\{ -\frac{i}{\sqrt{\beta}}, \frac{i}{\sqrt{\beta}}, -\lambda, -\lambda \right\},$$

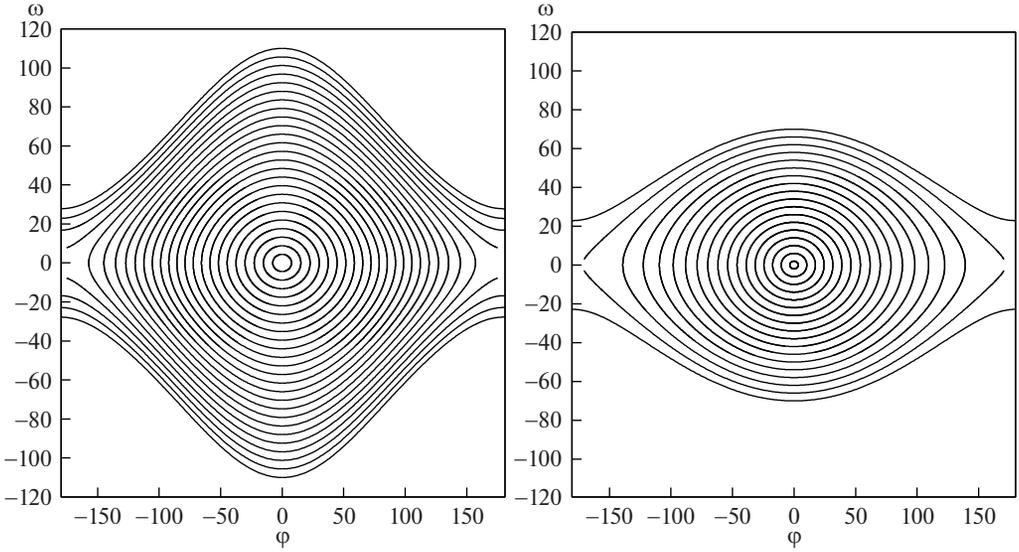


Рис. 4. Фазовый портрет системы (3.17) (слева) и системы $\varphi' = \omega$, $\omega' = -\sin \varphi \left(\frac{1}{\beta}\right)$ (справа). Изображена часть фазового портрета, состоящая из замкнутых траекторий, окружающих точку $(0, 0)$.

где i — это мнимая единица. Матрица Φ_ζ (так же как и Φ) имеет пару чисто мнимых корней и кратный отрицательный корень.

Управление (3.7) стабилизирует систему (2.12) по выходу y , обеспечивая $y(t) \rightarrow 0$ и $y(t)' \rightarrow 0$. Выясним, какой вид принимают первые два уравнения этой системы в пределе, при выполнении предельного соотношения $y = y' = 0$. Подставим в (3.10) выражение для управления (3.7) с учетом $y = y' = 0$:

$$(3.16) \quad \tilde{u}(x) = -\frac{\sin \varphi [(1 - \cos \varphi)(\omega^2 + 1) + \beta]}{\beta}.$$

Получим уравнения

$$(3.17) \quad \begin{aligned} \varphi' &= \omega, \\ \omega' &= -\frac{\omega^2 + 1}{\beta} \sin \varphi. \end{aligned}$$

Уравнения (3.17) совпадают с уравнениями обычного (не перевернутого) маятника, представленного в безразмерном виде, с добавлением эффекта увеличения ускорения свободного падения (равного 1 в безразмерном виде) на величину ω^2 . Фазовый портрет системы (3.17) изображен на рис. 4 слева. Подобный фазовый портрет приведен в [1]. Справа на том же рисунке изображен фазовый портрет обычного маятника.

Уравнения (3.17) допускают первый интеграл

$$(3.18) \quad V(\varphi, \omega) = 1 - \cos \varphi + \frac{\beta}{2} \ln(1 + \omega^2).$$

Внутри области, окружающей точку $(0, 0)$, решения (3.17) периодические. Фазовый портрет системы (3.17) содержит чередующиеся особые точки типа центр и седло. Сепаратрисной траектории, соединяющей седла $\varphi = \pm l\pi$, $\omega = 0$, $l = 1, 3, 5, \dots$, отвечает значение $V = 2$. Две сепаратрисные траектории, идущие из точки $-\pi, 0$ в точку $\pi, 0$ и в обратном направлении ограничивают инвариантную область Ω , в которой $V < 2$ и система (3.17) имеет единственное положение равновесия $(0, 0)$. На границе этой области величина $|\omega|$ достигает максимального значения $\bar{\omega}$ при $\varphi = 0$. При этом имеем $V(0, \bar{\omega}) = 2$ и, следовательно,

$$\frac{\beta}{2} \ln(1 + \bar{\omega}^2) = 2,$$

откуда следует

$$(3.19) \quad \bar{\omega} = \sqrt{e^{\frac{4}{\beta}} - 1}.$$

Очевидно, что в предположении 1

$$(3.20) \quad \omega_0 \leq \bar{\omega}.$$

Имеет место следующая

Теорема 1. Нулевое состояние равновесия системы (3.17) устойчиво в малом.

Для доказательства теоремы достаточно взять (3.18) в качестве функции Ляпунова и заметить, что $V(\varphi, \omega) > 0$ при $\varphi, \omega \neq 0$ внутри области Ω и $V'(\varphi, \omega) \equiv 0$.

Перейдем к синтезу управления, обеспечивающего асимптотическую стабилизацию системы (2.12). Наряду с управлением (3.7) введем в рассмотрение управление

$$(3.21) \quad u^{**}(x) = u^*(x) - k(\omega - \delta), \quad k > 0.$$

Первое слагаемое $u^*(x)$, как и раньше, обеспечивает стабилизацию по выходу y . Дополнительное слагаемое $-k(\omega - \delta)$, имеющее смысл момента силы вязкого трения в осевом соединении колеса и маятника, обеспечивает диссипацию полной энергии в силу (2.16), поскольку $\tilde{E}' = -k(\omega - \delta)^2 < 0$. Такой выбор управления мотивирован утверждением леммы 1, однако требуется строгое доказательство стабилизируемости нулевого состояния равновесия системы (2.12).

Матрица системы (2.12), замкнутой управлением (3.21) и линеаризованной в окрестности нуля, имеет вид

$$(3.22) \quad \Phi_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{(\beta+2)\lambda^2+1}{\beta} & -\frac{(\beta+2)(2\lambda+k)}{\beta} & -\frac{(\beta+2)\lambda^2}{\beta} & -\frac{(\beta+2)(2\lambda-k)}{\beta} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{2\lambda^2+1}{\beta} & \frac{2(2\lambda+k)}{\beta} & \frac{2\lambda^2}{\beta} & \frac{2(2\lambda-k)}{\beta} \end{bmatrix}$$

и, после замены переменных,

$$(3.23) \quad \Phi_{k\zeta} = S\Phi_k S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\beta} & -2k\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right) & -\lambda^2\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right) & -(2\lambda-k)\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2k & -\lambda^2 & k-2\lambda \end{bmatrix}.$$

Характеристический полином этой матрицы равен

$$(3.24) \quad N(\mu, k) = \det(\mu I - \Phi_k) = \\ = \mu^4 + \mu^3 \left(2\lambda + k\frac{4+\beta}{\beta}\right) + \mu^2 \left(\lambda^2 + \frac{1}{\beta}\right) + \mu\frac{(2\lambda-k)}{\beta} + \frac{\lambda^2}{\beta}.$$

Для его гурвицевости необходима положительность всех коэффициентов и, в частности, необходимо условие

$$(3.25) \quad 0 < k < 2\lambda.$$

Для исследования гурвицевости полинома (3.24) используем критерий Эрмита–Билера (см. [16, Теорема 1.2.3]). Имеем $N(i\omega, k) = A(\omega^2) + i\omega B(\omega^2)$, где

$$A(t) = \frac{\lambda^2}{\beta} - t \left(\lambda^2 + \frac{1}{\beta} \right) + t^2, \\ B(t) = \frac{(2\lambda-k)}{\beta} - t \left(2\lambda + k\frac{4+\beta}{\beta} \right)$$

и $t = \omega^2$. Корни полинома $A(t)$ равны $t_1 = \lambda^2$ и $t_3 = \frac{1}{\beta}$. Единственный корень полинома $B(t)$ равен

$$t_2 = \frac{2\lambda-k}{\beta \left(2\lambda + k\frac{4+\beta}{\beta} \right)}.$$

Для гурвицевости полинома (3.24) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$(3.26) \quad 0 < t_1 < t_2 < t_3 \quad \text{или} \quad 0 < t_3 < t_2 < t_1.$$

Из (3.25) и выражения для t_2 следует, что $t_2 < t_3$ и в (3.26) возможно только первое неравенство. Для его выполнения, в свою очередь, необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$(3.27) \quad \lambda^2 < \frac{1}{\beta}$$

и $t_1 < t_2$ или, после несложных преобразований, выполнение условия

$$(3.28) \quad k < \bar{k} = 2\lambda \frac{1 - \lambda^2\beta}{1 + \lambda^2(4 + \beta)}.$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2. Для гурвицевости полинома (3.24) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства (3.27) и (3.28).

Рассмотрим теперь поведение системы (3.10), замкнутой управлением (3.21), не в окрестности нуля. После перехода к переменным φ, ω, y, y' замкнутая система имеет вид

$$(3.29) \quad \begin{aligned} \varphi' &= \omega, \\ \omega' &= -(\lambda^2 y + 2\lambda z) \frac{1 + \beta + \cos \varphi}{\beta} - k(2\omega - z) \frac{1 + \beta + \cos \varphi}{d} - \frac{\omega^2 + 1}{\beta} \sin \varphi, \\ y' &= z, \\ z' &= -\lambda^2 y - 2\lambda z - k(2\omega - z) \frac{\beta}{d}. \end{aligned}$$

Если положить $k = 0$, то получим утверждение, аналогичное утверждению теоремы 1, но справедливое для полной системы (3.29), а не только для предельной.

Теорема 3. При $k = 0$ нулевое состояние равновесия системы (3.29) устойчиво в малом.

Доказательство вынесено в Приложение.

Система (3.29) может быть переписана в виде

$$(3.30) \quad \zeta' = \Psi(\gamma)\zeta, \quad \Psi(\gamma) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(\gamma_4 - 1)}{\beta} & -2k\gamma_3 & -\lambda^2\gamma_2 & -2\lambda\gamma_2 + k\gamma_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2k\gamma_1 & -\lambda^2 & -2\lambda + k\gamma_1 \end{bmatrix},$$

где с учетом $d = \beta + \sin^2 \varphi$:

$$(3.31) \quad \begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\beta}{\beta + \sin^2 \varphi}, \\ \gamma_2 &= \frac{1 + \beta + \cos \varphi}{\beta}, \\ \gamma_3 &= \frac{1 + \beta + \cos \varphi}{\beta + \sin^2 \varphi}, \\ \gamma_4 &= 1 - \frac{\sin \varphi}{\varphi}(1 + \omega^2). \end{aligned}$$

Система (3.30), эквивалентная (3.29), нелинейна. Наряду с ней рассмотрим линейную нестационарную систему

$$(3.32) \quad \zeta' = \Psi(\gamma(t))\zeta,$$

где числа $\gamma_l(t)$, $l = 1, \dots, 4$, заданы не выражениями (3.31), а представляют собой произвольно меняющиеся во времени измеримые функции, стесненные только двусторонними ограничениями, следующими из выражений (3.31) и предположения 1:

$$(3.33) \quad \begin{aligned} \gamma_1(t) &\in \left[\frac{\beta}{\beta + \sin^2 \varphi_0}, 1 \right], \\ \gamma_2(t) &\in \left[\frac{1 + \beta + \cos \varphi_0}{\beta}, \frac{2 + \beta}{\beta} \right], \\ \gamma_3(t) &\in \left[\frac{1 + \beta + \cos \varphi_0}{\beta + 1}, \frac{2 + \beta}{\beta} \right], \\ \gamma_4(t) &\in \left[-\omega_0^2, 1 - \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} \right]. \end{aligned}$$

Множество решений системы (3.32) при всевозможных значениях $\gamma_l(t)$ шире, чем множество решений нелинейной системы (3.29). Поэтому требование абсолютной устойчивости нулевого решения системы (3.32) в классе функций $\gamma_l(t)$, подчиненных ограничениям (3.33), обеспечит также и устойчивость нулевого решения системы (3.29). Такой метод погружения в более широкий в смысле множества решений класс систем дает, разумеется, достаточные условия устойчивости нулевого решения системы (3.29). Для получения таких условий выберем функцию Ляпунова, имеющую отрицательную производную одновременно для всех систем (3.32), (3.33).

В качестве кандидата выберем функцию

$$(3.34) \quad V(\zeta) = \frac{1}{2}\zeta^T P \zeta + \alpha \left[1 - \cos \varphi + \frac{\beta}{2} \ln(1 + \omega^2) - \frac{\varphi^2}{2} - \frac{\omega^2 \beta}{2} \right],$$

параметризованную положительно определенной матрицей $P \succ 0$ (знаки \succ , \prec , \succeq и \preceq означают положительную и отрицательную определенность и полуопределенность соответственно) и неотрицательным числом $\alpha \geq 0$. Разложение нелинейного слагаемого с множителем α в ряд Тейлора в выражении (3.34) начинается с членов третьего порядка и служит поправкой к квадратичной форме для лучшего учета нелинейных свойств системы (3.32).

Требование отрицательной определенности производной функции (3.34) в силу системы (3.32) при всевозможных значениях $\gamma_l(t)$, $l = 1, \dots, 4$, из интервалов (3.33) будет представлено в виде системы ЛМН (можно сказать одного ЛМН).

Производная функции (3.34) в силу системы (3.32) имеет вид

$$\begin{aligned}
 (3.35) \quad V' &= \zeta^T P \Psi(\gamma) \zeta + \\
 &+ \alpha \left[\sin \zeta_1 \zeta_2 + \frac{\beta \zeta_2}{1 + \zeta_2^2} \left(-\frac{1 + \zeta_2^2}{\beta} \sin \zeta_1 - 2k\gamma_3 \zeta_2 - \lambda^2 \gamma_2 y + (k\gamma_3 - 2\lambda\gamma_2) z \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \zeta_1 \zeta_2 - \beta \zeta_2 \left(-\frac{1 + \zeta_2^2}{\beta} \sin \zeta_1 - 2k\gamma_3 \zeta_2 - \lambda^2 \gamma_2 y + (k\gamma_3 - 2\lambda\gamma_2) z \right) \right] = \\
 &= \zeta^T \Psi(\gamma) P \zeta + \\
 &+ \alpha \left[\zeta_2 (-2k\gamma_3 \zeta_2 - \lambda^2 \gamma_2 y + (k\gamma_3 - 2\lambda\gamma_2) z) \left(\frac{1}{1 + \zeta_2^2} - 1 \right) \beta - \zeta_1 \zeta_2 \gamma_4 \right] = \\
 &= \zeta^T \Psi(\gamma) P \zeta + \alpha [\zeta_2 (-2k\gamma_3 \zeta_2 - \lambda^2 \gamma_2 y + (k\gamma_3 - 2\lambda\gamma_2) z) \gamma_0 \beta - \zeta_1 \zeta_2 \gamma_4],
 \end{aligned}$$

где

$$(3.36) \quad \gamma_0 = -\frac{\zeta_2^2}{1 + \zeta_2^2} \in \left[-\frac{\omega_0^2}{1 + \omega_0^2}, 0 \right].$$

Окончательно, определив

$$\begin{aligned}
 (3.37) \quad \gamma_5 &= \gamma_0 \gamma_2 \in \left[-\frac{\omega_0^2(2 + \beta)}{\beta(1 + \omega_0^2)}, 0 \right], \\
 \gamma_6 &= \gamma_0 \gamma_3 \in \left[-\frac{\omega_0^2(2 + \beta)}{\beta(1 + \omega_0^2)}, 0 \right],
 \end{aligned}$$

запишем

$$(3.38) \quad V' = \zeta^T \Psi(\gamma) P \zeta + \alpha [\zeta_2 (-2k\gamma_6 \zeta_2 - \lambda^2 \gamma_2 y + (k\gamma_6 - 2\lambda\gamma_5) z) \beta - \zeta_1 \zeta_2 \gamma_4].$$

Приняв во внимание, что в соответствии с выражениями (3.31) величины γ_2 и γ_3 принимают максимальные значения одновременно, то получаем, что и

величины γ_5 и γ_6 принимают минимальные значения $-\frac{\omega_0^2(2+\beta)}{\beta(1+\omega_0^2)}$ и максимальные значения 0 одновременно. Тогда в выражении (3.38) достаточно оставить одно значение γ_5 и записать

$$(3.39) \quad V' = \zeta^T \Psi(\gamma) P \zeta + \alpha [\zeta_2 (-2k\gamma_5 \zeta_2 - \lambda^2 \gamma_2 y + (k - 2\lambda)\gamma_5 z) \beta - \zeta_1 \zeta_2 \gamma_4].$$

В следующем разделе перепишем условие $V' < 0$ на языке ЛМН.

4. Оценка области притяжения нулевого положения равновесия

Выражение для функции Ляпунова (3.34) представим в виде

$$(4.1) \quad V(\zeta) = \frac{1}{2} \zeta^T Q(\alpha) \zeta + \alpha \left[1 - \cos \varphi + \frac{\beta}{2} \ln(1 + \omega^2) \right] \geq \frac{1}{2} \zeta^T Q(\alpha) \zeta,$$

где через $Q(\alpha)$ обозначена матрица

$$(4.2) \quad Q(\alpha) = P - \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Потребуем выполнение неравенства

$$Q(\alpha) \succeq \varepsilon I,$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно мало, получаем из (4.1), что функция $V(\zeta)$ положительно определена. Далее, выражение (3.39) для V' аффинно зависит от произвольно меняющихся параметров γ_l , $l = 1, \dots, 5$, каждый из которых принимает значения из отрезка. При этом вектор γ принимает значения из декартова произведения пяти отрезков. Это множество выпукло и имеет 32 крайние точки. Поэтому условие $V' < 0$ эквивалентно системе из тридцати двух ЛМН, получающихся приравниванием в выражении (3.39) значений произвольно меняющихся параметров γ_l , $l = 1, \dots, 5$, своим минимальным и максимальным значениям в отрезках (3.33) и (3.37). Для всевозможных $\gamma^i \in R^5$, $i = 1, \dots, 32$, получим систему ЛМН (одно ЛМН большой размерности)

$$(4.3) \quad P \Psi(\gamma^i) + \Psi^T(\gamma^i) P - \alpha Y(\gamma^i) \preceq 0,$$

где

$$Y(\gamma^i) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_4^i & 0 & 0 \\ \gamma_4^i & 4k\beta\gamma_5^i & \beta\lambda^2\gamma_2^i & \beta(2\lambda - k)\gamma_5^i \\ 0 & \beta\lambda^2\gamma_2^i & 0 & 0 \\ 0 & \beta(2\lambda - k)\gamma_5^i & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Так, построенная система ЛМН может оказаться несовместной при заданных значениях φ_0 и ω_0 . Введем в рассмотрение параметр $a \in [0, 1]$ и выберем в качестве φ_0 и ω_0 величины

$$\varphi_0(a) = a\pi, \quad \omega_0(a) = a\bar{\omega},$$

где $\bar{\omega}$ определено выражением (3.19). Каждому значению $\varphi_0(a), \omega_0(a)$ отвечают значения границ интервалов (3.33) и (3.37) и, следовательно, 32 вектора $\gamma^i(a)$. Из выражений для границ интервалов видно, что векторы $\gamma^i(a)$ непрерывно зависят от a . При $a = 0$ нижние и верхние границы интервалов совпадают. Поэтому при $a = 0$ имеем

$$\gamma^i(0) \doteq \gamma^0 = \left[1, \frac{2+\beta}{\beta}, \frac{2+\beta}{\beta}, 0, 0 \right]^T.$$

Далее, $\Psi(\gamma^0) = \Phi_{k\zeta}$ в силу выражений для матриц (3.23), (3.30). Тогда теорема 2 гарантирует совместность системы ЛМН (4.3) при выполнении неравенств (3.27) и (3.28) для достаточно малых значений $a > 0$.

Пусть a^* — это точная верхняя грань тех a , при которых система ЛМН относительно переменных P и α

$$(4.4) \quad \begin{aligned} P\Psi(\gamma^i(a)) + \Psi^T(\gamma^i(a))P - \alpha Y(\gamma^i(a)) &\leq 0, \\ Q(\alpha) &\succeq \varepsilon I, \\ \text{tr}(Q(\alpha)) &= 1 \end{aligned}$$

совместна. Последнее линейное уравнение, приравнивающее след $Q(\alpha)$ единице, добавлено для нормировки решения, поскольку в противном случае множество решений ЛМН образовывало бы конус и вместе с любым решением P и α решением будет также σP и $\sigma \alpha$ при любых $\sigma > 0$, включая как угодно большие и как угодно малые значения.

Величина a^* получается последовательной проверкой совместности (4.4) для возрастающей последовательности значений a .

Итак, при выполнении предположения 1, где $\varphi_0 = a^*\pi$ и $\omega_0 = a^*\bar{\omega}$, функция Ляпунова (3.34) имеет отрицательно определенную производную в силу системы (3.30). Поэтому если удастся подобрать такую константу $c > 0$, что множество

$$(4.5) \quad \Omega_c = \{\zeta : V(\zeta) \leq c\}$$

окажется вписано внутрь множества

$$(4.6) \quad \Pi_0 = \{\zeta : |\varphi| \leq \varphi_0, |\omega| \leq \omega_0\},$$

то любая траектория замкнутой системы (3.30), начатая внутри множества Ω_c , остается внутри этого множества для любых моментов времени в силу отрицательности производной V' . В результате при выполнении

$$(4.7) \quad \Omega_c \subset \Pi_0$$

предположение 1 будет выполняться вдоль всей траектории замкнутой системы (3.30), начавшейся изнутри множества Ω_c . Таким образом, доказана

Теорема 4. Пусть выполнены условия (3.27) и (3.28), величина a^ выбрана как точная верхняя грань тех a , при которых ЛМН (4.4) совместно. Тогда если константа c выбрана таким образом, что выполняется условие (4.7), то множество Ω_c является областью асимптотической устойчивости системы (2.12), замкнутой управлением (3.21).*

Для практического использования теоремы 4 необходимо указать способ нахождения константы c , обеспечивающей выполнение (4.7). Более того, желательно найти наибольшее значение такой константы. Очевидно, что при наибольших значениях c граница множества Ω_c будет касаться плоскостей $\varphi = \pm\varphi_0$ или $\omega = \pm\omega_0$. Определим значение c_1 , при котором множество Ω_c (очевидно, центрально симметричное) касается плоскостей $\varphi = \pm\varphi_0$. Возьмем для определенности случай $\varphi = \varphi_0$. Обозначим через e_1 единичный вектор $(1, 0, 0, 0)^T$. В точке касания ζ градиент функции $V(\zeta)$ коллинеарен вектору e_1 и выполняется условие $\zeta^T e_1 = \zeta_1 = \varphi_0$. Другими словами, в точке касания выполняется система нелинейных уравнений

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \zeta} + \lambda_1 e_1 &= 0, \\ \zeta_1 - \varphi_0(a^*) &= 0, \end{aligned}$$

где λ_1 — это неизвестный множитель. Решение этой системы ζ_1^*, λ_1^* , получается, например, применением метода Ньютона. Если оказалось, что $\varphi_0(a^*) \leq \pi/2$, то, как легко показать, точка касания определяется единственным образом в силу выпуклости функции $V(\zeta)$ при $|\varphi| \leq \pi/2$. В противном случае, если $\varphi_0(a^*) > \pi/2$, то потребуются дополнительный анализ решений системы (4.8), который в данной работе не рассматривается. Окончательно,

$$c_1 = V(\zeta_1^*).$$

Аналогично получается

$$c_2 = V(\zeta_2^*)$$

после решения системы уравнений

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \zeta} + \lambda_2 e_2 &= 0, \\ \zeta_2 - \omega_0(a^*) &= 0, \end{aligned}$$

где $e_2 = (0, 1, 0, 0)^T$. Окончательно,

$$(4.10) \quad c = \min\{c_1, c_2\}.$$

Результаты вычислительных экспериментов приведены в разделе 6.

5. Синтез управления, обеспечивающего глобальную стабилизацию

Рассмотрим частную задачу стабилизации вертикального положения маятника, не обращая внимания на положение колеса. Рассматривая первые два уравнения в (2.12), зависящие от переменных φ, ω и управления u , как независимую систему, предположим, что нужно стабилизировать величину отклонения угла φ от вертикали на уровне $\varphi = \bar{\varphi}$. Стабилизирующее управление легко получается применением любого метода синтеза для системы с одним входом и одним выходом, см. [3]. Воспользуемся, например, методом линеаризации обратной связью. Выбрав в качестве выхода системы $y = \varphi - \bar{\varphi}$, продифференцируем его столько раз, сколько потребуется для получения явной зависимости очередной производной от управления. Взяв первые две производные y , получим с учетом двух уравнений (2.12)

$$(5.1) \quad y' = \omega, \quad y'' = f_1(z) + uh_1(z).$$

Для того чтобы обеспечить экспоненциальную устойчивость по выходу с заранее заданной скоростью убывания, подчиним динамику изменения y дифференциальному уравнению (3.6). Подставив (5.1) в (3.6) и разрешив его относительно u , получим выражение для закона управления

$$(5.2) \quad u = -\frac{d\lambda^2(\varphi - \bar{\varphi}) + 2d\lambda\omega + \sin\varphi[-\cos\varphi\omega^2 + (1 + \beta)]}{1 + \beta + \cos\varphi}.$$

Под действием управления (5.2) переменная φ будет асимптотически приближаться к значению $\bar{\varphi}$, а переменная ω будет стремиться к 0 со скоростью порядка $e^{-\lambda\tau}$. Более того, в силу (3.6) получим $\omega' \rightarrow 0$. В пределе при $\tau \rightarrow \infty$ получим из второго уравнения (2.12) следующее выражение

$$0 = \frac{\sin\bar{\varphi}}{\bar{d}}(1 + \beta) + \frac{\bar{u}}{\bar{d}}(\cos\bar{\varphi} + 1 + \beta), \quad \bar{d} = \beta + \sin^2\bar{\varphi},$$

и для асимптотического значения управления \bar{u} имеем

$$(5.3) \quad \bar{u} = -\frac{\sin\bar{\varphi}(1 + \beta)}{1 + \beta + \cos\bar{\varphi}}.$$

Это же выражение получается из (5.2) при подстановке $\varphi = \bar{\varphi}$, $\omega = 0$. Подставив выражение (5.3) в четвертое уравнение (2.12), получим

$$\delta' = \frac{\sin\bar{\varphi}}{\bar{d}}(-\cos\bar{\varphi}) - \frac{1 + \cos\bar{\varphi}}{\bar{d}} \left[-\frac{\sin\bar{\varphi}(1 + \beta)}{1 + \beta + \cos\bar{\varphi}} \right],$$

откуда после упрощения получаем

$$(5.4) \quad \delta' = \frac{\sin\bar{\varphi}}{1 + \beta + \cos\bar{\varphi}} = -\frac{\bar{u}}{1 + \beta}.$$

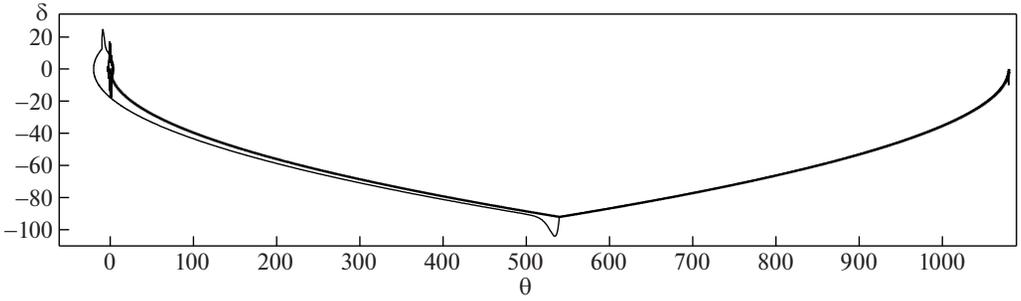


Рис. 5. Тонкой линией изображена траектория системы (2.12) в координатах θ , δ под действием управления (5.2), (5.6) при величине $\bar{\varphi} = 2^\circ$ и начальных условиях $\varphi = -5^\circ, \theta = 1080^\circ, \omega = \delta = 0$. В данном примере $\beta = 3$ и в (5.2) $\lambda = 10$. Для сравнения жирной линией изображена оптимальная траектория системы (5.5) при управлении (5.6).

После стабилизации угла отклонения маятника на уровне $\bar{\varphi}$ колесо движется с постоянным угловым ускорением (5.4). Уравнение (5.4) описывает движение системы второго порядка

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \theta' &= \delta, \\ \delta' &= w. \end{aligned}$$

Будем считать, что управление w принимает постоянные значения $\pm\bar{w}$, связанные с углом $\bar{\varphi} > 0$ выражением

$$\bar{w} = \frac{\sin \bar{\varphi}}{1 + \beta + \cos \bar{\varphi}}.$$

Поставим задачу перевода состояния системы (5.5) из начального положения θ_0, δ_0 в начало координат с помощью кусочно-постоянных управлений, принимающих значения $\pm\bar{w}$. Воспользуемся методом синтеза оптимального по быстродействию управления для системы (5.5), см. [17],

$$(5.6) \quad w(\theta, \delta) = \begin{cases} -\bar{w} & \text{при } \theta < 0, \delta \geq \sqrt{-2\bar{w}\theta} \\ & \text{или } \theta \geq 0, \delta > -\sqrt{2\bar{w}\theta}, \\ \bar{w} & \text{при } \theta > 0, \delta \leq -\sqrt{2\bar{w}\theta} \\ & \text{или } \theta \leq 0, \delta < \sqrt{-2\bar{w}\theta} \end{cases}$$

для управления движением системы (2.12) при больших начальных отклонениях $\xi = \theta l$. В качестве управления будем использовать (5.2), где вместо величины $\bar{\varphi} > 0$ используется величина $\pm\bar{\varphi}$ в зависимости от знака кусочно-постоянного управления $w(\theta, \delta)$ в (5.6). Пример применения этого закона управления приведен на рис. 5. Далее на всех рисунках угловые переменные будут представлены в градусах.

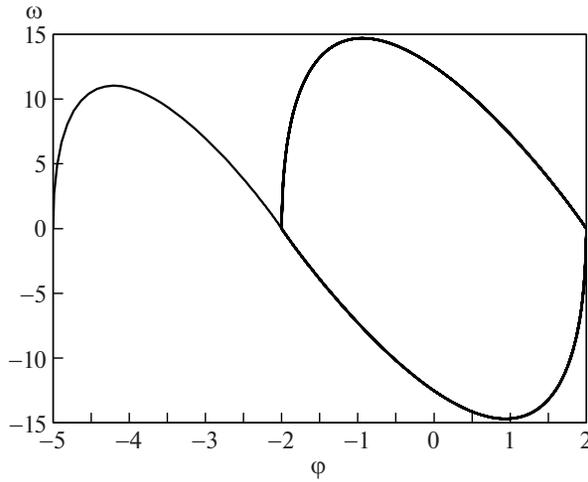


Рис. 6. Траектория системы (2.12) в координатах φ , ω .

Оптимальная траектория системы (5.5), замкнутой управлением (5.6), имеет одну точку переключения при выходе на линию переключения $\delta = \sqrt{-2\bar{w}\theta}$. С другой стороны, видно, что закон управления (5.2), (5.6) переводит траекторию системы θ , δ в некоторую окрестность начала координат, но не стабилизирует в нуле. Переменные θ , δ совершают колебания в окрестности нуля. Колебания вызваны тем, что величина угла φ не может быть установлена равной $\pm\bar{\varphi}$ мгновенно, поскольку система (5.1), замкнутая управлением (5.2), имеет некоторое время переходного процесса, какой бы большой ни была величина λ . На рис. 6 показана траектория замкнутой системы по переменным φ , ω . Видно, что эти переменные колеблются в окрестности 0.

Таким образом, синтез управления системой (2.12) разбивается на два этапа.

1. Сначала, управляя знаком угла $\bar{\varphi}$ в законе управления (5.2) в зависимости от знака кусочно-постоянного управления $w(\theta, \delta)$ в (5.6), состояние системы (2.12) приводится в окрестность нулевого состояния равновесия. Метод построения этой окрестности описан в разделе 4.
2. Внутри указанной окрестности происходит переключение на закон управления, описанный в разделе 3.

Основная цель данной работы состоит в синтезе закона управления второго этапа. Описанный выше метод приведения состояния системы в область притяжения дан без строгого доказательства, поскольку является предметом отдельной работы.

6. Пример

Рассмотрим пример, отвечающий значению $\beta = 3$. Параметры закона управления (3.21) выбраны удовлетворяющими условиям (3.27) и (3.28) и

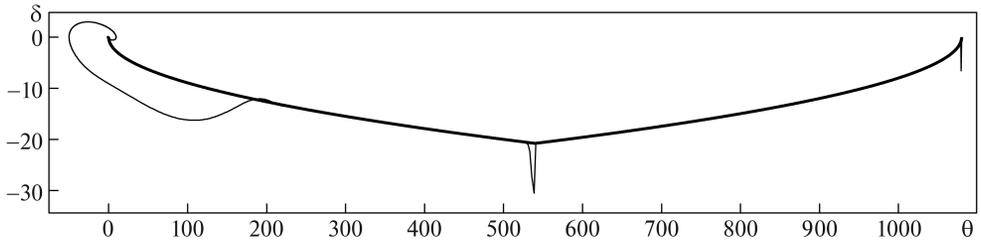


Рис. 7. Тонкой линией изображена траектория системы (2.12), замкнутой комбинированным законом управления при величине $\bar{\varphi} = 2^\circ$ и начальных условиях $\varphi = -5^\circ, \theta = 1080^\circ, \omega = \delta = 0$. Жирной линией изображена оптимальная траектория системы (5.5) при управлении (5.6).

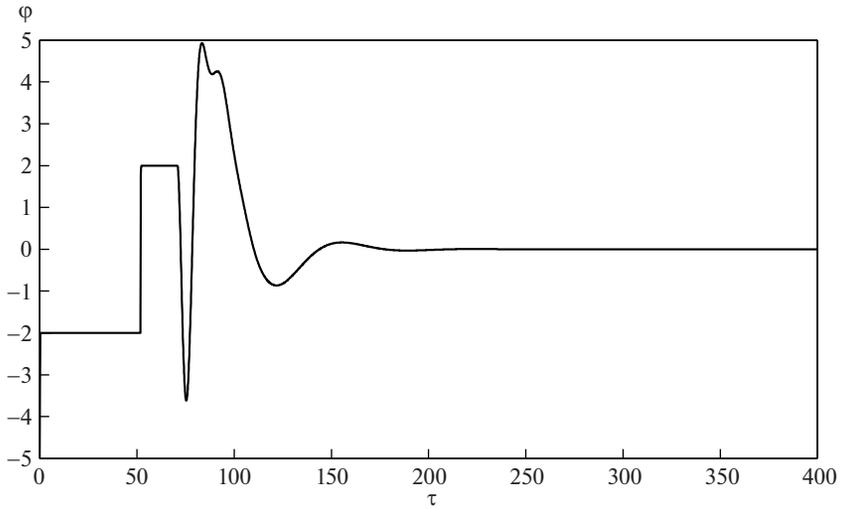


Рис. 8. График изменения переменной φ .

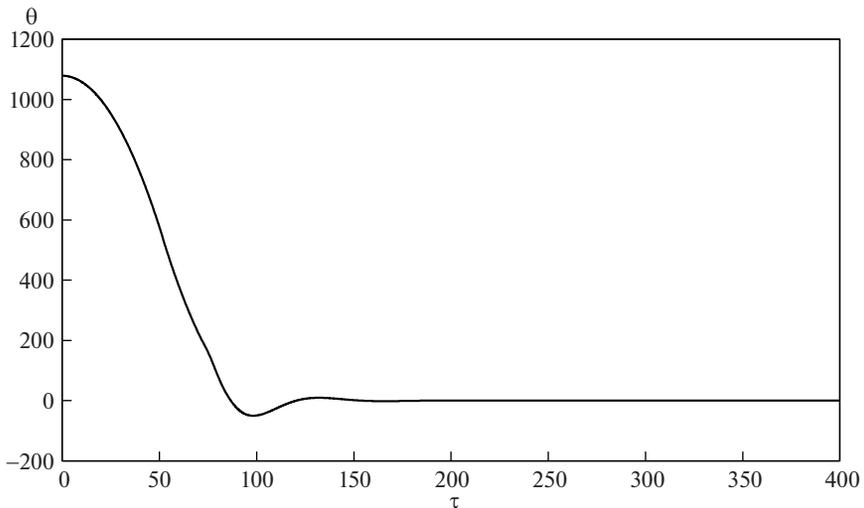


Рис. 9. График изменения переменной θ .

равными $\lambda = 0,1$ и $k = 0,1$. В результате применения теоремы 4 получены следующие параметры функции (3.34):

$$P = \begin{bmatrix} 0,105 & 0,012 & 0,013 & 0,183 \\ 0,012 & 0,225 & -0,005 & 0,046 \\ 0,013 & -0,005 & 0,010 & 0,035 \\ 0,183 & 0,046 & 0,035 & 0,906 \end{bmatrix}, \quad \alpha = 0,062,$$

достигнутые при $a^* = 0,53$ и $c = 0,066$.

На рис. 7 приведена траектория замкнутой системы в координатах θ (ось абсцисс) и δ (ось ординат). В качестве управления применен комбинированный закон. Если состояние системы не попадает в область притяжения Ω_c , то применяется управление, описанное в разделе 5. Критерием пересечения границы области Ω_c является выполнение условия $V(\zeta^*) = 0,066$, которое для данного примера и данных начальных условий случается при $\zeta^* = (2; -0,18; 212,14; -13,13)^T$. Компоненты вектора показаны в градусах для угловых переменных и градусах в секунду для угловых скоростей. После попадания в область Ω_c происходит переключение на закон управления (3.21).

Графики углов φ и θ приведены на рис. 8 и 9.

7. Заключение

В работе рассмотрена задача стабилизации вертикального положения перевернутого маятника, закрепленного на колесе. Предложен закон управления, одновременно стабилизирующий угол отклонения маятника от вертикали и угол поворота колеса. Задача решается методом линеаризации обратной связью по выходу с последующим добавлением слагаемого, обеспечивающего диссипацию полной энергии системы. Дается оценка области притяжения нулевого положения равновесия в четырехмерном фазовом пространстве. Для построения оценки использована функция Ляпунова, состоящая из квадратичной части и нелинейной добавки.

Рассмотрены вопросы глобальной стабилизации, когда начальное положение центра колеса может быть как угодно далеко от целевого.

Приведен численный пример.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Из условия асимптотической стабилизации по выходу y и (3.6) следует также $y'(\tau) \rightarrow 0$. Тогда из условия (3.8) следует $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \delta(\tau) = 0$, и угловые переменные стремятся к постоянным значениям

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \varphi(\tau) = \hat{\varphi}, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \theta(\tau) = \hat{\theta}.$$

Поскольку закон управления $u(x)$ непрерывен по совокупности своих аргументов в точке $\hat{x} = (\hat{\varphi}, 0, \hat{\theta}, 0)^T$, то имеем

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} u(x(\tau)) = \hat{u}.$$

Переходя к пределу при $\tau \rightarrow \infty$, получаем из выражений (2.12), (2.13), что выполняются равенства

$$\begin{aligned} \text{(П.1)} \quad 0 &= \sin \hat{\varphi}(1 + \beta) + \hat{u}(\cos \hat{\varphi} + 1 + \beta), \\ 0 &= -\sin \hat{\varphi} \cos \hat{\varphi} - \hat{u}(\cos \hat{\varphi} + 1). \end{aligned}$$

Если $\cos \hat{\varphi} = 0$, то из второго равенства (П.1) получим $\hat{u} = 0$. Если предположить, что $\cos \hat{\varphi} \neq 0$, то, умножив первое равенство (П.1) на $\cos \hat{\varphi}$, а второе на $(1 + \beta)$ и сложив, получаем

$$\text{(П.2)} \quad (\cos^2 \hat{\varphi} - 1 - \beta)\hat{u} = 0.$$

Поскольку $\cos^2 \hat{\varphi} - 1 - \beta = -\beta - \sin^2 \hat{\varphi} \neq 0$, то из условия (П.2) опять получаем $\hat{u} = 0$. Тогда в силу первого равенства (П.1) имеем $\sin \hat{\varphi} = 0$ и в силу предположения $1 \hat{\varphi} = 0$. Поскольку по условиям леммы имеем также $y(\tau) = \varphi(\tau) + \theta(\tau) \rightarrow 0$, то $\hat{\theta} = 0$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Заметим прежде всего, что функция $V(\varphi, \omega)$, заданная выражением (3.18), непрерывна и положительно определена в окрестности 0. Поэтому для достаточно малых φ, ω выполняется оценка

$$\text{(П.3)} \quad \mu_1 \leq \frac{V(\varphi, \omega)}{\varphi^2 + \omega^2} \leq \mu_2$$

для некоторых положительных μ_1 и μ_2 .

Решение системы (3.29) при $k = 0$ по переменным y, z имеет вид

$$\begin{aligned} \text{(П.4)} \quad y(\tau) &= e^{-\lambda\tau} (y_0 + \tau(\lambda y_0 + z_0)), \\ z(\tau) &= e^{-\lambda\tau} (z_0 - \lambda\tau(\lambda y_0 + z_0)), \end{aligned}$$

и

$$\text{(П.5)} \quad \lambda^2 y(\tau) + 2\lambda z(\tau) = e^{-\lambda\tau} [(\lambda^2 y_0 + 2\lambda z_0) - \tau(\lambda^3 y_0 + \lambda^2 z_0)] \doteq e^{-\lambda\tau} [p + \tau q],$$

где $p = (\lambda^2 y_0 + 2\lambda z_0)$, $q = -(\lambda^3 y_0 + \lambda^2 z_0)$.

Для производной функции (3.18) в силу системы (3.29) при $k = 0$ имеем

$$\begin{aligned} \text{(П.6)} \quad V' &= -\frac{\omega}{1 + \omega^2} e^{-\lambda\tau} (p + \tau q) \frac{1 + \beta + \cos \varphi}{\beta} \leq \\ &\leq \frac{|\omega|}{1 + \omega^2} \left| e^{-\lambda\tau} (p + \tau q) \right| \frac{\beta + 2}{\beta}. \end{aligned}$$

Для функции $\gamma(\omega) = \frac{|\omega|}{1+\omega^2}$ справедлива оценка

$$\gamma(\omega) \leq \frac{1}{2}.$$

Тогда для $0 < \mu < \lambda$, достаточно близкого к λ , найдется такая функция $\alpha(y_0, z_0)$, непрерывно зависящая от своих аргументов и удовлетворяющая условию $\alpha(0, 0) = 0$, что из (П.6) следует оценка

$$(П.7) \quad V' \leq \frac{\beta + 2}{2\beta} e^{-\mu\tau} \alpha(y_0, z_0).$$

Интегрируя обе части (П.7) по τ , получим

$$(П.8) \quad \begin{aligned} V(\varphi(\tau), \omega(\tau)) &\leq V(\varphi_0, \omega_0) + \frac{\beta + 2}{2\beta\mu} (1 - e^{-\mu\tau}) \alpha(\zeta_0) \\ &\leq V(\varphi_0, \omega_0) + \frac{\beta + 2}{2\beta\mu} \alpha(y_0, z_0) \doteq \nu(\zeta_0), \end{aligned}$$

где $\zeta_0 = (\varphi_0, \omega_0, y_0, z_0)^T$ и функция $\nu(\zeta_0)$ непрерывно зависит от ζ_0 и удовлетворяет условию $\nu(0) = 0$. Тогда для любого достаточно малого $\epsilon > 0$ найдется такое малое $\Delta > 0$, что из условия $\|\zeta_0\|^2 < \Delta^2$ следует $V(\varphi(t), \omega(t)) < \epsilon^2/4$. Условие $y(\tau) \rightarrow 0, z(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$ гарантирует, что найдется такое малое $\Delta_1 > 0$, что из условия $y_0^2 + z_0^2 < \Delta_1^2$ следует $y(\tau)^2 + z(\tau)^2 < \epsilon^2/4$. Тогда, определив $V_1(\zeta) = \frac{V(\varphi, \omega)}{\mu_1} + y^2 + z^2 > 0$, получим с использованием (П.3), что $\|\zeta(\tau)\| < \epsilon$ при $\|\zeta_0\| < \min\{\Delta, \Delta_1\}$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М. Управляемый маятник на подвижном основании // Механика твердого тела. 2013. № 1. С. 9–23.
2. Формальский А.М. Управление движением неустойчивых объектов. М.: Физматлит, 2012.
3. Халил Х.К. Нелинейные системы. Москва-Ижевск: ИКИ-РХД, 2009.
4. Ткачев С.Б. Стабилизация неминимально фазовых аффинных систем с использованием линеаризации по части переменных. Наука и образование. Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2011. № 11. С. 1–29.
5. Utkin V.I., Guldner J., Shi J. Sliding mode control in electro-mechanical systems. CRC Press. 2009.
6. Jung-Su Ha, Ju-Jang Lee. Position Control of Mobile Two Wheeled Inverted Pendulum Robot by Sliding Mode Control // Proceedings of 12th International Conference on Control, Automation and Systems. 2012. P. 715–719.
7. Zhijun Li, Chenguang Yang, Liping Fan. Advanced Control of Wheeled Inverted Pendulum Systems. Springer, 2013.
8. Пестерев А.В., Морозов Ю.В. Стабилизация тележки с перевернутым маятником // АиТ. 2022. № 1. С. 95–112.

9. *Pesterev A.V., Morozov Yu.V., Matrosov I.V.* On optimal selection of coefficients of a controller in the point stabilization problem for a robot-wheel // Commun. Comput. Inf. Sci. (CCIS). 2020. V. 1340. P. 236–249.
10. *Teel A.R.* A nonlinear small gain theorem for the analysis of control systems with saturation // Trans. Autom. Contr. IEEE. 1996. V. 41. No. 9. P. 1256–1270.
11. *Решмин С.А., Черноусько Ф.Л.* Оптимальный по быстродействию синтез управления нелинейным маятником // Известия РАН. ТИСУ. 2007. № 1. С. 13–22.
12. *Srinivasan B., Huguenin P., Bonvin D.* Global stabilization of an inverted pendulum. Control strategy and experimental verification // Automatica. 2009. V. 45. P. 265–269.
13. *Gordillo F., Aracil J.* A new controller for the inverted pendulum on a cart // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2008. No. 18. P. 1607–1621.
14. *Неймарк Ю.И.* Математическое моделирование как наука и искусство. Нижний Новгород: Изд-во Нижегород. университета, 2010.
15. <https://wxMaxima-developers.github.io/wxmaxima/>.
16. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Математическая теория автоматического управления. Москва: URSS, 2019.
17. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. 4-е изд. Москва–М.: Наука, 1983.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 14.02.2022

После доработки 13.04.2022

Принята к публикации 28.04.2022