

© 2022 г. И.Б. ЯДЫКИН, д-р техн. наук (Jad@ipu.ru),
И.А. ГАЛЯЕВ (ivan.galyaev@yandex.ru),
Ю.А. ВЕРШИНИН, д-р техн. наук (oo295og@mail.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

О РЕШЕНИИ ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕПРЕРЫВНЫХ БИЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ¹

Разработан метод и получены алгоритмы решения обобщенного уравнения Ляпунова для широкого класса непрерывных нестационарных билинейных систем на основе метода грамианов и итеративного метода построения решения, предложенного ранее для таких уравнений. Предложенный подход заключается в диагонализации исходной системы, получении сепарабельного спектрального разложения грамиана стационарной линейной части по комбинационному спектру матрицы динамики линейной части, применении на каждом шаге итерации спектрального разложения матрицы ядра решения на предыдущем шаге и последующего агрегирования элементов матриц. Получено спектральное разложение грамианов управляемости и наблюдаемости нестационарной билинейной системы в виде суммы матриц субграмианов, соответствующих парным комбинациям собственных чисел матрицы динамики линейной части. Разработаны новый метод и алгоритм поэлементного вычисления матриц решения обобщенного уравнения Ляпунова для билинейных систем. Принципиальная новизна подхода состоит в переносе вычислений с матрицы решения на вычисление последовательности ее элементов на каждом шаге итерации.

Ключевые слова: спектральные разложения, обобщенное уравнение Ляпунова, билинейные системы, нестационарные системы, итеративные алгоритмы, матричные уравнения Вольтерра.

DOI: 10.31857/S0005231022050026, EDN: ABGUUO

1. Введение

Исследования в области нелинейных и “слабо нелинейных” систем управления, описываемых рядами Вольтерра, насчитывают больше полувека [1–10]. Матричное непрерывное дифференциальное и алгебраическое уравнение Ляпунова играет важную роль в современной теории управления [1, 3–10]. Первые спектральные разложения грамианов для линейных непрерывных систем с простым спектром были получены на основе спектрального

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-19-00673).

разложения интегрального представления решения уравнений Ляпунова или Сильвестра [1]. В публикациях [5–6] получены аналитические решения дискретных и непрерывных уравнений Ляпунова на основе приведения матрицы динамики к форме Жордана. В [11–13] разработана теория реализации и исследованы структурные разложения грамианов для матриц динамики линейных систем с простым спектром, исследованы свойства грамианов билинейных систем, получены явные представления грамиана билинейной системы в виде ряда Вольтерра и исследованы условия его сходимости [14–16]. Интерес к этим исследованиям стимулировался тем, что появилось их достаточно полное описание на основе частотных методов, основанных на обобщении преобразования Лапласа на функции многих переменных в форме многомерного преобразования Лапласа [17–19]. В [18] было предложено использовать многомерное преобразование Лапласа для построения решения в нелинейных системах с гладкими нелинейностями, к которым относятся и билинейные системы. В [20] был предложен метод итеративного вычисления многомерной передаточной функции, в которой на каждой итерации решается уравнение Ляпунова для линейной подсистемы с изменяющейся матрицей правой части, в качестве которой используется решение уравнения, полученное на предыдущей итерации.

Исследования в области билинейных систем тесно связаны с задачей понижения порядка модели путем построения аппроксимирующей модели меньшей размерности. Даже в случае линейных систем большой размерности применение проекционных методов позволяет существенно уменьшить размерность аппроксимирующей модели [10, 13, 20]. Среди этих методов отметим сбалансированное отсечение, сингулярную декомпозицию, метод подпространств Крылова, методы синтеза упрощенной модели, оптимальные по критерию H_2 -нормы грамианов, а также гибридные методы. Для большинства методов разработаны итеративные алгоритмы их реализации. Введены определения квадрата H_2 -нормы грамианов билинейной системы, получены их спектральные разложения на спектрах линейной подсистемы и сопряженной антиустойчивой подсистемы [10, 21]. Получены решения обобщенных уравнений Ляпунова с применением произведений Кронекера и метода векторизации. Введены энергетические функционалы и выявлены условия существования и единственности решения обобщенных уравнений Ляпунова. Получены формулы для вычисления решения с применением метода произведений Кронекера и метода векторизации [13, 20, 21]. Билинейные системы являются частным случаем систем координатно-параметрического управления, исследованию которых посвящена монография [16]. Работы в области исследования грамианов билинейных систем тесно связаны с анализом их структурных свойств управляемости и наблюдаемости [8, 14, 20]. Последние публикации по решению дифференциальных и алгебраических уравнений Ляпунова и Сильвестра во временной и комплексной областях и их приложения к анализу устойчивости сложных энергетических систем можно найти в [22–26].

2. Постановка задачи

Рассмотрим устойчивую непрерывную стационарную билинейную динамическую систему с многими входами и многими выходами

$$(2.1) \quad \Sigma_2 : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax(t) + \sum_{\gamma=1}^m N_{\gamma} x(t) u_{\gamma}(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$.

Определим линейную стационарную часть системы в виде

$$(2.2) \quad \Sigma_1 : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases}$$

Определим грамиан управляемости билинейной системы с помощью матричного ряда Вольтерра вида [10], а именно:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} P_1(t_1) &= e^{At_1} B, \\ P_i(t_1, \dots, t_i) &= e^{At_i} [N_1 P_{i-1} N_2 P_{i-1} \dots N_m P_{i-1}], \quad i = 2, 3, 4, \dots, \\ P &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} P_i(t_1, \dots, t_i) P_i^T(t_1, \dots, t_i) dt_1 \dots t_i. \end{aligned}$$

Для системы (2.1) можно определить обобщенное уравнение Ляпунова ОУЛ в виде

$$(2.4) \quad AP + PA^T + \sum_{j=1}^m N_j P N_j^T = -BB^T$$

или в виде

$$(2.5) \quad A^T Q + QA + \sum_{j=1}^m N_j Q N_j^T = -C^T C.$$

Ряд Вольтерра (2.3) является решением уравнения (2.4) в том случае, когда это решение существует. Матрицу решения в этом случае можно назвать грамианом управляемости билинейной системы [11–13].

Теорема 1 [21]. Если матрица динамики линейной части A устойчива, а грамиан управляемости билинейной системы является единственным решением обобщенного уравнения Ляпунова, тогда решение является матрицей, определяемой с помощью итеративной процедуры:

$$\begin{aligned}
AP_1 + P_1A^T &= -BB^T, \\
AP_i + P_iA^T + \sum_{j=1}^m N_j P_i N_j^T &= 0, \quad i = 2, 3, 4, \dots, \\
P &= P_1 + \sum_{i=2}^{\infty} P_i.
\end{aligned}
\tag{2.6}$$

Грамиан наблюдаемости билинейной системы является предельным решением, получаемым в результате реализации аналогичной итеративной процедуры.

Следуя [13], рассмотрим задачу вычисления грамиана управляемости для одного класса билинейных нестационарных систем вида

$$\Sigma_3 : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax(t) + \sum_{\gamma=1}^H A_{\gamma}x(t)f_{\gamma}(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases}
\tag{2.7}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^q$, $f_{\gamma}(t) \in \mathbb{R}^1$. Матрица динамики билинейной системы является суммой постоянной матрицы A и суммы произведений постоянных матриц A_{γ} на переменные параметры $f_{\gamma}(t)$, которые можно назвать параметрическими входами в отличие от координатных входов $u_{\gamma}(t)$. Система (2.7) может быть преобразована в систему (2.1) путем расширения вектора управления и введения новых обозначений [13]

$$\begin{aligned}
u_{\eta}^T &= [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_m \ f_1 \ \dots \ f_H], \quad B_{bl} = [B \ 0_{n \times H}], \\
N_{\eta} &= \begin{cases} 0_{n \times n}, & \eta = 1, 2, \dots, m, \\ A_{\eta}, & \eta = m + 1, m + 2, \dots, m + H; \end{cases}
\end{aligned}
\tag{2.8}$$

$$\Sigma_3 : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax(t) + \sum_{\eta=1}^{m+H} N_{\eta}x(t)u_{\eta}(t) + B_{bl}u(t), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases}
\tag{2.9}$$

Грамиан управляемости (2.2) системы (2.8) удовлетворяет расширенному уравнению Ляпунова вида (2.7) и может быть вычислен с помощью итеративной процедуры (2.6). Цель статьи — получение итеративного спектрального разложения решения обобщенного уравнения Ляпунова вида (2.7), или, что то же самое, решения матричного уравнения Вольтерра с ядрами вида интеграла свертки.

3. Сепарабельные спектральные разложения грамианов управляемости линейной части билинейной системы

В публикации [14] были получены следующие спектральные разложения грамианов линейной части билинейной системы по простому спектру матрицы A при предположениях, что матрица устойчива и все ее собственные числа различны:

$$P^l = - \sum_{r=1}^n \left[(Is_r + A^*)^{-1} Q \text{Res} \left((Is_r - A)^{-1}, s_r \right) \right].$$

Если все собственные числа s_r матрицы A различны, то линейную часть можно привести к диагональному виду с помощью невырожденного преобразования координат

$$(3.1) \quad \begin{aligned} x &= T x_d, \quad \dot{x}_d = A_d x_d + B_d u, \quad y_d = C_d x_d, \\ A_d &= T^{-1} A T, \quad B_d = T^{-1} B, \quad C_d = C T, \quad Q_d = T^{-1} B B^T T^{-T} \end{aligned}$$

или

$$A_d = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & s_2 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & s_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1^* \\ \nu_2^* \\ \vdots \\ \nu_n^* \end{bmatrix},$$

где матрица T^{-1} составлена из правых собственных векторов u_i , а матрица $T = V$ — из левых собственных векторов ν_i^* , соответствующих собственному числу s_i . Грамиан диагонализированной линейной части является решением уравнения Ляпунова вида

$$A_d P_d + P_d A_d^* = -Q_d,$$

которое определится из формулы [14]:

$$(3.2) \quad P_d^l = - \sum_{r=1}^n \left[(Is_r + A_d^*)^{-1} Q_d \text{Res} \left((Is_r - A_d)^{-1}, s_r \right) \right].$$

Грамиан управляемости P_d^{cl} связан с грамианом P^{cl} соотношением вида [23, 24]

$$(3.3) \quad P^{cl} = T P_d^{cl} T^T.$$

Грамиан наблюдаемости P_d^{ol} связан с грамианом P^{ol} аналогичным соотношением

$$(3.4) \quad P^{ol} = T^{-T} P_d^{ol} T^{-1}.$$

Заметим, что в диагонализированной линейной части матрица Q_d зависит не только от матрицы B , как в исходной системе, но и от собственных чисел матрицы A . Произведение первых двух сомножителей в (3.1) образует матрицу вида

$$\begin{aligned}
& -(Is_r + A_d^*)^{-1}Q_d = \\
& = - \begin{bmatrix} (s_1^* + s_r)^{-1}q_{d11} & (s_1^* + s_r)^{-1}q_{d12} & \vdots & (s_1^* + s_r)^{-1}q_{d1n} \\ (s_2^* + s_r)^{-1}q_{d21} & (s_2^* + s_r)^{-1}q_{d22} & \vdots & (s_2^* + s_r)^{-1}q_{d2n} \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ (s_n^* + s_r)^{-1}q_{dn1} & (s_n^* + s_r)^{-1}q_{dn2} & \vdots & (s_n^* + s_r)^{-1}q_{dnn} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Введем новое обозначение $\mathbf{1}_{ij}$ для матрицы, все элементы которой равны нулю за исключением элемента “ ij ”, который равен единице. Для диагональной матрицы A справедливы соотношения

$$\begin{aligned}
(Is - A)^{-1} &= \sum_{i=1}^n R_i(s - s_i)^{-1} = \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{ii}(s - s_i)^{-1} \text{Res} \left[\left((Is - A)^{-1}, s_i \right) \right].
\end{aligned}$$

Заметим, что матрица R_i обладает замечательным свойством: умножение любой квадратной матрицы на нее справа вырезает из первой i -й столбец, а умножение этой матрицы на нее слева вырезает из первой i -ю строку. При этом все пустые места заполняются нулями. Применим это свойство при умножении матрицы $(Is_r + A_d^*)^{-1}Q_d$ на матрицу $\mathbf{1}_{ii}$ справа. Введем обозначение

$$\left[p_r^l \right]_0 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & (s_1^* + s_r)^{-1}q_{d1i} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & (s_2^* + s_r)^{-1}q_{d2i} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & (s_n^* + s_r)^{-1}q_{dni} & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Это позволяет записать формулу решения в компактном виде

$$(3.5) \quad P_d^l = \left[p_1^l \right]_0 + \left[p_2^l \right]_0 + \dots + \left[p_n^l \right]_0.$$

Назовем разложение вида (3.2) *сепарабельным* спектральным разложением грамиана линейной части билинейной системы в виде суммы субграмианов, соответствующих разложению грамиана управляемости линейной части по простому спектру матрицы динамики. Для практических приложений использование спектральных разложений означает возможность вычислять отдельные субграмианы доминантных мод, не вычисляя весь грамиан. Кроме

того, видно, что каждый элемент вектора p_r^l субграмиана обратно пропорционален комбинации собственного числа “ r ” матрицы динамики с другими ее собственными числами. Это наблюдение позволяет предположить, что парные комбинации собственных чисел играют важную роль в формировании сепарабельного разложения грамиана. Рассмотрим спектральное разложение грамиана линейной части билинейной системы по парному комбинационному спектру матрицы A . В соответствии с [14] оно имеет вид [27]:

$$(3.6) \quad P_d^l = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_{dij}^l,$$

$$P_{dij}^l = -(s_i + s_j)^{-1} \left(\text{Res} \left((Is_i - A_d)^{-1} \right), s_i \right) Q_d \text{Res} \left((Is_j - A_d)^{-1}, s_j \right).$$

Формулу (3.6) можно переписать в виде [9]

$$(3.7) \quad P_{dij}^l = -(s_i + s_j)^{-1} \mathbf{1}_{ii} Q_d \mathbf{1}_{jj}.$$

Эта простая и компактная формула сводит вычисление матрицы комбинационного субграмиана линейной части к вычислению последовательности элементов. Она проще формулы (3.2) вычисления матрицы субграмиана разложения по простому спектру. Получено *сепарабельное* спектральное разложение грамианов линейной части билинейной системы в виде суммы n^2 субграмианов, соответствующих разложению грамиана управляемости по парному комбинационному спектру матрицы динамики.

4. Сепарабельные спектральные разложения грамианов билинейных нестационарных систем

Перейдем к рассмотрению спектральных разложений грамиана билинейной системы, считая выполненным преобразование линейной части к диагональному виду. На каждом шаге итераций в (2.5) происходит решение обычного матричного уравнения Ляпунова. Левая часть уравнения совпадает с левой частью такого же уравнения линейной части, а правая часть $\sum_{\gamma=1}^H A_{\gamma} P^{bl(k)} A_{\gamma}^T$ меняется на каждом шаге. Применим к матрице $P^{bl(k)}$ спектральное разложение по парному комбинационному спектру матрицы динамики. Без ограничения общности предположим, что правая часть (2.5) принята равной единственному слагаемому $A_{\gamma} P^{bl(k)} A_{\gamma}^T$:

$$P_{dij}^{bl(k)} = -(s_i + s_j)^{-1} \mathbf{1}_{ii} P_{dij}^{bl(k-1)} \mathbf{1}_{jj},$$

$$P_{dij}^{bl(k)} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -(s_i + s_j)^{-1} P_{dij}^{bl(k-1)} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим формирование матричного произведения $A_\gamma P_{dij}^{bl(k)} A_\gamma^T$. При умножении матрицы A_γ на матрицу $\mathbf{1}_{ij}$ справа получим матрицу, все элементы которой кроме столбца “ j ” равны нулю, а столбец “ j ” имеет вид

$$[e_i (A_\gamma \mathbf{1}_{ij})]^T = \begin{bmatrix} a_{\gamma 1i} & a_{\gamma 2i} & \dots & a_{\gamma ni} \end{bmatrix}.$$

При этом элемент “ ν ” столбца равен $a_{\gamma \nu i}$. Этот элемент войдет в произведение, стоящее на месте “ $\nu\mu$ ” произведения матриц $A_\gamma \mathbf{1}_{ij} A_\gamma^T$. При умножении матрицы $\mathbf{1}_{ij}$ на матрицу A_γ^T справа получим матрицу, все элементы которой кроме строки “ i ” равны нулю, а строка “ i ” имеет вид

$$\left[\left(\mathbf{1}_{ij} A_\gamma^T \right) e_j^T \right] = \begin{bmatrix} a_{\gamma 1j} & a_{\gamma 2j} & \dots & a_{\gamma nj} \end{bmatrix}.$$

При этом элемент “ μ ” строки равен $a_{\gamma \mu j}$. Этот элемент войдет в произведение, стоящее на месте “ $\nu\mu$ ” произведения матриц $A_\gamma \mathbf{1}_{ij} A_\gamma^T$. Отсюда следует, что

$$(4.1) \quad A_\gamma \mathbf{1}_{ij} A_\gamma^T p_d^{bl(k-1)ij} = [\alpha_{\nu\mu}], \quad \alpha_{\nu\mu} = a_{\gamma \nu i} a_{\gamma \mu j} p_d^{bl(k-1)ij}.$$

Запишем решение уравнения (2.5) для каждого шага итерации с учетом формулы (3.4), в которой матрицу Q_d следует заменить матрицей $P_{dij}^{bl(k)}$

$$(4.2) \quad P_d^{bl(k)ij} = \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^n - (s_\nu + s_\mu)^{-1} \mathbf{1}_{\nu\mu} a_{\gamma \nu i} a_{\gamma \mu j} p_d^{bl(k-1)ij},$$

$$k = 2, 3, \dots, \infty.$$

Теорема 2 [11, 20]. Рассмотрим ММО (multiple input multiple output) непрерывную билинейную стационарную систему вида (2.7). Пусть матрица A – гурвицева, имеет простой спектр, а пара (A, B) управляема. Рассмотрим обобщенное уравнение Ляпунова вида

$$AP^{cbln} + P^{cbln} A^T + \sum_{\gamma=1}^H A_\gamma P^{cbln} A_\gamma^T = -BB^T.$$

Преобразуем это уравнение и уравнение линейной части в диагонализированную каноническую форму (3.1). Предположим, что матрица A устойчива, имеет простой спектр. Пусть справедливы неравенства

$$(4.3) \quad n^2 \max_{\nu, \mu} \left| (s_\nu + s_\mu)^{-1} \right| \max_{\nu, \mu, i, j, \gamma} |a_{d\gamma, \nu i} a_{d\gamma, \mu j}| < 1$$

$$\forall \nu, \mu, i, j = 1, 2, \dots, n; \forall \gamma = 1, 2, \dots, H.$$

Тогда решение обобщенного уравнения Ляпунова (2.4) существует и единственно. Элементы матрицы решения могут быть определены с помощью

итеративной процедуры вида:

$$\begin{aligned}
P_d^c &= P_d^{cln} + P_d^{cbln}, \\
P_d^{cln(1)} &= - \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^n \frac{q_{d,\gamma\nu\mu}}{s_\nu + s_\mu} \mathbf{1}_{\nu\mu} \quad \forall \nu, \mu = 1, 2, \dots, n, \\
P_d^{cbln(k)ij\gamma} &= \sum_{\nu,\mu} r^{(k)ij\gamma} p_{d\nu\mu}^{cbln(k-1)ij\gamma} \mathbf{1}_{\nu\mu}, \quad r^{(k)ij\gamma} = - \left[(s_\nu + s_\mu)^{-1} a_{d\gamma,\nu i} a_{d\gamma,\mu j} \right], \\
k &= 2, 3, \dots, \infty \quad \forall \nu, \mu, i, j = 1, 2, \dots, n; \gamma = 1, 2, \dots, H, \\
p_d^{cbln(k)ij\gamma} &= - \left(\sum_{\nu,\mu} p_{d\nu\mu}^{cbln(k-1)ij\gamma} \right) \left[(s_\nu + s_\mu)^{-1} a_{d\gamma,\nu i} a_{d\gamma,\mu j} \right], \\
\left(\sum_{\nu,\mu} p_{d\nu\mu}^{cbln(k-1)ij\gamma} \right) &= p_d^{cbln(k-1)ij\gamma}.
\end{aligned}$$

Исходный грамиан управляемости P^{cbln} билинейной системы связан с матрицей P_d^{cbln} уравнением (3.3):

$$P^{cbln} = T P_d^{cbln} T^T.$$

Доказательство теоремы 2. В соответствии с теоремой построение матрицы решения сводится к построению последовательности элементов “ ij ” и последующему агрегированию элементов в единую матрицу. Все отдельные последовательности в общем случае являются комплекснозначными. Для доказательства сходимости последовательности частичных сумм применим признак сравнения и построим мажорирующую последовательность из модулей членов последовательностей. Для каждого шага “ k ” и каждой матрицы A_γ имеют место итеративные соотношения (4.2). Построим ряд сравнения для элементов субграмиана “ $ij\gamma$ ” для шага “ k ”. Из формул (4.2) следует, что каждый элемент последовательности представляет собой взвешенную сумму всех ее элементов на предыдущем шаге.

Первый шаг. Рассмотрим формирование правой части обобщенного уравнения Ляпунова на первом шаге для случая $\gamma = 1$. Для этого потребуется не сама матрица решения уравнения Ляпунова линейной части, а сепарабельное спектральное разложение этого решения по парному спектру матрицы

$$P_d^{cln(1)} = - \sum_{\gamma=1}^H \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^n \frac{q_{d,\gamma\nu\mu}}{s_\nu + s_\mu} \mathbf{1}_{\nu\mu},$$

где $q_{d,\gamma\nu\mu}$ – элемент “ $\nu\mu\gamma$ ” матрицы Q_d .

Второй шаг. Рассмотрим формирование правой части обобщенного уравнения Ляпунова на втором шаге на примере матрицы $A_\gamma \mathbf{1}_{ij} A_\gamma^T$. Выше было

доказано (4.1), что

$$A_\gamma \mathbf{1}_{ij} A_\gamma^\top = [\alpha_{d\gamma, \nu\mu}]_{(n \times n)},$$

$$[\alpha_{d\gamma, \nu\mu}]_{(n \times n)} = \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^n a_{d\gamma, \nu i} a_{d\gamma, \mu j} \mathbf{1}_{\nu\mu}.$$

В соответствии с формулой (3.6) решение уравнения Ляпунова на 2-м шаге принимает вид

$$(4.4) \quad P_d^{cbln(2)ij} = - \sum_{\gamma=1}^H \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^n \frac{p_d^{cbln(1)ij}}{s_\nu + s_\mu} (a_{d\gamma, \nu i} a_{d\gamma, \mu j}) \mathbf{1}_{\nu\mu}.$$

Формула (4.4) выражает сепарабельное спектральное разложение ядра Вольterra 2-го порядка на шаге 2. Для фиксированного элемента “ ij ” матрицы $P_d^{cbln(2)ij}$ получаем формулу

$$(4.5) \quad p_d^{cbln(2)ij} = - \sum_{\gamma=1}^H \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^n \frac{p_d^{cbln(1)ij}}{s_\nu + s_\mu} (a_{d\gamma, \nu i} a_{d\gamma, \mu j}).$$

“ k ”-й шаг. Поступая аналогичным образом и учитывая суммирование субграмианов по индексу “ γ ”, получим формулу для вычисления матрицы ядра грамиана порядка “ k ” на шаге “ k ”:

$$(4.6) \quad P_d^{cbln(k)ij\gamma} = \sum_{\nu, \mu} r^{(k)ij\gamma} p_{d\nu\mu}^{cbln(k-1)ij\gamma} \mathbf{1}_{\nu\mu},$$

$$r^{(k)ij\gamma} = - \left[(s_\nu + s_\mu)^{-1} a_{d\gamma, \nu i} a_{d\gamma, \mu j} \right],$$

$$k = 2, 3, \dots, \infty \quad \forall \nu, \mu, i, j = 1, 2, \dots, n; \gamma = 1, 2, \dots, H,$$

$$(4.7) \quad p_d^{cbln(k)ij\gamma} = - \left(\sum_{\nu, \mu} p_{d\nu\mu}^{cbln(k-1)ij\gamma} \right) \left[(s_\nu + s_\mu)^{-1} a_{d\gamma, \nu i} a_{d\gamma, \mu j} \right],$$

$$\left(\sum_{\nu, \mu} p_{d\nu\mu}^{cbln(k-1)ij\gamma} \right) = p_d^{(k-1)ij\gamma},$$

$$k = 2, 3, \dots, \infty \quad \forall \nu, \mu, i, j = 1, 2, \dots, n; \gamma = 1, 2, \dots, H.$$

Формула (4.7) выражает алгоритм поэлементного вычисления матрицы грамиана билинейной системы. На каждом шаге алгоритм дает возможность вычислить матрицу ядра грамиана порядка “ k ”. Анализ формулы (4.7) позволяет разбить множество элементов матрицы субграмиана $p_{d\gamma\nu\mu}^{cbln(k-1)\nu\mu}$ на три подмножества:

подмножество ведущих элементов: $\frac{a_{d\gamma, \nu\nu} a_{d\gamma, \mu\mu}}{s_\nu + s_\mu} p_{d\gamma\nu\mu}^{cbln(k-1)\nu\mu}$, $k = 2, 3, \dots, \infty$,

подмножество ведомых элементов: $\frac{a_{d\gamma,\nu i} a_{d\gamma,\mu j}}{s_\nu + s_\mu} p_{d\nu\mu}^{cbln(k-1)ij}$, $\nu \neq i$, $\mu \neq j$,
 $k = 2, 3, \dots, \infty$,

подмножество элементов: $p_{d\gamma\nu\mu}^{cbln(k-1)\nu\mu} = 0$.

Справедливы тождества вида

$$P_{\nu\mu\gamma}^{cbln(k)ij} = \left(\frac{(s_i + s_j)}{(s_\nu + s_\mu)} \right) \left(\frac{a_{\nu i\gamma}}{a_{ii\gamma}} \right) \left(\frac{a_{\mu j\gamma}}{a_{jj\gamma}} \right) P_{\gamma}^{cbln(k)ij},$$

$$a_{ii\gamma} \neq 0, \quad a_{jj\gamma} \neq 0,$$

которые определяют связь ведущих и ведомых элементов. Для ведущих элементов справедливы формулы:

$$(4.8) \quad p_d^{(k)ij\gamma} = -p_d^{(k-1)ij\gamma} \left[(s_i + s_j)^{-1} a_{d\gamma,ii} a_{d\gamma,jj} \right],$$

$$k = 2, 3, \dots, \infty; \quad \forall \nu, \mu, i, j = 1, 2, \dots, n; \gamma = 1, 2, \dots, H.$$

Отсюда следует, что “ $ij\gamma$ ” ведущие элементы образуют геометрические прогрессии с начальными членами $p_d^{cbln(1)ij\gamma}$ и знаменателями $\left[(s_i + s_j)^{-1} a_{d\gamma,ii} a_{d\gamma,jj} \right]$. В [20] доказано, что итеративный алгоритм решения обобщенного уравнения Ляпунова гарантирует существование и единственность матрицы решения при сходимости последовательности ядер Вольтерра. Если линейная часть устойчива и все собственные числа ее матрицы динамики различны, то на каждом шаге алгоритм (4.6) гарантирует существование и единственность решения. Очевидно, что необходимым и достаточным условием сходимости матриц решения является поэлементная сходимость матриц, что обеспечивают алгоритмы (4.6)–(4.7), сходимость которых неочевидна. Покажем, что при выполнении условий теоремы 2 сходимость последовательностей (4.6)–(4.7) является абсолютной и равномерной.

Для каждого шага “ k ” и каждой матрицы A_γ имеют место итеративные соотношения (4.6)–(4.7). Построим ряд сравнения для элементов субграмиана “ $ij\gamma$ ” для шага “ k ”. Из формул (4.6)–(4.7) следует, что каждый элемент последовательности представляет собой взвешенную сумму всех ведущих элементов на предыдущем шаге. Из формулы (4.5) для шага 2 получаем неравенство

$$(4.9) \quad \left| p_{dij\gamma}^{cbln(2)} \right| \leq n^2 \left| p_{dij\gamma}^{cbln(1)} \right| \max_{\nu,\mu} \left| (s_\nu + s_\mu)^{-1} \right| \max_{\nu,\mu} |a_{d\gamma,\nu i} a_{d\gamma,\mu j}|,$$

которое дает оценку модуля члена последовательности “ $ij\gamma$ ” для шага 2. Введем обозначение

$$\max_{i,j} \left| p_{dij\gamma}^{cbln(1)} \right| = M_{\max}.$$

Тогда неравенство (4.9) приобретает вид

$$\left| p_{dij\gamma}^{cbln(2)} \right| \leq n^2 M_{\max} \max_{\nu,\mu} \left| (s_\nu + s_\mu)^{-1} \right| \max_{\nu,\mu} |a_{d\gamma,\nu i} a_{d\gamma,\mu j}| \quad \forall \gamma, i, j, \nu, \mu.$$

Проводя аналогичные преобразования для той же числовой последовательности на шаге “ k ”, получим неравенство

$$\begin{aligned} \left| p_{dij\gamma}^{cbln(k)} \right| &\leq \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^n \left| p_{d\nu\mu\gamma}^{cbln(k-1)} \right| \max_{\nu,\mu} \left| (s_\nu + s_\mu)^{-1} \right| \max_{\nu,\mu} |a_{d\gamma,\nu i} a_{d\gamma,\mu j}| \leq \\ &\leq n^2 \left| p_{d\nu\mu\gamma}^{cbln(k-1)} \right| \max_{\nu,\mu} \left| (s_\nu + s_\mu)^{-1} \right| \max_{\nu,\mu} |a_{d\gamma,\nu i} a_{d\gamma,\mu j}|. \end{aligned}$$

Отсюда следует оценка

$$(4.10) \quad \frac{\left| p_{dij\gamma}^{cbln(k)} \right|}{\left| p_{dij\gamma}^{cbln(k-1)} \right|} \leq n^2 \max_{\nu,\mu} \left| (s_\nu + s_\mu)^{-1} \right| \max_{\nu,\mu} |a_{d\gamma,\nu i} a_{d\gamma,\mu j}|.$$

Полученные неравенства позволяют сформировать $M_{ij\gamma}$ локальных и одну M глобальную мажоранты:

$$\begin{aligned} M_{ij\gamma}^{(k)} : M_{ij\gamma}^{(1)} &= \left| p_{dij\gamma}^{cbln(1)} \right|, M_{ij\gamma}^{(2)} = \left| p_{dij\gamma}^{cbln(2)} \right|, \dots, M_{ij\gamma}^{(k)} = \left| p_{dij\gamma}^{cbln(k)} \right|, \\ M^{(k)} : M^{(1)} &= M_{\max}, M^{(2)} = \max_{i,j,\gamma} \left| p_{dij\gamma}^{cbln(2)} \right|, \dots, M^{(k)} = \max_{i,j,\gamma} \left| p_{dij\gamma}^{cbln(k)} \right|. \end{aligned}$$

В соответствии с оценкой (4.10) локальные $M_{ij\gamma}$ мажоранты сходятся при выполнении условий

$$(4.11) \quad \begin{aligned} n^2 \max_{\nu,\mu} \left| (s_\nu + s_\mu)^{-1} \right| \max_{\nu,\mu} |a_{d\gamma,\nu i} a_{d\gamma,\mu j}| &< 1 \\ \forall \nu, \mu = 1, 2, \dots, n; \forall \gamma = 1, 2, \dots, H. \end{aligned}$$

Глобальная мажоранта $M^{(k)}$ сходится, если выполнено условие

$$(4.12) \quad \begin{aligned} n^2 \max_{\nu,\mu} \left| (s_\nu + s_\mu)^{-1} \right| \max_{\nu,\mu,i,j,\gamma} |a_{d\gamma,\nu i} a_{d\gamma,\mu j}| &< 1 \\ \forall \nu, \mu, i, j = 1, 2, \dots, n; \forall \gamma = 1, 2, \dots, H. \end{aligned}$$

Поскольку линейная часть устойчива, то существует точная верхняя грань для обратной величины модулей суммы любых собственных чисел ее матрицы, равная

$$\max_{\nu,\mu} \left| (s_\nu + s_\mu)^{-1} \right|.$$

Для любых элементов матриц A_γ существует точная верхняя грань произведений модулей ее элементов, равная

$$\max_{\nu,\mu} |a_{d\gamma,\nu i} a_{d\gamma,\mu j}|.$$

Следовательно, при выполнении условий теоремы 2 выполняются неравенства (4.3) и признаки сходимости рядов с положительными членами. Следовательно, комплекснозначные последовательности (4.6)–(4.7) сходятся равномерно и абсолютно по признаку Вейерштрасса. Теорема 2 доказана.

Если выполнено хотя бы одно из условий

$$\exists i, j, \gamma : |q_{ij\gamma}| \geq 1,$$

то матричный ряд Вольтерра (2.3) расходится и обобщенное уравнение Ляпунова не имеет решения.

Теорема 3 [11, 20]. Рассмотрим ММО непрерывную билинейную стационарную систему (2.7). Пусть матрица A – гурвицева, имеет простой спектр, а пара (A, C) наблюдаема. Рассмотрим обобщенное уравнение Ляпунова вида

$$A^T P^{obl n} + P^{obl n} A + \sum_{\gamma=1}^H A_{\gamma} P^{obl n} A_{\gamma}^T = -C^T C.$$

Преобразуем это уравнение и уравнение линейной части в диагонализированную каноническую форму (3.1). Предположим, что матрица A устойчива, имеет простой спектр. Пусть справедливы неравенства

$$(4.13) \quad n^2 \max_{\nu, \mu} \left| (s_{\nu} + s_{\mu})^{-1} \right| \max_{\nu, \mu, i, j, \gamma} |a_{d\gamma, \nu i} a_{d\gamma, \mu j}| < 1$$

$$\forall \nu, \mu, i, j = 1, 2, \dots, n; \forall \gamma = 1, 2, \dots, H.$$

Тогда решение обобщенного уравнения Ляпунова (2.5) существует и единственно. Элементы матрицы решения могут быть определены с помощью итеративной процедуры вида:

$$(4.14) \quad \begin{aligned} P_d^o &= P_d^{oln} + P_d^{obl n}, \\ P_d^{oln(1)} &= - \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^n \frac{q_{d, \gamma \nu \mu}}{s_{\nu} + s_{\mu}} \mathbf{1}_{\nu \mu} \quad \forall \nu, \mu = 1, 2, \dots, n, \\ P_d^{obl n(k)ij\gamma} &= \sum_{\nu, \mu} r^{(k)ij\gamma} p_{d\nu\mu}^{obl n(k-1)ij\gamma} \mathbf{1}_{\nu \mu}, \\ r^{(k)ij\gamma} &= - \left[(s_{\nu} + s_{\mu})^{-1} a_{d\gamma, \nu i} a_{d\gamma, \mu j} \right], \\ k &= 2, 3, \dots, \infty \quad \forall \nu, \mu, i, j = 1, 2, \dots, n; \gamma = 1, 2, \dots, H, \end{aligned}$$

$$(4.15) \quad \begin{aligned} p_d^{obl n(k)ij\gamma} &= - \left(\sum_{\nu, \mu} p_{d\nu\mu}^{obl n(k-1)ij\gamma} \right) \left[(s_{\nu} + s_{\mu})^{-1} a_{d\gamma, \nu i} a_{d\gamma, \mu j} \right], \\ \left(\sum_{\nu, \mu} p_{d\nu\mu}^{obl n(k-1)ij\gamma} \right) &= p_d^{obl n(k-1)ij\gamma}. \end{aligned}$$

Исходный грамиан наблюдаемости $P_d^{obl n}$ билинейной системы связан с матрицей $P_d^{obl n}$ уравнением (3.4)

$$P^{obl n} = T^{-T} P_d^{obl n} T^{-1}.$$

Доказательство теоремы 3 почти полностью повторяет доказательство теоремы 2, поэтому из-за ограниченности объема статьи не приводится.

5. Достаточные условия ВІВО устойчивости билинейных нестационарных систем

Лемма 1 (следствия теорем 2 и 3). Пусть выполнены условия теоремы 2 и 3 и выполнены условия [11–13, 20]:

1. Вектор $u(t)$ ограничен по норме

$$\|u(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m |u_i(t)|^2} < M_u, \quad M_u > 0;$$

2. Найдутся такие положительные числа α, β , что справедливо неравенство

$$(5.1) \quad \|e^{At}\| \leq \beta e^{-\alpha t};$$

3. Если кроме того выполнены неравенства

$$(5.2) \quad \Gamma < \frac{\sqrt{2\alpha}}{\beta}, \quad \Gamma = \sqrt{\left\| \sum_{\gamma=1}^m A_{\gamma} A_{\gamma}^T \right\|};$$

4. Если либо пара (A, B) управляема, либо пара (A, C) наблюдаема.

Тогда нестационарная билинейная система (2.7) ВІВО (bounded-input bounded-output) устойчива при выполнении условий (4.3). Грамианы управляемости и наблюдаемости существуют и единственны, определяются формулами (4.6)–(4.7), (4.14)–(4.15) и являются положительно определенными матрицами.

Доказательство леммы 1. Утверждения следствий для обобщенных уравнений Ляпунова, заданных в векторно-матричной форме (2.7), доказаны в [10–13, 20, 21]. Осталось доказать, что на каждом шаге итераций сепарабельные алгоритмы теорем 2 и 3 дают решение, совпадающее с итеративной процедурой (2.6).

Первый шаг. Решение обычного уравнения Ляпунова для линейной части на основе предлагаемых сепарабельных спектральных алгоритмов предложено и доказано в [9]. В силу условий теорем это решение единственно и не может отличаться от решений уравнений (2.7) на первом шаге.

“ k ”-й шаг. Решение обычного уравнения Ляпунова с измененной правой частью остается единственным вследствие устойчивости и простого спектра матрицы A_d , а также симметричности правой части уравнения на шаге “ k ”. Это дает возможность применить сепарабельный алгоритм [9] и доказать тождество (4.2) между элементами (ij) матрицы решения на шагах “ k ” и “ $k - 1$ ”, что является основой алгоритма поэлементного вычисления матрицы решения уравнения Ляпунова с измененной правой частью. Алгоритм агрегирования самих матриц решения на каждом шаге доказан в [20]. Лемма доказана.

Как известно [1], необходимые и достаточные условия устойчивости линейных систем в терминах ограниченности квадрата H_2 -нормы ее передаточной функции $\mathbf{G}(s)$ имеют вид

$$(5.3) \quad \|\mathbf{G}(s)\|_2^2 = \text{tr}(C P^c C^T) = \text{tr}(B^T P^o B) < +\infty.$$

Таким же образом определим функционал риска потери устойчивости билинейной системы в форме

$$(5.4) \quad J(s_1, s_2, \dots, s_n) = \text{tr}(C P^{cbln} C^T) = \text{tr}(B^T P^{obl n} B).$$

Если корни характеристического уравнения приближаются к мнимой оси, функционал риска потери устойчивости (5.4) стремится к бесконечности. Определим приемлемый функционал риска потери устойчивости билинейной системы в виде

$$(5.5) \quad J^{(\gamma)}(s_1, s_2, \dots, s_n, \gamma) = M_{\gamma perm}, \quad \gamma = 1, 2, \dots, m.$$

Будем считать систему как *условно неустойчивую*, если все корни ее характеристического уравнения линейной части лежат в левой полуплоскости, но функционал риска потери устойчивости (5.4) превышает установленное приемлемое значение. Подобным образом будем считать данную систему *условно устойчивой*, если функционал риска потери устойчивости (5.4) не превышает установленного приемлемого значения

$$(5.6) \quad J^{(\gamma)}(s_1, s_2, \dots, s_n, \gamma) < M_{\gamma perm}, \quad \gamma = 1, 2, \dots, m.$$

Подстановка в формулы (5.3)–(5.4) спектральных разложений соответствующих грамианов дает спектральные разложения соответствующих энергетических функционалов. Неравенства (5.6) определяют набор энергетических функционалов, ограниченность которых гарантирует ВВО устойчивость билинейной системы. Условия 1–4 леммы являются достаточными условиями ВВО устойчивости билинейной системы и одновременно достаточными условиями ограниченности энергетических функционалов $J^{(\gamma)}$. Анализ выражений (5.4), (5.5) показывает, что элементы числовых последовательностей грамиана билинейной системы сходятся с различной скоростью, гарантирующая оценка которой дается выражениями (4.11)–(4.12).

Сходимость числовых последовательностей является необходимым условием применения методов линейной теории управления на область слабо-нелинейных режимов функционирования, которая может быть описана билинейными моделями вида (2.7). “Маркером” расходимости последовательностей является расходимость последовательностей ведущих элементов матриц решений обобщенных уравнений Ляпунова (2.4)–(2.5). При подсчете на каждом шаге вычисления n^2 числовых последовательностей $p_{d\gamma\nu\mu}^{cbln(k-1)ij\gamma}$ только одна последовательность $p_{d\gamma ij}^{cbln(k-1)ij\gamma}$, как было показано выше, оказывается геометрической прогрессией. Достаточное условие расходимости прогрессий имеет вид

$$(5.7) \quad \left| \left[(s_i + s_j)^{-1} a_{d\gamma,ii} a_{d\gamma,jj} \right] \right| \geq 1, \\ \exists i = 1, 2, \dots, n; \exists j = 1, 2, \dots, n; \exists \gamma = 1, 2, \dots, H.$$

Это условие является достаточным условием ВВО неустойчивости нестационарных билинейных систем (2.7).

6. Заключение

В статье разработан метод и получены алгоритмы решения обобщенного уравнения Ляпунова для широкого класса непрерывных нестационарных билинейных систем на основе метода грамианов и итеративного метода построения решения, предложенного ранее в [10–14, 20]. Предложенный подход заключается в диагонализации исходной системы, получении сепарабельного спектрального разложения грамиана стационарной линейной части по комбинационному спектру матрицы динамики линейной части, применении на каждом шаге итерации спектрального разложения матрицы ядра решения на предыдущем шаге и последующего агрегирования элементов матриц решения. Получены спектральное разложение грамианов управляемости и наблюдаемости нестационарной билинейной системы в виде суммы матриц субграмианов, соответствующих парным комбинациям собственных чисел матрицы динамики линейной части. Разработаны новый метод и алгоритм поэлементного вычисления матриц решения обобщенного уравнения Ляпунова для билинейных систем. Принципиальная новизна подхода состоит в переносе вычислений с матрицы решения на вычисление последовательности ее элементов на каждом шаге итерации. Это позволило упростить вычисления и получить компактное аналитическое выражение для матрицы решения обобщенного уравнения Ляпунова. Алгоритмы вычисления последовательностей включают операции сложения, умножения и деления на отличное от нуля число. Установлены новые достаточные условия абсолютной и равномерной сходимости элементов матриц решений для широкого класса билинейных нестационарных систем. Эти условия являются достаточными условиями ВВО устойчивости непрерывной билинейной системы. Полученные результаты можно использовать для решения следующих задач управления [26–30]:

- для построения наблюдателя пониженного порядка в задачах модального управления,
- для проектирования систем энергосберегающего управления,
- для выбора управляющих входов и мест размещения датчиков на выходах для систем управления многомерных объектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Antoulas A.C.* Approximation of Large-Scale Dynamical Systems // SIAM J. Control Optim. Philadelphia, 2005. <https://doi.org/10.1137/1.9780898718713>
2. *Васильев С.Н., Косов А.А.* Анализ динамики гибридных систем с помощью общих функций Ляпунова и множественных гомоморфизмов // АиТ. 2011. № 6. С. 27–47.
Vasiliev S.N., Kosov A.A. Analysis of the Dynamics of Hybrid Systems Using General Lyapunov Functions and Multiple Homomorphisms // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 6. <https://doi.org/10.1134/S000511791106004X>
3. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976.
4. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Математическая теория автоматического управления. М.: ЛЕНАНД, 2019.
5. *Зубов Н.Е., Зыбин Е.Ю., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.* Общие аналитические формы решения уравнений Сильвестра и Ляпунова для непрерывных и дискретных динамических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2017. № 1. С. 3–20.
6. *Буков В.Н.* Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. Калуга: Изд-во Н.Ф. Бочкаревой, 2006.
7. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 1989.
8. *Коровин С.К., Фомичев В.В.* Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. М.: Физматлит, 2007.
9. *Ядыкин И.Б., Галяев А.А.* О методах вычисления граммianов и их использование в анализе линейных динамических систем // АиТ. 2013. № 2. С. 53–74.
Yadykin I.B., Galyaev A.A. On the Methods for Calculation of Grammians and Their Use in Analysis of Linear Dynamic Systems // Autom. Remote Control. 2013. V. 74. No. 2. P. 207–224. <https://doi.org/10.1134/S0005117913020045>
10. *Al-Baiyat S.A., Bettayeb M.* A New Model Reduction Scheme for k-power Bilinear Systems // Proc. 32nd IEEE Conf. on Decision and Control. 1993. P. 22–27. <https://doi.org/10.1109/CDC.1993.325196>
11. *Siu T., Schetzen M.* Convergence of Volterra Series Representation and BIBO Stability of Bilinear Systems // Int. J. Systems Science. V. 22. No. 12. P. 2679–2684. 1991. <https://doi.org/10.1080/00207729108910824>
12. *D'Alessandro P., Isidori A., Ruberti A.* Realization and Structure Theory of Bilinear Dynamic Systems // SIAM J. Control Optim. 1974. V. 12. P. 517–535.
13. *Benner P., Cao X., Schilders W.* A Bilinear H_2 Model Order Reduction Approach to Linear Parameter-Varying Systems // Advances in Computational Mathematics. 2019. V. 45 No. (5–6). P. 2241–2271. <https://doi.org/10.1007/s10444-019-09695-9>

14. Ядыкин И.Б., Исаков А.Б. Спектральные разложения решений уравнений Ляпунова для билинейных динамических систем // ДАН. 2019. Т. 488. № 6. С. 599–603. <https://doi.org/10.31857/S0869-56524886599-603>
15. Тимин В.Н., Кустов А.Ю., Курдюков А.П., Гольдин Д.А., Вершинин Ю.А. Субоптимальная анизотропная фильтрация для линейных дискретных нестационарных систем с нецентрированным внешним возмущением // АиТ. 2019. № 1. С. 3–20. <https://doi.org/10.1134/S000523101901001X>
Timin V.N., Kustov A.Y., Kurdyukov A.P., Goldin D.A., Vershinin Y.A. Suboptimal Anisotropic Filtering for Linear Discrete Nonstationary Systems with Uncentered External Disturbance // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 1. P. 1–15. <https://doi.org/10.1134/S0005117919010016>
16. Петров Б.Н., Рутковский В.Ю., Земляков С.Д. Адаптивное координатно-параметрическое управление нестационарными объектами. М.: Наука, 1980.
17. Lubbock J., Bansal V. Multidimensional Laplace Transforms for Solution of Nonlinear Equation // Proc. IEEE. 1969. V. 116. No. 12. P. 2075–2082.
18. Пупков К.А., Капалин В.И., Ющенко А.С. Функциональные ряды в теории нелинейных систем. М.: Наука, 1976.
19. Солодовников В.В., Дмитриев А.Н., Егупов Н.Д. Техническая кибернетика. Теория автоматического управления. Кн. 3. Ч. II. Гл. XVIII. Анализ и синтез нелинейных систем автоматического регулирования при помощи рядов Вольтерра и ортогональных спектров. М.: Машиностроение, 1969. С. 223–256.
20. Zhang L., Lam J. On H_2 Model Order Reduction of Bilinear Systems // Automatica. 2002. V. 38. P. 205–216. <https://doi.org/10.1080/00207179.2020.1740945>
21. Benner P., Dam T. Lyapunov Equations, Energy Functionals and Model Order Reduction of Bilinear and Stochastic Systems // SIAM J. Control Optim. 2011. V. 49. No. 2. P. 680–711. <https://doi.org/10.1137/09075041X>
22. Мироновский Л.А., Соловьева Т.Н. Анализ и синтез модально-сбалансированных систем // АиТ. 2013. № 4. С. 59–79.
Mironovsky L.A., Solovyeva T.N. Analysis and Synthesis of Modally Balanced Systems // Autom. Remote Control. 2013. V. 74. No. 4. P. 588–603.
23. Hauksdottir A.S., Sigurdsson S.P. The Continuous Closed Form Controllability Gramian and Its Inverse // Amer. Control Conf. Hyatt Regency St. Louis Riverfront. St. Louis, MO, USA, June 10–12, 2009. P. 5345–5351.
24. Xiao C.S., Feng Z.M., Shan X.M. On the Solution of the Continuous-Time Lyapunov Matrix Equation in Two Canonical Forms // IEE Proc.-D. 1992. V. 139. No. 3. P. 286–290.
25. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз, 1963.
26. Воропай Н.И., Голуб И.И., Ефимов Д.Н., Исаков А.Б., Ядыкин И.Б. Спектральный и модальный методы в исследованиях устойчивости электроэнергетических систем и управлении ими // АиТ. 2020. № 10. С. 3–34.
<https://doi.org/10.31857/S0005231020100013>
Voropai N.I., Golub I.I., Efimov D.N., Isakov A.B., Yadykin I.B. Spectral and Modal Methods for Studying Stability and Control of Electric Power Systems // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 10. P. 1751–1774.
<https://doi.org/10.1134/S000511792010001X>

27. Исааков А.Б., Ядыкин И.Б. Lyapunov Modal Analysis and Participation Factors Applied to Small-Signal Stability of Power Systems // Automatica. 2021. V. 132. No. C. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2021.109814>
28. Бойченко В.А., Курдюков А.П., Тимин В.Н., Чайковский М.М., Ядыкин И.Б. Некоторые методы синтеза регуляторов пониженного порядка и заданной структуры // Управление большими системами. 2007. Вып. 19. С. 23–126.
29. Yadikin I., Galyaev I. On the Solution of Matrix Generalized Lyapunov Equations for a Class of Bilinear and Linear Dynamical Systems with Variable Parameters // 13th Int. Conf. “Management of large-scale system development” (MLSD). 2020. P. 1–5. <https://doi.org/10.1109/MLSD49919.2020.9247687>
30. Дударенко Н.А., Нуйя О.С., Сержантова М.В., Слита О.В., Ушаков А.В. Математические основы теории систем: лекционный курс и практикум. Учебное пособие для высших учебных заведений / Под ред. А.В. Ушакова. Изд. 2-е, расширенное и дополненное. СПб.: НИУ ИТМО, 2014.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 16.09.2021

После доработки 05.11.2021

Принята к публикации 26.01.2022