Автоматика и телемеханика, № 5, 2022

**© 2022 г. А.В. АХМЕТЗЯНОВ, канд. техн. наук (awa@ipu.ru),
А.В. САМОХИН, д-р техн. наук (samohinalexey@gmail.com)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)**

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ УПРАВЛЯЮЩИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ ДЛЯ УВЕЛИЧЕНИЯ НЕФТЕОТДАЧИ ПРИРОДНЫХ ЗАЛЕЖЕЙ[1]

В процессе разработки месторождений нефти применяются волновые периодические возмущения для увеличения дебита скважин и повышения конечной нефтеотдачи пластов. В неоднородной среде, при наличии диссипации и/или дисперсии, гармонические колебания, создаваемые в забоях скважин, превращаются в пилообразные волны с периодическими ударными фронтами. В статье описаны и исследованы одномерные и двумерные нелинейные математические модели таких процессов.

Ключевые слова: волновые воздействия, уравнения Кортвега-де Фриза–Бюргерса, цилиндрические волны, сферические волны, пилообразные волны, развитие паттернов.

DOI: 10.31857/S0005231022050051, **EDN:** ABKKSK

1. Введение

Пилообразные волны — периодические затухающие волны возмущения, профиль которых содержит слабые разрывы. В вязкой среде без дисперсии любое периодическое возмущение на больших расстояниях превращается в “пилу” с треугольными зубцами. Каждый период содержит слабый разрыв и почти прямолинейный участок профиля. При дальнейшем распространении изменяются лишь пиковые значения амплитуды возмущений. Профили пилообразных волн довольно устойчивы и мало изменяются при парном взаимодействии и при слабом воздействии дополнительных факторов — дифракции, дисперсии, низкочастотной модуляции и т.п. [1]. Такая устойчивость связана с сильным проявлением нелинейных свойств насыщенной углеводородами пористой среды.

Пилообразные волны аналогичны ударным волнам, но распространяются в средах с вязкостью. Стандартные ударные волны представляет собой пример сильного разрыва гидродинамических параметров, когда функции, их описывающие, претерпевают конечные разрывы. Слабый разрыв — это когда сами параметры непрерывны, а разрывы претерпевают те или иные пространственные производные (пилообразные волны являются слабо разрывными). Поверхности слабого разрыва распространяются относительно среды со скоростью, равной скорости звука, см. обзор [1].

[1] Работа выполнена при частичной поддержке Российского научного фонда (проект 21-71-20034).

Исследования и приложения теории нелинейных пилообразных волн связаны сейчас с распространением волн в неоднородных средах, см. обзор [2]. Соответствующие задачи можно условно разделить на две группы: задачи, связанные с проблемой формирования интенсивных воздействий (ударов), и обратные задачи нелинейного неразрушающего контроля и диагностики (восстановление параметров источника, рассеивателей или трассы распространения сигнала).

В настоящей статье описаны и частично исследованы пространственно одномерные и двумерные нелинейные математические модели таких процессов. Использование этих нелинейных свойств в управлении нефтедобычей приведет к увеличению доли извлекаемых запасов месторождений, поскольку создаваемые опускным источником колебаний внешние гармонические возмущения, преобразованные в диссипативной среде в пилообразные ударные волны, вызывают кавитацию в жидкой среде, и вторичные ударные волны, которые преодолевают капиллярные силы, удерживающие остаточные запасы нефти на поверхностях пóровых каналов и трещин.

Скорость затухания сигнала, переносимая слабыми разрывами, зависят от свойств среды и параметров сигнала; они поддаются разрабатываемым эффективным численным оценкам, которые в настоящее время разрабатываются авторами статьи и будут предметом последующих публикаций.

2. Одномерные модели

Для описания пилообразных волн необходимо правильно определить положение и форму ударного фронта, а также величины возмущений при переходе через фронт ударной волны. С этой целью используются уравнения Бюргерса

$$u_t = -2uu_x + \varepsilon^2 u_{xx}$$

и Кортвега-де Фриза–Бюргерса

$$u_t = -2uu_x + \varepsilon^2 u_{xx} + \lambda u_{xxx},$$

приводящие к принципиально верному описанию характерных эффектов в пространственно одномерной ситуации. Различие между этими уравнениями состоит в том, учитывается дисперсия среды или не учитывается (ε, λ – коэффициенты, постоянные для однородных сред и связанные с вязкостью/диссипацией и дисперсией среды, u – приведенная величина возмущения). Начально-граничная задача выглядит так:

$$u\,(x,0) = a, \quad u\,(0,t) = a + b\sin\,(kt)\,, \quad u\,(L,t) = a, \quad u_x\,(L,t) = 0, \quad L \gg 0.$$

Волновая картина определяется отношением $\gamma = \varepsilon^2/\sqrt{\lambda}$. На рис. 1 изображена трансформация синусоиды в пилу при небольшой диссипации. С увеличением расстояния x, пройденного волной, мелкие детали исходного временнóго профиля постепенно исчезают на удалении от источника порядка нескольких характерных длин [3, 4]. На всех рисунках движение вправо.

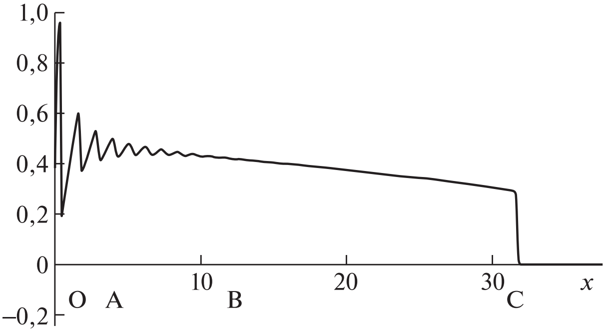

Рис. 1. Типичный вид графика решения Кортвега-де Фриза–Бюргерса. Участок $[0, \mathrm{A}]$ – пилообразная волна, $[\mathrm{A}, \mathrm{B}]$ – квазигармонические затухающие колебания, $[\mathrm{B}, \mathrm{C}]$ – монотонная часть, в точке C передний (головной) ударный фронт.

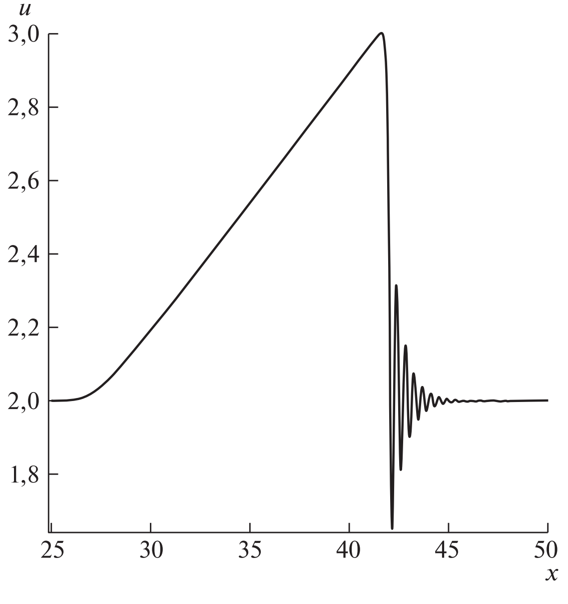

Рис. 2. Уравнение Кортвега-де Фриза–Бюргерса, трансформированный солитон, $\gamma = 0,22$.

На рис. 2 показана трансформация одинокого импульса, солитона для $\gamma = 0;22$.

Для полупрямой $x \in [0;\infty)$ и периодического возмущения в точке $x = 0$ вида $u\,(0,t) = u_0 + b\sin{(\omega t)}$ асимптотика соответствующих решений уравнения Бюргерса такова:

$$u = \frac{a}{R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin{(n\theta)}}{\mathrm{sh}(n(1+X)/(2R))}.$$

Здесь R — число Рейнольдса, $\theta = \omega\,(t - x/u_0)$.

Благодаря значительному набору симметрий уравнение имеет значительный запас автомодельных решений (в том числе типа бегущих ударных волн, что следует из наличия галилеевой симметрии), а благодаря наличию линеаризующего преобразования Коула–Хопфа известны многие точные решения. По этой причине уравнение также использовалось для сравнения нескольких численных алгоритмов. В последние несколько лет численное решение системы многомерных уравнений Бюргерса привлекло большое внимание и привело к различным методам конечных разностей, конечно-элементных и граничных элементов.

2.1. Плоские, цилиндрические и сферические волны

Уравнение КдФ–Бюргерса для плоских волн имеет вид

$$u_t = -2uu_x + \varepsilon^2 u_{xx} + \delta u_{xxx}. \tag{1}$$

Его цилиндрические и сферические аналоги [5–7]:

$$u_t + \frac{1}{2t}u = -2uu_x + \varepsilon^2 u_{xx} + \delta u_{xxx} \tag{2}$$

и

$$u_t + \frac{1}{t}u = -2uu_x + \varepsilon^2 u_{xx} + \delta u_{xxx} \tag{3}$$

соответственно [5].

Отметим, что плоские волны — решения уравнения Бюргерса (1) — ранее подвергались детальному анализу, в то время как сферические и цилиндрические волны изучены пока недостаточно. В статье приводятся новые результаты, касающиеся этих решений.

Рассмотрим начально-краевую задачу:

$$u(x,0)=f(x),\quad u(a,t)=l(t),\quad u(b,t)=L(t),\quad u_x(b,t)=R(t),\quad x\in[a,b]. \tag{4}$$

В случае $\delta = 0$ (т.е. для уравнения Бюргерса) получается

$$u(x,0) = f(x),\quad u(a,t) = l(t),\quad u(b,t) = R(t),\quad x \in [a,b]. \tag{5}$$

Случай граничных условий $u(a,t) = A\sin(\omega t)$, $u(b,t) = 0$ и связанная с ним асимптотика представляют для авторов особый интерес. Для численного моделирования будем использовать $x \in [0,b]$ для достаточно больших b вместо $\mathbb{R}^+$.

Для $t \gg 1$ уравнения (2) и (3) стремятся к (1); то же происходит с их решениями. Напомним, что явный вид решений типа бегущей волны для плоского

КдФ–Бюргерса (1) выглядит так:

$$u_{\mathrm{tws}}(x,t)=\frac{3\varepsilon^4\,\mathrm{th}^2\left(\frac{\varepsilon^2(x-Vt-s)}{10\delta}\right)}{50\delta}-\frac{3\varepsilon^4\,\mathrm{th}\left(\frac{\varepsilon^2(x-Vt-s)}{10\delta}\right)}{25\delta}+\frac{V}{2}-\frac{3\varepsilon^4}{50\delta}. \tag{6}$$

Потребуем, чтобы $u|_{x=+\infty}=0$; тогда бегущая волна должна иметь скорость $V=\frac{6\varepsilon^4}{25\delta}$.

Обратите внимание, что уравнения (1)–(3) можно записать в виде $w_t+\frac{n}{2t}w=\gamma w_{xx}-2ww_x+w_{xxx}$ заменой переменных $t\to t\sqrt{\delta}$, $x\to x\sqrt{\delta}$, $u\to-\frac{u}{2}$. Здесь $\gamma=\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\delta}}$ и $n=0,1/2,1$ для плоских, цилиндрических и сферических волн соответственно.

В случае $\delta=0$ уравнение Бюргерса также имеет множество решений типа бегущей волны, исчезающей в точке $x\to+\infty$. Они даются формулой

$$u_{\mathrm{Btws}}(x,t)=\frac{V}{2}\left[1-\mathrm{th}\left(\frac{V}{2\varepsilon^2}(x-Vt+s)\right)\right]. \tag{7}$$

Далее показано, что в случае вышеуказанного начально-граничного условия возмущение состояния равновесия (2), (3) в конечном итоге становится очень похожим на форму этого скачка.

- Более высокая вязкость эффективно гасит колебания и может привести к отсутствию пилообразных эффектов.
- Большие частоты начальных возмущений затухают намного быстрее.
- Возмущение большей амплитуды приводит к увеличению скорости и амплитуды волны.
- После затухания начальных колебаний графики превращаются в монотонно падающие выпуклые линии, оканчивающиеся ударом.
- Цилиндрическое возмущение движется быстрее и медленнее затухает по сравнению со сферическим.

2.2. Симметриии, инвариантные решения

Поскольку цилиндрические и сферические уравнения явно зависят от времени, их запас симметрии невелик.

Алгебры классических симметрий порождаются векторными полями:

$$\begin{aligned}
X&=\frac{\partial}{\partial x},\\
Y&=x\frac{\partial}{\partial x}+2t\frac{\partial}{\partial t}-u\frac{\partial}{\partial u},\\
Z&=\sqrt{t}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{4\sqrt{t}}\frac{\partial}{\partial u},\\
W&=\ln(t)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2t}\frac{\partial}{\partial u}.
\end{aligned}$$

Симметрии и инвариантные решения

Уравнения	Симметрии	Инвариантные решения
Cylindrical Burgers	X, Y, Z	$\frac{C}{\sqrt{(t)}}$, $\frac{(x+4C)}{4t}$, $x^{-1}f\left(\frac{t}{x^2}\right)$ для некоторых f
Cylindrical KdV-Burgers	X, Z	$\frac{C}{\sqrt{(t)}}$, $\frac{(x+4C)}{4t}$
Spherical Burgers	X, Y, W	$\frac{C}{t}$, $\frac{x+2C}{2t\ln(t)}$, $x^{-1}f\left(\frac{t}{x^2}\right)$ для некоторых f
Spherical KdV-Burgers	X, W	$\frac{C}{t}$, $\frac{x+2C}{2t\ln(t)}$

Найти инвариантные решения для симметрий X, Z и W несложно. Результаты собраны в таблице.

Для Y инвариантное решение должно иметь вид $x^{-1}f(\frac{t}{x^2})$, где $f(\xi)$ — решение нелинейного дифференциального уравнения

$$f'' + \frac{1}{\varepsilon^2\xi}ff' + \left(\frac{5}{2\xi} - \frac{1}{4\xi^2\varepsilon^2}\right)f' + \frac{1}{2\xi^2\varepsilon^2}f^2 + \left(\frac{1}{2\xi^2} - \frac{1}{4\xi^3\varepsilon^2}\right)f = 0,$$

решения которого пока не найдены.

2.3. Законы сохранения

Сначала перепишем уравнения (1)–(3) в подходящую форму законов сохранения:

$$[t^n \cdot u]_t = \left[t^n \cdot \left(-u^2 + \varepsilon^2 u_x + \delta u_{xx}\right)\right]_x, \tag{8}$$

$n = 0,\ 1/2,\ 1$ для плоского, цилиндрического и сферического случаев соответственно.

Следовательно, для решений приведенных выше уравнений имеем:

$$\oint\limits_{\partial\mathcal{D}} t^n \cdot \left[u\,dx + \left(\varepsilon^2 u_x - u^2 + \delta u_{xx}\right)\,dt\right] = 0. \tag{9}$$

Выражение (5) преобразовывается до

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^{+\infty} u(x,T)\,dx = \frac{1}{T}\int\limits_0^{T} \frac{1}{T^n}t^n\left(-\varepsilon^2 u_x(0,t) + u^2(0,t) - \delta u_{xx}(0,t)\right)dt. \tag{10}$$

Правая часть (10) — это среднее значение.

Возьмем $u(0,t) = M$. Далее приводятся графики решений для $M = 1$.

Для получившейся волны сжатия $u_x(0,t)=0$ правая часть (10) равна

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T \frac{M^2}{T^n}t^n\,dt = \frac{M^2}{n+1}. \tag{11}$$

Как видно на рис. 1, для периодического граничного условия после затухания начальных колебаний графики становятся монотонными выпуклыми линиями, которые начинаются приблизительно на высоте $A/2$ и заканчиваются при $x = V\cdot T$ и на высоте V. Эти монотонные линии очень похожи на графики решений с постоянным условием на границе.

2.4. Центральная аппроксимация

Глядя на форму графика решения, можно ясно увидеть, что монотонная часть и ее головной удар развиваются как гомотетическое преобразование исходной конфигурации. Итак, ищем решения вида $u(x,t)=y(x/t)$. Подставляя его в уравнения (1)–(3), получаем уравнение

$$-y'\frac{x}{t^2}+\frac{ny}{t}=\frac{2yy'}{t}+\frac{\varepsilon^2 y''}{t^2}+\frac{\delta y'''}{t^3} \tag{12}$$

или

$$-\xi y' + ny = 2yy' + \frac{\varepsilon^2 y''}{t}+\frac{\delta y'''}{t^2} \tag{13}$$

для $y=y(\xi)$ и $n=0,\ 1/2,\ 1$.

При достаточно большом t можно опустить два последних слагаемых. Отсюда следует, что подходящими решениями вышеуказанных обыкновенных дифференциальных уравнений являются:

$$\begin{aligned}
&u_1(x,t)=C_1,\quad C_1\in\mathbb{R},\quad n=0\quad \text{для плоских волн,}\\
&u_2(x,t)=-\frac{2+\sqrt{C_2\xi+4}}{C_2},\quad C_2\in\mathbb{R},\quad n=\frac{1}{2}\quad \text{для цилиндрических и}\\
&u_3(x,t)=\exp\left(\mathrm{LambertW}\left(-\frac{\xi}{2}e^{-\frac{C_3}{2}}\right)+\frac{C_3}{2}\right),\quad C_3\in\mathbb{R},\quad n=1
\end{aligned}$$

для сферических.

Пусть V — скорость распространения сигнала в среде. Поскольку для передней ударной волны $x=Vt$ и $u=V$, имеем условие нахождения C_i. Это $y(V)=V$. Отсюда следует, что $C_1=V$, $C_2=-\frac{3}{V}$, $C_3=\ln(V)+\frac{1}{2}$. Для плоских волн это соответствует решению бегущей волны классического уравнения Бюргерса.

Для цилиндрических волн монотонная часть задается как

$$u_2=\frac{1}{3}\left(2V+V\sqrt{4-\frac{3x}{Vt}}\right).$$

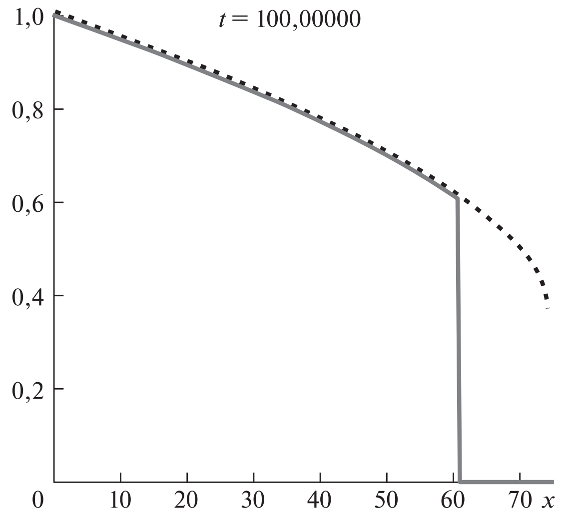

Рис. 3. Сплошная линия — решение (15), точки — его u_2 приближение.

Для сферических волн

$$u_3 = V\sqrt{\mathrm{e}}\exp\left(\mathrm{LambertW}\left(-\frac{x}{2Vt\sqrt{\mathrm{e}}}\right)\right),$$

$$u_2|_{x=0} = \frac{4V}{3}, \quad u_3|_{x=0} = V\sqrt{\mathrm{e}} \approx 1{,}65V. \tag{14}$$

Эти формулы показывают, что скорость пропорциональна амплитуде в начале колебаний и не зависит от частоты, которая вместе с амплитудой определяет колеблющуюся часть решений; подробнее об этом далее.

Соответствующие графики идеально совпадают с графиками, полученными путем численного моделирования; например, см. сравнение с решением в ($t = 100$) для проблемы

$$u_t = 0{,}01u_{xx} - 2uu_x - u/t, \quad u(0,t) = 1, \quad u(75,t) = 0, \quad u(x,0) = 0 \tag{15}$$

на графике рис. 3.

Однако монотонная гладкая часть периодического граничного решения заканчивается скачком, который движется с постоянной скоростью и амплитудой, подобно передней части бегущей волны Бюргерса на рис. 1.

Довольно естественная идея — усечь гомотетическое решение, умножив его на (нормализованную) бегущую волну Бюргерса, (7). А именно положить:

- для цилиндрических волн

$$\tilde{u}_2 = \frac{1}{2}\left[1 - \mathrm{th}\left(\frac{V}{\varepsilon^2}(x - Vt)\right)\right] \cdot \frac{1}{3}\left(2V + V\sqrt{4 - \frac{3x}{Vt}}\right); \tag{16}$$

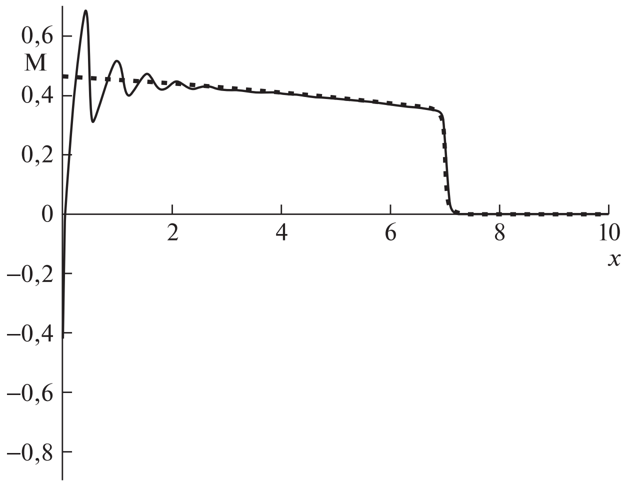

Рис. 4. Сплошная линия — решение (18), точки — его $\tilde{u}_2$ приближение, $t = 20$.

- для сферических

$$(17)\quad \tilde{u}_3 = \frac{1}{2}\left[1 - \operatorname{th}\left(\frac{V}{\varepsilon^2}(x - Vt)\right)\right] \cdot V\sqrt{\mathrm{e}}\exp\left(\operatorname{LambertW}\left(-\frac{x}{2Vt\sqrt{\mathrm{e}}}\right)\right).$$

Эта конструкция дает приближение с поразительной точностью, см. рис. 4, который соответствует цилиндрической задаче Бюргерса.

$$(18)\qquad \varepsilon = 0{,}1, \quad u(0,t) = \sin 10t, \quad u(10,t) = 0, \quad u(x,0) = 0.$$

Более того, очевидно, что графики $\tilde{u}_2$, $\tilde{u}_3$ аккуратно представляют медианные линии приближенных решений на всем их диапазоне. Напомним, что эти медианы можно вычислить независимо с помощью правой части (10).

Теперь оценим площадь трапеций под графиками $\tilde{u}_2$, $\tilde{u}_3$:

- для цилиндрического уравнения

$$\int\limits_0^{Vt}\left[\frac{\left[1 - \operatorname{th}\left(\frac{V}{\varepsilon^2}(x - Vt)\right)\right]}{2}\frac{1}{3}\left(2V + V\sqrt{4 - \frac{3x}{Vt}}\right)\right]dx = \frac{32}{27}V^2 t;$$

- для сферического

$$(19)\quad \int\limits_0^{Vt}\left[\frac{\left[1 - \operatorname{th}\left(\frac{V}{\varepsilon^2}(x - Vt)\right)\right]}{2}V\sqrt{\mathrm{e}}\exp\left(\operatorname{LambertW}\left(\frac{-x}{2Vt\sqrt{\mathrm{e}}}\right)\right)\right]dx = \\ = \frac{V^2 t \cdot \mathrm{e}}{2}.$$

Следовательно, среднее значение левой части (10) можно оценить следующим образом. Поскольку сигнал от $x = 0$ после затухания колебаний распространяется вправо с постоянной скоростью V и с той же постоянной амплитудой V на ударе и очень хорошо аппроксимируется подходящим гомотетическим решением, получим

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^{+\infty} u(x,T)\,dx = \frac{1}{T}\int\limits_0^{VT} u(x,T)\,dx \approx \begin{cases} \dfrac{32}{27}V^2 \text{ цилиндр;} \\ \dfrac{V^2\cdot \mathrm{e}}{2} \text{ сфера.} \end{cases} \tag{20}$$

Это среднее значение можно также оценить численно. В случае, показанном на рис. 1, непосредственная численная оценка отличается от оценки (20) на 1%. Таким образом, полученная центральная аппроксимация действительно является надежной и эффективной.

3. Пространственно двумерные модели

Приведенные выше уравнения Бюргерса и Кортвега-де Фриза–Бюргерса соответствуют простейшей модели с одной пространственной переменной. Они позволяют оценить принципиальные эффекты, но для адекватного описания волн в плоских слоях, характерных для нефтегазовых месторождений, следует использовать двумерные уравнения.

Когда вследствие сильной неоднородности параметров среды отсутствует сферическая или цилиндрическая симметрия распространения волн, ситуация становится намного сложнее. Далее дано краткое описание двух возможных подходов.

3.1. Двумерное уравнение Бюргерса

Двумерное уравнение Бюргерса представляет собой особую форму несжимаемого уравнения Навье—Стокса, не включающее давления и уравнения неразрывности. Оно является распространенным уравнением в частных производных гидродинамики и часто используется для различных физических приложений, таких как моделирование газовой динамики и ударных волн, исследование малых волн на воде, при рассмотрении модели химических реакций — диффузии и т.д.

Двумерное уравнение Бюргерса — стандартное обобщение (1) — имеет вид

$$\begin{aligned} u_t &= -uu_x - vu_y + \frac{1}{R}(u_{xx}+u_{yy}), \\ v_t &= -uv_x - vv_y + \frac{1}{R}(u_{xx}+u_{yy}). \end{aligned} \tag{21}$$

Здесь неизвестные функции u, v являются компонентами вектора скорости распространения волны и зависят от x, y, t; R — число Рейнольдса.

Начально-граничная задача на области D формулируется так:

$$u|_{\partial D} = f\,(x, y, t)\,|_{\partial D}, \quad v|_{\partial D} = g\,(x, y, t)\,|_{\partial D},$$

где f и g — известные функции. Конкретно, для задачи, моделирующей опускной вибратор, область представляет собой кольцо, а границей является пара концентрических окружностей; на меньшей окружности задается гармоническое колебание, а на внешней окружности (как и внутри) — изначально нулевые значения.

Эта модель ближе к реальным задачам, однако не учитывает вероятных неоднородностей пластов, которые превращают постоянные коэффициенты уравнений в функции пространственных переменных (или даже в динамически изменяющиеся функции). Принципиальные эффекты, возникающие в неоднородной среде, изучались в [3, 4].

3.2. Гидроакустические пучки. Самофокусировка. Уравнение Хохлова–Заболотской

Для описания распространения нелинейных волн в неоднородных относительно тонких газо/нефтеносных слоях в 7–9 используется уравнение Хохлова–Заболотской.

$$U_t(U_x - UU_t) = \frac{N}{4}\left(U_{yy} - \frac{1}{y}U_y\right). \tag{22}$$

Здесь x — координата вдоль пучка, y — поперечная координата в слое и $N \in \in [15, 17]$ — отношение нелинейной и диффракционных длин.

Для (22) ранее получены решения стационарных волн в неодномерном случае, которые, сформировавшись на каком-то расстоянии от источника, далее при распространении пучка не меняют своей характерной формы. В одномерном случае такая асимптотическая универсальность была уже отмечена для пилообразных плоских волн. Однако в отличие от слабо-разрывных пилообразных волн, для уравнения (22) существуют гладкие решения в случае взаимной компенсации дифракционной расходимости и нелинейной рефракции. Эти точные решения, описывающие характерные профили волны в пучке, могут служить основой для практической реализации явления самофокусировки.

Самофокусировка проявляется в том, что пучок под ее воздействием обладает малой пространственной расходимостью вдоль оси y, что позволяет на значительных расстояниях сохранять высокую, близкую к изначальной фокусировку энергии. Этот эффект важен для управляемого воздействия в процессе нефтедобычи.

Начально-краевая задача для уравнения Хохлова–Заболоцкой соответствует физическому требованию

$$p|_{x=0} = F(r)G(t),$$

где p — давление на поверхности $x = 0$, излучающей волну, на которой задается начальная амплитуда F колебаний, происходящих во времени по закону $G(t)$, т.е. для создания сфокусированного пучка исходный фронт полагается плоским или слабо искривленным (сферическим). При этом краевое условие ставится на границе при $x = 0$ для кругового в поперечном сечении пучка и обычно имеет вид

$$F(r) = -A \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right), \quad G(t) = \sin(\omega t),$$

при этом $U = p/A$.

4. Возможности применения в нефтедобыче

В процессе традиционных способов добычи нефти (вытеснения нефти водой, закачиваемой через нагнетательные скважины) часть углеводородов удерживается в поровом пространстве пласта капиллярными силами и силами адгезии, поскольку в зависимости от типа смачиваемости породы нефть может образовать тонкую пленку, удерживаемую на стенках пор. Кроме того, в насыщенной пористой среде возможно образование мелкодисперсных капель углеводородов, занимающих поровое пространство и блокирующих фильтрационное течение.

Эти эффекты приводят к существенному снижению проницаемости коллектора и величины конечной нефтеотдачи пластов природных залежей. В настоящее время основным методом повышения нефтеотдачи пластов является закачка вытесняющих реагентов (воды или водных растворов активных примесей и других физико-химических воздействий) с применением гармонических волновых технологий при значительных величинах сил адгезии, капиллярных и других сил, возникающих в насыщенных пористых средах. Внешние гармонические возмущения преобразуются в насыщенной флюидами диссипативной пористой среде в пилообразные ударные волны. Они вызывают в среде акустическую кавитацию и вторичные ударные волны, образующиеся от схлопывающихся пузырьков. Вторичные ударные волны создают в свою очередь благоприятные условия для преодоления сил адгезии, капиллярных и других сил, удерживающих остатки нефти на поверхностях пор и трещин [10].

В результате применения волновых технологий в сочетании с физико-химическими и другими воздействиями может быть достигнуто увеличение конечной нефтеотдачи до 15% даже на уже истощенных месторождениях за счет извлечения остаточных запасов нефти. Это эквивалентно открытию новых крупных месторождений. При этом требуемые затраты на достижение эквивалентного объема дополнительной добычи нефти будут минимальны, поскольку на старых месторождениях основная инфраструктура уже существует и не нужно бурить и осваивать скважины, сооружать нефтегазосборные сети, дороги и другие необходимые промышленные объекты.

5. Актуальные проблемы, теоретические и вычислительные

Процесс распространения ударных пилообразных волн в жидкостях имеет ряд особенностей: при высоких температурах, плотностях и больших градиентах различных параметров происходят сильные межмолекулярные взаимодействия, возможны разрывы химических связей, фазовые превращения и т.п. В частности, это касается воды, параметры которой имеют сложные зависимости от температуры и давления. Создано много структурных моделей воды, однако не существует единой теории, которая объяснила бы все разнообразие физических свойств, образования и распространения ударных волн в воде.

Для расчета параметров на фронте ударной пилообразной волны необходимо пользоваться зависимостью между давлением и плотностью в ударном фронте. В отличие от газов для конденсированных сред, включая жидкость, получить уравнения состояния нелегко. Поэтому их определяют экспериментально и пользуются эмпирическими формулами, см. [1].

Отметим, что рисунки соответствуют процессам в однородной среде, для которой получены аналитические оценки величин скачков в разрывах. В стратифицированных средах, характерных для месторождений, модели значительно усложняются, и, по-видимому, потребуется создание эффективной и скоростной компьютерной модели.

Проблема численного решения таких уравнений состоит в том, чтобы достичь достаточной точности одновременно в разрывных областях (для ударных волн) и на относительно гладких участках. Для этого необходимо устранить дефекты классических схем, иногда приводящие к паразитным осцилляциям вблизи разрывов (отметим, впрочем, что для моделей с дисперсией похожие осцилляции имеют внутренние причины!), и нелинейным неустойчивостям на гладких участках, порождаемым значительными градиентами.

Для устранения перечисленных трудностей необходимо применять схемы, для которых: порядок точности для гладкой части не ниже второго; при этом расчет разрывов происходит без порождения фиктивных осцилляций и без введения искусственной вязкости при отсутствии дисперсии. Так, обнадеживающие результаты получены в публикации [8], где применялась конечно-разностная схема Кранка—Николсона для решения двумерных нелинейных уравнений Бюргерса и представлены расчеты двух численных примеров для иллюстрации эффективности метода.

6. Заключение

В данной статье, в отличие от [11], проведены исследования одномерных и двумерных нелинейных математических моделей процессов распространения волн в насыщенной флюидами диссипативной пористой среде. В частности, найдены явные эффективные асимптотические формулы для цилиндрических и сферических волн в моделях Кортвега-де Фриза–Бюргерса. Основные результаты касаются скорости затухания сигнала, длины пилообразного участка и энергии, переносимой слабыми разрывами. Эти параметры поддаются разрабатываемым эффективным численным оценкам и зависят от свойств насыщенной флюидами пористой среды резервуаров нефтяных месторождений.

Широкое применение волновых технологий в нефтяной промышленности началось в 80-х гг. XX в. в Центре нелинейной волновой механики и технологий [12] Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН (под руководством акад. РАН Р.Ф. Ганиева). В частности, проводились обработки пласта в призабойных зонах скважин волновыми генераторами, с целью очистки призабойной зоны от кольматационных загрязнений пор. В процессе очистки призабойных зон скважин наблюдалось увеличение дебитов не только в скважине, подвергнутой обработке, но и в окружающих ее скважинах наблюдались повышение содержания нефти и снижение обводненности. При этом неоднократно наблюдалось увеличение дебитов не только в скважине, которая подвергалась обработке, но и в окружающих ее скважинах. В этих удаленных скважинах наблюдались также повышение содержания нефти и снижение обводненности. Таким образом, была показана возможность охвата волновым воздействием систем, связанных гидродинамическим влиянием скважин.

Повышение нефтеотдачи было зафиксировано при обработке месторождений волнами, возбуждаемыми в процессе очистки призабойных зон скважин; наблюдалось увеличение дебитов не только в скважине. Повышение нефтеотдачи было зафиксировано и при обработке месторождений волнами, возбуждаемыми с применением гидроударов.

Приведенные результаты свидетельствуют, что волновые воздействия на пласт способны создать в поровом пространстве силы, значительно превышающие силы, существующие при стационарной фильтрации, что создает предпосылки для вовлечения в фильтрационный процесс вытеснения удерживаемой в застойных пластах нефти и повышения конечной нефтеотдачи пластов. В настоящее время исследование механизмов воздействия волн на смеси флюидов (нефти, воды и др.), удерживаемых в поровом пространстве, находится в начальной стадии. По существу, научные основы этого важного направления еще не созданы. Более того, недостаточно изучены волноводные свойства пластов, обусловленные их природными неоднородностями: вертикальной слоистостью и горизонтальной зональной неоднородностью, а также наличием трещин и разломов.

В дальнейших исследованиях планируется применить теорию пилообразных ударных волн к следующим задачам/целям:

1) повышению конечной нефтеотдачи при разработке неоднородных (трещиноватых и трещиновато-пористых) резервуаров месторождений углеводородов с учетом условий взаимодействия между породой и фильтрующимися флюидами;
2) сейсмическим исследованиям для выявления застойных зон, не охваченных процессами фильтрации;

3) вытеснению остаточных запасов нефти и других углеводородов (не извлекаемых традиционными методами заводнения) с применением различных комбинаций физико-химических, тепловых и волновых управляющих воздействий.

Рисунки в статье созданы при помощи пакета PDETools программы Maple.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шарфарец Б.П.* О динамике ударных волн в жидкости // Научное приборостроение. 2016. Т. 26. № 4. С. 43–55.
2. *Руденко О.В.* Нелинейная пилообразные волны // УМН. 1995. Т. 165. № 9. С. 1011–1036.
3. *Samokhin A.V.* Soliton Transmutations in KdV—Burgers Layered Media // J. Geometry and Physics. 148. Elsevier Publ. 2020.
4. *Samokhin A.V.* Nonlinear Waves in Layered Media: Solutions of the KdV—Burgers Equation // J. Geometry and Physics. 2018. V. 130. P. 33–39.
5. *Blacktock D.T.* On Plane, Cylindrical and Spherical Sound Waves of Finite Amplitude in Lossless Fluids // Techn. Rep. AF. 1965. V. 49 (638). General Dynamics. Rochester. N.Y.
6. *Church C.C., Crum L.A.* Physical Processes for Single Bubble Sonoluminescence // Proc. of 13 Int. Congress of Acoust. 1985. V. 4. Belgrade. P. 205.
7. *Musanov A.G., Rudenko O.V., Sapozhnikov O.A.* Advances of Nonlinear Acoustics. Singapore: World Scientific, 1993. P. 321.
8. *Srivastava V.K., Tamsir M, Bhardwaj U., Sanyasiraju Y.V.S.S.* Crank-Nicolson Scheme for Numerical Solutions of Two-dimensional Coupled Burgers' Equations // Int. J. of Scientific & Engineering Research. 2011. V. 2. No. 5. P. 1–7.
9. *Шарфарец Б.П.* О волноводном распространении звуковых пучков в нелинейной среде. Обзор. // Научное приборостроение. 2016. Т. 26. № 3. С. 95–107.
10. *Сиротюк М.Г.* Акустическая кавитация. М.: Наука, 2008.
11. *Ганиев Р.Ф., Украинский Л.Е.* Нелинейная волновая механика и технология. М.: R&C Dynamics, 2011.
12. *Ганиев Р.Ф., Украинский Л.Е.* Резонансная макро- и микромеханика нефтяного пласта. Интенсификация добычи нефти и повышение самоотдачи. Наука и практика. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2014.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галяевым.

Поступила в редакцию 14.07.2021

После доработки 19.09.2021

Принята к публикации 26.01.2022